O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
FANLAR AKADEMIYASI

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI
MATEMATIKA INSTITUTI



ALGEBRA VA ANALIZNING DOLZARB MASALALARI

XALQARO ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA

Termiz, 20-21oktabr 2025-yil

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

Термез, 20–21 октября 2025 год

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

ALGEBRA VA ANALIZNING DOLZARB MASALALARI

mavzusidagi Xalqaro ilmiy-amaliy anjumani

MATERIALLARI TO‘PLAMI

Termiz, 2025-yil 20-21- oktabr.

****

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Международной научно-практической конференция по

АКТУАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

Термез, 20–21 октября 2025 года.

****

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION, SCIENCE AND INNOVATIONS OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

TERMEZ STATE UNIVERSITY

INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

COLLECTION OF MATERIALS

International Scientific-Practical Conference on

CURRENT PROBLEMS OF ALGEBRA AND ANALYSIS

Termez, October 20–21, 2025.

Актуальные проблемы алгебры и анализа: сборник материалов Международной научно-практической конференции (20–21 октября 2025 года, г.Термез, Узбекистан). – Термез, 2025. -370с.

Данный сборник включает материалы Международной научной-практической конференции на тему «Актуальные проблемы алгебры и анализа», проведенной в Термезском государственном университете с целью расширения сотрудничества ученых, работающих в системе высших учебных заведений и научно-исследовательских институтах нашей республики, обсуждения новых результатов в области математики и методов ее преподавания, а также определения перспективных направлений. В частности, в него вошли доклады с пленарных заседаний, а также тезисы математиков, исследователей и магистрантов, ведущих научные исследований в области алгебры, анализа и смежных направлений на секционных заседаниях.

Конференция запланирована на основании приказа Министерства высшего образования, науки и инноваций № 490 от 27 декабря 2024 года.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Сопредседатели:
Тошкулов А.Х. — ректор Термезского государственного университета, профессор
Аюпов Ш.А. – президент Академии наук Узбекистана, академик
Заместители председателя:
Розиков У.А. – Академия наук Узбекистана, Институт математики имени В.И. Романовского, академик
Ашуров Р.Р. – Академия наук Узбекистана, Институт математики имени В. И. Романовского, профессор
Шайдуллаев А.Ш. – проректор ТерДУ по научной работе и инновациям, д. ф.и.н.

СОСТАВ КОМИТЕТА

Ахмедов У.Ч. – проректор ТерДУ по учебной работе, доцент
Холмухамедов О.Р. – профессор (Узбекистан)
Хаётов А.Р. – профессор (Узбекистан)
Худойбердиев А.Х. – профессор (Узбекистан)
Рузиев М. – профессор (Узбекистан)
Адашев Ж.К. – профессор (Узбекистан)
Аллаков И. – профессор (Узбекистан)
Мирсабуров М. – профессор (Узбекистан)
Тураев Р.Н. – профессор (Узбекистан)
Нормуродов Ч.Б. – профессор (Узбекистан)
Сафаров А.Ш. – доцент (Узбекистан)
Чориева С.Т. – (ответственный секретарь) доцент (Узбекистан)
Бозоров Ж. – (ответственный секретарь) д.ф.ф.-м.н. (Узбекистан)

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Сопредседатели:
Алимов Ш.А. – академик (Узбекистан)
Аъзамов А.А. – академик (Узбекистан)
Члены комитета:

Хожиев Ж.Х. – академик (Узбекистан)
Фарманов Ш.К. – академик (Узбекистан)
Лакаев С. – академик (Узбекистан)
Фатанах Б.Д. – профессор (Малайзия)
Бердишев А. – профессор (Казахстан)
Рахманов З.Х. – академик (Таджикистан)
Худойберганов Г. – профессор (Узбекистан)
Арипов М. – профессор (Узбекистан)
Шоимкулов Б.А. – профессор (Узбекистан)
Омиров Б.А. – профессор (Узбекистан)
Хасанов А. – профессор (Узбекистан)
Хужаяров Б. – профессор (Узбекистан)
Хасанов А. профессор (Узбекистан)
Солеев А. – профессор (Узбекистан)
Шодиметов Х.М. – профессор (Узбекистан)
Зикиров О.С. – профессор (Узбекистан)
Исломов Б. – профессор (Узбекистан)
Нарманов А.Я. – профессор (Узбекистан)
Дурдиев Д. – профессор (Узбекистан)
Кудайбергенов К.К. – профессор (Узбекистан)
Имомов А.А. – профессор (Узбекистан)
Артикбоев А. – профессор (Узбекистан)
Заитов А.А. – профессор (Узбекистан)

Секретариат:
Бегалиев О. – ТерГУ **Жураев Б. – ТерГУ**
Абраев Б. – ТерГУ **Сакиева О. – ТерГУ**
Турсунова Б. – ТерГУ **Эшкобилова Д. – ТерГУ**
Джавлиева Г. – ТерГУ **Джураева Д. – ТерГУ**
Хужамкулов Б. – ТерГУ **Саатмуродов Ш. – ТерГУ**
Мажидова Д. –ТерДУ **Хўжакулов Ж. –ТерДУ**
Хатамов М. –ТерДУ **Аманов Б. –ТерДУ**

Ответственные за выпуск:
д.ф.-м.н., профессор **И. Аллаков**,
д.ф.-м.н., профессор **М. Мирсабуров**.

Данный сборник рекомендован к публикации на основании решения Совета Термезского государственного университета №7 от 3 октября 2025 года.

Авторы несут ответственность за достоверность сведений, включенных в сборник.

MUNDARIJA

СОДЕРЖАНИЕ

Professor Ismail Allakovning ilmiy va pedagogik faoliyati haqida 13

1 – SHO‘BA. ALGEBRANING ZAMONAVIY MUAMMOLARI

СЕКЦИЯ 1. СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ АЛГЕБРЫ

Abrayev B.X., Botiraliyeva O.A. *Tub o‘zgaruvchili Diofant tengsizliklari haqida* 15
Abrayev.B. X., Xayrullayev I.N. Xo‘jamova F. *O‘nta tub o‘zgaruvchili Diofant tenglamasi yechimlari haqida* 16
Allakov I. *Sonlarni bir vaqtda chiziqli formalar orqali ifodalashlar haqida* 17
Asrorov D. U. *On Nakayama Automorphisms of Commutative Frobenius Algebras* 18
Arzikulov F.N., Khakimov U.I. *On Inner RJ- and BJ-Algebras* 20
Begamov S.N. *General jacobi-jordan algebras associated with a5-dimensional Jacobi-Jordan algebra having a 3-dimensional derived ideal* 21
Erdonov B.Kh. *On the Simultaneous Representations of Natural Numbers by Integers and Prime Numbers* 23
Eshimbetov M.R, Eshimbetov J.R., Ashurova N.A. *On the solution of a system of three max-plus linear equations in three variables* 25
Gaybullaev R. K., Nurilloyeva A. X. *Some properties of double derivations of 3-Lie superalgebras* 27
Mardonova G.O. *Egizak tub sonlar haqida* 28
Normatov E. P., Akmalova R. A., Zayniddinova N. O‘. *Tashkil etuvchilari ikkita bo‘lgan erkin gruppaning indeksi 3 ga teng qism gruppalari* 30
Ruzimuradov X.X., Uroqova S.N. *Algebraik egri chiziqlarning eskizini darajali geometriya va kompyuter algebrasi metodlari yordamida tasvirlash* 32
Safarov A.Sh., Bozoraliyev E. T. *Arifmetik progressiyadan olingan tub sonlar yig‘indisining maxsus to‘plamlari haqida* 33
Saatmurotov Sh. Z., Ashirqulov T. Z. *Additiv masalalar haqida* 35
Vaisova N. Z., Atajonov Kh. O., Bobojonov I. G‘. *Local and 2-local anti-derivations on naturally graded filiform Lie algebras* 36
Xo‘jamqulov B. T., Mamaraimova G., Shomirzayev A. *Chiziqli operatorning xos son va xos vektorlarni topishning usullari* 38
Yusupov B., Jumaniyozov D., Azizov M. *Biderivations of null-filiform Leibniz algebras* 40
Закиров Б.С., Чилин В.И. *Свойство Блюма-Хансона для L_1-сжатий в L_p-пространствах Банаха-Канторовича над кольцом измеримых функций* 42
Имамов О.Ш. *О решении некоторых аддитивных задач типа Варинга-Гольдбаха* 44
Каримзода Дониёр Джалил *Оценка коротких сумм значений характеров от квадратичного многочлена с простыми числами* 47
Маматов А.Р. *Алгоритм построения решения в параллелепипеде системы линейных уравнений с параметром из прямоугольника* 48
Рахмонов Д. Д. *Асимптотическая формула для специальных коротких тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах* 49
Рахмонов З. Х. *Средние значения функций Чебышёва с экспоненциальным весом в коротких интервалах и короткие тригонометрические суммы*

с простыми числами 50
Рахмонов Ф. З. *Сумма модулей коротких тригонометрических сумм с простыми числами и ее приложение в вопросе равномерного распределения дробных частей* $\{\alpha p^n\}$ 55
Сеттарова Э.С. *Нахождение элементов выпуклой оболочки множества точек n-мерного пространства* 58
Хайруллохзода Ш.А. *Об оценке специальных кратных тригонометрических сумм и их применении в задачах аналитической теории чисел* 61
Чилин В.И., Закирова Г.Б. *Линейные изометрии в* L_p *пространствах Банаха-Канторовича над кольцом измеримых функций* 62
Эргашев В.Э., Буриев Т.Э. *Приложения последовательности Сомоса к эллиптическим кривым* 63

2 – SHO‘BA. MATEMATIK TAHLIL MASALALARI VA ULARNING TATBIQLARI

СЕКЦИЯ 2. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Aminov H.A *Uchinchi turdagi matritsaviy sharda chegaraviy Morera teoremasi* 65
Bozorov J. T.,To‘rayev T. A., Bo‘riyeva I. *Ikkinchi tur matritsaviy polikrugda golomorf davom ettirish masalasi* 67
Bozorov J. T.,To’rayev T. A., Bobonazarova M. O. *Ikkinchi tur matritsaviy poliyedrda Veyl integral formulasi* 69
Eshboltaev S. *Applications of the Lobachevsky metric in the H - upper half-plane* 71
Eshkabilov Y. Kh., Boboyarova Z. D. *On dynamics of a separable quadratic stochastic operators* 72
Hakimova M. A. *Analysis of* $G_4^{(2)}$*-periodic ground states for the Chui-Weeks model* 74
Jamilov U.U., Makhmudov Y.B. *Convergence of orbits of a non-Volterra quadratic operator* 75
Jumayev J. N., To’rayev A. U., Nuraliyev A. Sh. *On the iteration of a cubic map defined by a non-stochastic matrix on a two-dimensional simplex* 77
Kulturayev D. J. *Ko’p o’lchamli diskret Shredinger operatorining muhim spektrining yuqorisida joylashgan xos qiymatlari cheksizligi haqida* 79
Maxkamov E. M.,To‘rayev T. A. *Umumlashgan matritsaviy poliedrda Bishop integral formulasining bir ko‘rinishi* 81
Mukhitdinov R.T., Jamilov U.U. *Regularity of a non-Volterra operator* 83
Norov A. Z., Khamrayev A. Yu., Najimov O. I. *Dynamics of a predator-prey system with equal dominance* 85
Nurboyev I.A. *Lotka-Volterra mapping trajectory routes* 87
Qurbanova R. Sh., Aliqulov E.O. *A(z)-analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integralning uzluksizlik sharti* 89
Rahmatullaev M. M., Burxonova Z. A. *New Non-Translation-Invariant Gibbs Measures for the Ising Model on a Cayley Tree of Order Three* 90
Rasulova M. A. *The four-state Potts-SOS model on the Cayley tree: Translation-invariant ground states* 92
Soleev A., Soleeva N. *Positional function of robotics mechanisms and its asymptotic solution near the singularities* 92
Sulaymonova S. S. *Convergence analysis of a modified proximal point algorithm for*

a nearly asymptotically quasi-nonexpansive mapping 93
Sulaymonova S. S. *Modified proximal point algorithm for dealing with fixed point problems and convex minimization problems in CAT(0) Space* 94
Shaimkulov B. A., Rasulova M. K. *Smooth boundary points of the matrix ball* 95
Tagaymurotov A. O. *Representation of the set of idempotent probability measures $I(X)$ by balls on the idempotent space $\mathbb{R}^n_{\max}$* 97
Tashpulatov S. M. *Three electron systems in the impurity hubbard model. first doublet state* 99
Uralbayev M. *Application of Stokes' Formula in Complex Space and Solving Linear Integral Problems* 102
Xayrullayeva M. G' *Kredit risk bo'yicha portfel modellari. Portfel yo'qotishlari taqsimot* 104
Zaitov A. A., Abduraimov Y. N. *Caratheodory's theorem in max-plus algebra* 105
Носирова Х. Н. *Поперечники множеств и их связь с собственными значениями операторов* 108
Каримов О. Х., Азамкулов А. *Разделимость для дифференциального оператора Грушина в весовом пространстве* 111
Солеев А.С., Розет И.Г., Мухтаров Я. *Режимы стохастики в некоторых биофизических и экологических системах с вынужденными и самоорганизующимися периодическими возмущениями* 112
Туйчиев Т. Т., Якубова Н. Д. *О гармоническом продолжении суммы ряда Хартогсас переменным радиусом сходимости* 113
Яхшибоев М. У., Нарзуллаев У. Х. *Совпадение дробной производной Грюнвальда-Летникова-Адамара с производной Маршо-Адамара* 114

3 – SHO'BA. GEOMETRIYANING DOLZARB MUAMMOLARI

СЕКЦИЯ 3. АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИИ

Aslonov J. O., Ergashev M. A. *Some properties of the curvature of Riemannian manifolds with polynomial structure* 116
Eshqobilova D. T., Jamg'irova G. B. *Ikki o'lchamli idempotent fazodagi ikkinchi tartibli chiziqlarning tenglamalari* 117
Eshqobilova D. T., Normamatova Z. O'. *Uch o'lchamli idempotent fazolarda to'g'ri chiziq va tekislik tenglamalari* 119
Ismoilov Sh. Sh., Kholmurodova G. N. *Application of the solution of the Monge-Ampere equation in isotropic space* 121
Jumaev D. I., Ishmetov A. Ya., Kurbanov Kh. X. *The space of order-preserving functionals and weak Π-completeness* 122
Narmanov A. Y., Ergashova Sh. R *On the geometry of $\mathbb{SO}(3)$* 125
Norqo'ziyev N.N. *Gruppaning ko'pxillikka ta'siri* 127
Nosirova M. S., Mukhamadiev F. G. *A note path in the n-fold symmetric product of the space X* 128
Parmonov H.F. *Hamiltonian geometry of vector fields* 129
Qosimov O.Yu., Muratova O.Ya. *Geometry of Killing vector fields* 131
Sultanov B.M., Mahmudova N.O., Zaripova N.D., Xudayberganova M.X. *Galiley fazosida doimiy egrilikka ega ko'chirma sirtlar* 133
Sultanov.B.M., Otakhonova M.J., Davronbekova M.J. *Galiley fazosida nol egrilikka ega aylanma sirtlar* 134
Tursunov B. A., Buronova S. A., Xoliqova T. T. *Sirt egriligini hisoblash* 135

Косимов О.Ю, Юлдашев.Э.А *Поле касательных плоскостей* 138
Заитов А. А., Камилов Х. Х. *Применение групповых операций в строительстве* .. 139
Холтураев Х. Ф, Эргашев Ф.Ш. *О сужении и расширении идемпотентных мер* .. 141

4 – SHO'BA. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIK FIZIKANING NOSTANDART MASALALARI

СЕКЦИЯ 4. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Abdullaev O.Kh., Sobirjonov A.Q. *The direct problem for a fractional-order diffusion equation with involution involves several types of loads* 143
Abdimurodova X. A., Khujakulov J. R. Barotaliyeva D. *An inverse problem with non-local condition for fractional differential equation on metric graph* 144
Azamov A. A., Bekimov M. *Game-theoretic model of a rotating regenerative air preheater for thermal power plants* 146
Azamov A. A., Ruzimuradova D. Kh. *On the analytic system whose limit set is an unbounded cylinder* 146
Bekenayeva K. S., Aitzhanov S. E. *Solvability of a pseudoparabolic equation with a fractional Caputo derivative* 148
Bekenayeva K.S., Aubakir Zh., Miyatkul B. *Solvability of Nonlocal Boundary Value Problem for a Loaded Pseudoparabolic Equation* 150
Bo'tayorova S. N.*Singulyar koeffitsiyentli elliptik tipdagi tenglamalar uchun xopf prinsipi* . 151
Esanova D. X. *Kasr tartibli differensial operatorlar uchun ekstremum prinsipi.* 152
Gurbanov P, Chashemov M. *Solution of some non-local problem for mixed equation with second order.* 154
Hoitmetov U. A., Sobirov Sh. K., Ruzmetova G. U. *On finding the cauchy equation for the loaded, extended, modified fifth-order Korteweg-De vries equation* 156
Inomiddinov S . N., Ibroximjonov I . I., Ibragimov G . I . *Evasion differential game evasion in a differential game with integral constraints against multiple pursuers* 157
Khasanov A. B., Eshbekov R. Kh., Farkhodova G. S. *Integration of the Hirota-type equation with a finite density and integral self–consistent source* 159
Khushvaktov N.Kh. *The Cauchy problem for the Rayleigh-Stokes type fractional differential equation* 161
Kurbanov O. T. *One a boundary value problem for a third order equation with multiple characteristics* 162
Makulbay A.B., Mirsaburova G.M. *Solvability of a Nonclassical Problem for a Mixed-Type Equation* 164
Muxammadjonov A. A., Ibragimov G. I. *An evasion game for an infinite system of ternary differential equations in Hilbert space l_2* 167
Pirmatov Sh.T. *On one estimate of the b-elliptic operator* 169
Ruzmetov M. M., Yusupova SH. R. *Integration of a finite complex toda chain with a self-consistent source* 171
Toshpulatov M. *Initial-boundary problem for time-fractional mixed equation involving regularized Prabhakar derivative* 172
Turdiev H. H. *Inverse problem of determining the time coefficient in a multi-dimensional fractional equation of diffusion* 173
Usmonov D. A., Murolimova N. A. *The first boundary value problem for a subdiffusion equation with the tempered Caputo derivative* 175

Usmonov D. A., Jurayeva D. U. *Integral condition problem for determining the time-dependent coefficient in the telegraph equation* 176
Xajiyev I. O., Rashidova M. A. *Issiqlik tarqalish jarayoni uchun chegaraviy teskari masala* 177
Xasanov A. B., Xudayorov U. O. *Qator manbali Liuvill tenglamasiga qo'yilgan aralash masala* 178
Yagmyrov A., Gurbanmammedov P.N. *On the solution of a second-order integrodifferential equation* 180
Yuldashev T. K., Babayev M. A., Sarman A. *Inverse problem for a nonlinear partial differential equations of the seventh order* 182
Yuldashev T. K., Matchanova A. A., Artykova Zh. A. *Mixed problem for a pseudoparabolic fractional differential equation with final condition* 185
Zhumagul G.O. *Solvability of a Pseudohyperbolic Equation with Nonlocal Boundary Condition* 187
Абдуллаев Ж.И., Муйдинова Ш.Н. *О существовании трехчастичного собственного значения оператора Шредингера системы трех бозонов* 188
Амонов Б. Б. *О единственности решения задачи с недостающим условием смещения для уравнения Геллерстедта с особыми коэфициентами.* 189
Батхин А.Б., Хайдаров З.Х. *Рациональная параметризация резонансных многообразий в системах Гамильтона с тремя степенями свободы* 191
Бегалиев А. О. *К общей теории систем Пфаффа* 193
Бегалиев О., Норхонова М. *Нелокальная задача для уравнения теплопроводности с двумя свободными границами* 194
Бегимова Ш. Ч. *Принцип Заремба-Жиро для уравнения эллиптического типа с сингулярным коэффициентом.* 196
Гуйджова Дж., Гылыджов С. *Критерии неосцилляции кнезеровского типа для эллиптических уравнений.* 198
Джамалов С. З., Шакиров А. А. *Об одной коэффициентной обратной задаче с полунелокальными условиями для трехмерного уравнения Трикоми в параллелепипеде.* 199
Джамалов С. З., Юсупов Ш. Б., Халхаджаев Б. Б. *Об однозначной разрешимости регулярного решения полунелокальной краевой задачи для уравнения Трикоми четвертого порядка* 201
Зуннунов Р. Т., Худоёров А. А. *Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа второго рода в области - эллиптическая часть которой вертикальная полуполоса* 203
Исломов Б.И., Ахметов К. Н *Краевая задача с разрывными условиями склеивания для уравнения смешанного типа второго рода с оператором дробного порядка в смысле Капуто* 204
Каримов К. Т., Орипов Д. Д. *Начально-краевая задача для вырождающегося дифференциального уравнения высокого четного порядка с оператором Бесселя* 206
Каримов Ш. Т., Мирсабурова Д. М . *О существовании решения задачи с локальными условиями на граничной и параллельной ей внутренней характеристиках для одного класса уравнений смешанного типа.* 208
Каримов Ш. Т., Тулашева Ё. И. *Об одном методе решения начальных и начально-граничных задач для уравнения колебаний балки* 210
Кылышбаева Г.К. *Краевая задача для смешанных уравнений третьего порядка в прямоугольной области* 212
Мадрахимова З.С., Рустамова М.Р. *Краевая задача с разрывными условиями*

склеиванием для уравнения параболо-эллиптического типа 213
Мамадалиев Н. А., Мустапокулов Х. Я. *Дифференциальные игры с импульсными управлениями* 215
Мирсабуров М., Маматмуминов Д. Т., Турдиев Х. Х. *Задача со смещением в трех точках граничных характеристик для вырождающегося гиперболического уравнения* 216
Мирсабуров М.,Тураев Р.Н., Мирзаев Ф.С. *О единственности решения задачи с недостающим условием трикоми на граничной характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа второго рода* 218
Мирсабуров М., Рузиева З. Ф. *О существовании решения задачи с неполным условием Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа* 220
Мустапокулов Х. Я., Бекниязов А. Б. *Об одной задаче импульсного преследования* 222
Расулов М. С., Умирхонов М. Т. *Об одной задаче Стефана для реакционно-диффузионной системы* 223
Рузиев М. Х., Казакбаева К. Б. *Об одной краевой задаче для уравнения Хольмгрена с сингулярными коэффициентами* 224
Сагдуллаева М. М. *Об одной задачи с интегральным условием для уравнения третьего порядка.* 225
Сатторов Э.Н., Эрмаматова З.Э., Отамуродов М.Б. *О продолжении решений задачи Коши для уравнения Пуассона в ограниченной трехмерной области* 227
Тураев Р. Н., Хуррамов А. Т. *Краевая задача для нелинейного параболического уравнения* 228
Тураев Х. *Об общих свойствах линейных функциональных уравнений.* 230
Хасанов А. *Обобщенные операторы дробного интегрирования с ядром гипергеометрической функций Гаусса* 231
Хоитметов.У,А., Хасанов.Т,Г. *Задачи Коши для нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с источником интегралного типа* 232
Худайкулиев Б.А. *Об оценке неотрицательных решений уравнения теплопроводности с сингулярным потенциалом* 234
Чориева С.Т., Тошмуродова М. *Об одной краевая задаче типа задачи Бицадзе-Самарского для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения Геллерстеда с сингулярными коэффициентами* 236
Шукуров Г.Н. *Численное исследование обтекания плоского клина вязкоупругим потоком* 238
Ядгаров Т. Г., Пайзиева М.Т. *Моделирование информационных потоков в логистической информационной системе* 238

5 – SHO‘BA. HISOBLASH MATEMATIKASI VA MATEMATIK MODELLASHTIRISH

СЕКЦИЯ 5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Abduaxadov A. A. *Constructing an optimal quadrature formula with derivative and parameter σ* 241
Akhmedov D.M., Buvasherov D.S. *Optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with highly oscillation in the Sobolev space* 242
Bakhramov S.A., Rakhimova F.S., Qobilov S.Sh. *Application of a local cubic*

spline interpolation model in the digital processing of gastroenterologic signals 244
Bakhramov S.A., Rakhimova F.S., Qobilov S.Sh. *Digital signal processing based on local cubic spline interpolation over unequal intervals* 246
Bekmurodova D. B. *Haqiqiy qiymatli davriy funksiyalar fazosida xatolik funksionalining normasi* 248
Berdyshev A.S., Boranbek K. *A Sparse-Grid Stochastic Collocation Method for the Time-Fractional Stochastic Stokes-Darcy Model* 250
Boltayev A. Q., Shonazarov S. Q. *Sobolev fazosida oshkor optimal ayirmali formulaning koeffitsiyentlari* 252
Doniyorov N. N.. *New local trigonometric basis functions for approximating some geometric curves in the plan* 254
Eshmamatova D.B., Muminov U.R., Islomova M.N. *Dynamic properties of Lotka-Volterra mappings induced by skew-symmetric block matrices* 255
Hayotov A.R., Olchiyev A.A. *Advanced Algorithms for Cone-Beam CT Image Reconstruction* 256
Hayotov A.R., Kurbonnazarov A.I., Turaboyev B. U. *Application of the optimal quadrature formula constructed in Hilbert space to image reconstruction in computed tomography* 257
Khuzhayorov B., Dzhiyanov T. O., Eshdavlatov Z. Z. *Finite Difference Approximation For Fractional Solute Transport Equation* 259
Maz Jamilah Masnan , Syafawati Ab. Saad , Karniza Khalid , Safwati Ibrahim *From data to diagnosis: enhancement of diabetic retinopathy stages classification via data fusion* 262
Musurmonov E. A., Ko‘charova A. R., Shukurova Z. U., Shukurov A. M. *Elastik yarim fazoda qattiq sharda yassi nostatsionar ko‘ndalang to‘lqin difraksiyasi* 263
Navruzov K., Sharipova Sh. , Aqmonova L. *Nonyuton suyuqliklarning nostatsionar oqimdagi tezlik taqsimoti* 265
Normurodov Ch.B., Murodov S.K. *Grid generation and mapping in the spectral-grid method for high-order singularly perturbed ODEs* 266
Normurodov Ch. B. , Xolmirzayeva N. A. *Ko‘p masshtabli usul va chegaraviy qatlamli singulyar qo‘zg‘algan masalalarning sonli modellashtirilishi* 269
Nuraliyev F.A., Edilbekova R.M. *Optimal quadrature formula with derivative* 271
Nuraliev F. A., Abdullaeva G. Sh. *System of equations for finding the coefficients of an algebraic hyperbolic natural spline of the eighth order* 272
Nuraliyev F.A., Ulikov Sh.Sh., Kuziev Sh.S. *Coefficients of the optimal quadrature formula in* $W_2^{(2)}(0,1)$ *space* 274
Raxmonov Z. R. Zaripova A.R. *Chiziqsiz chegaraviy shartlar bilan berilgan reaksiya-diffuziya sistemasi yechimlarining asimptotikasi* 276
Raxmonov Z. R., Xolmirzayeva N. A. *Nochiziqli chegaraviy shartli diffuziya sistemalarini sonli va analitik tadqiq etish* 279
Sakiyeva O. B., Saidov J. N. *Graflar nazariyasining boshqaruv jarayonlarini optimallashtirishga tatbiqining nazariy asoslari* 282
Saryyeva B., Owlyagulyyev G., Yemshikov B. *Some methods of digital calculations of hydraulic parameters of main gas pipelines* 283
Seytov Sh.J., Nishonov S.N.,Islamova M.I. *Composition of Nonlinear Operators and Stability of Fixed Points* 286
Shadimetov Kh.M. , Jabborov Kh.Kh. *Coefficients of the optimal quadrature formula constructed for a singular integral equation with a Hilbert kernel in*

Sobolev space $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ 288
Tverdyi D.,A., Parovik R. I. *Analysis of the efficiency and complexity of parallel numerical solution algorithms in a model of radon volumetric activity with a fractional derivative of variable order* 290
Zainidin K. Eshkuvatov , Davron Khayrullaev, Bakhtiyar Khudayarov *Solving the burgers-huxley equation by using the semi-analytical method* 293
Азамов С.С., Хакимова И.К. *Экстремальная функция одной оптимальной квадратурной формулы в пространстве Гильберта* 294
Акбаров У. Й., Мансуров М. М., Нуритдинов Ж. Т. *Математический модель задачи о флаттере вязкоупругого стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейностью* 296
Алмазова Г. М., Гылыджов С.*Моделирование транспортных процессов* 299
Болтаев А. К., Давронов Ж. Р., Амонов М. К. *Элемент Рисса одной интерполяционной формулы* 301
Бозоров А., Файзуллаева Ш., Бобоярова Н. *Дробная динамика модели Лотки-Вольтерры* 303
Зокиров М. С., Кулжанов Ж.Б *Плоско – радиальная аномальная фильтрация жидкости в пористой среде с предельным градиентом давления* 305
Ибрагимов А. А., Абдухалилов Ш. Я. *Методы распространения ограничений в интеграции с аффинной арифметикой для гарантированного решения систем нелинейных уравнений* 307
Кожамкулова Ж.Ж. , Ержанкызы Д. *Численное исследование методов математического моделирования для минимизации затрат в туристической задаче: алгоритмы имитационного отжига и 2-opt* 309
Нуралиев Ф.А., Мирзакабилов Р. Н., Миркомилов Д.М. *Квадрат нормы функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы впространстве Соболева* 311
Паровик Р. И. *Некоторые аспекты применения нейросетевых методов решения начальных и краевых задач для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения Лейна-Эмдена* 313
Турсунова Б. А., Нормаматов А. *Численное моделирование сингулярно-возмущенного уравнения третьего порядка с применением полиномов Чебышева второго рода* 314
Усманов Х.И. *Приближенное решение задачи балки Эйлера – Бернулли* 316
Хужаёров Б.Х., Туйгунов Ж.Р. *Численный анализ задач и об аномальной фильтрации жидкости в неоднородной среде* 318
Шадиметов Х.М., Гуломов О.Х. *Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быстроосциллирующих интегралов* 320
Шадиметов Х. М., Маматова Н. Х. *Квадрат нормы функционала погрешности составных оптимальных квадратурных формул* 322
Шадиметов Х.М., Турсунмурадов С.Т. *Квадрат нормы функционала погрешности весовых квадратурных формул в пространстве Соболева* 324
Шадиметов Х. М.,Эсанов Ш. Э. *Дискретный аналог дифференциального оператора второго порядка с переменными коэффициентами* 325
Шадиметов Х.М., Элмуратов Г. *Экстремальная функция периодического функционала погрешности быстроосцилирующих квадратурных формул* 327
Шадиметов Х. М., Уринбоев Р. *Оптимальные квадратурные формулы для быстроосцилирующих интегралов* 328

6 – SHO‘BA.MATEMATIKA VA INFORMATIKA O‘QITISH METODIKASI.

СЕКЦИЯ 6. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Akmurzayeva A. V., Mamatov J. X. *Topologiya kursini o‘qitishda interfaol metodlardan foydalanishning haftalik dars rejasi* 330
Allakov I., Xudoyberdiyev S., Akromova S. *Ko‘phadlar uchun umumlashgan Be’zu teoremasi* 332
Avliyoqulov A. A. *Raqamli texnologiya muhitida integrativ yondashuv vositasida o‘qitish metodikasini takomillashtirish* 333
Avliyoqulov A. A. *Raqamli texnologiyalar asosida V-VI sinflarni integrativ yondashuvlar orqali o‘qitish metodikasi* 335
Aytuvganov U. X., Saidxonov J. S. *Talabalarning ijodiy fikrlashini rivojlantirishda geometrik masalalardan foydalanish usullari* 336
Berdiyeva O. B. *O‘quvchilarda matematik savodxonlikni shakllantirish muammolari va ularni hal etish strategiyalari* 339
Djavliyeva G., Qudratova Sh.I. *Ta’lim sifati va samaradorligini oshirishda baholashning o‘rni.* 341
Djurayeva D.Sh., Qo‘ldosheva D. *Zamonaviy ta’lim jarayonida innovatsion pedagogik texnologiyalar va elektron ta’lim vositalarining ahamiyati* 342
Erdonov B.X., Xudoynazarova D.N., Ro‘ziyeva N.T. *Ba’zi murakkab sonlarning bo‘linish belgilari va mavjud bo‘linish belgilariga yangicha yondashuv* 345
Jumaniyozov Q. S., Safoyeva K. Q. *Ta’limda integratsiya va uning mohiyati* 347
Mengliyev I. , Muhammadiyeva L. *Kimyo fanini talabalarga fanlararo bog‘liqlikni qamrab olgan holda o‘rgatishda zamonaviy axborot texnologiyalari imkoniyatlaridan foydalanish* 349
Muxamedkulova A. A., Mamatov J. X. *Topologik fazolarning zichligi va lokal zichligini o‘qitishda ilmiy izlanishlar metodidan foydalanish* 351
Muxamedkulova G. A., Mamatov J. X. *Topologik fazolarning salmog‘i va to‘rli salmog‘ini o‘qitishda algebraik metodlardan foydalanish* 352
Qurbonov N.X. *Kvadrat funksiyanining eng katta va eng kichik qiymatlariga bo‘gliq ba’zi masalalarni yechish usullari.* 353
Safarov T. N., Ashurmamatova Sh. I., Ismoilov A. I. *Lecture Plan for the "Surfaces of the Second Order"Module* 355
Sakiyeva O. B., Xushvaqtova D. R. *O‘zgaruvchilar o‘rtasidagi munosabatlarni o‘rganishda korrelyatsion-regression tahlil usulidan foydalanish* 357
Turdimuratov B.K., Qurbonov A.B. *Masofaviy ta’limni o‘qitishda innovatsion texnologiyalar* 360
Umaraliyeva D.U. *Birinchi kurs talabalarida matematik analiz fani amaliy mashg‘ulotlarda matematik axborot bilan ishlash metodlari samaradorligi* 361
Базаргельды Сапаргельдыев *Метод вычисления интеграла тригонометрических функций* 363
Папышев А.А. *Критерий обучения учеников логеческому мышлению* 365
Ханжарова Б. С. *Teaching students to solve mathematical problems using the vector method.* 367



Professor Ismail Allakovning ilmiy va pedagogik faoliyati haqida

22.09.1950 yilda Surxondaryo viloyati Termiz tumanida tug‘ilgan.

1967-1972 yy. SamDU talabasi, 1972-1976 yy. Termiz davlat pedagogika instituti matematika kafedrasi o‘qituvchisi, 1976-1978 yy. O‘zRFA Kibernetika institutida stajyor tadqiqotchi, 1978-1981 yy. O‘zRFA Matematika instituti aspiranti, 1982-1990 yy. Termiz davlat pedagogika instituti matematika kafedrasi o‘qituvchisi, katta o‘qituvchisi, matematik tahlil va hisoblash texnikasi kafedrasi mudiri vazifalarida ishlagan. 1990-1992 yy. O‘zRFA Matematika instituti doktoranti bo‘lgan. 1992-2012 yy. TerDU matematika fakulteti dekani, matematik tahlil kafedrasi dotsenti, kafedra mudiri, dotsent, universitet iqtidorli talabalar akademiyasi prezidenti, magistratura bo‘limi boshlig‘i vazifalarida ishlagan. 2013-2015 yy. TerDU qoshidagi 2-akademik litseyda bosh matematik, 2.09.2015 yildan TerDU matematika kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori. 2018-2021 yy. TerDU algebra va geometriya kafedrasi mudiri, 2021-yil 2-dekabridan hozirgacha shu kafedra professori, professor lavozimida ishlab kelmoqda.

Shuning bilan birga 2021-yildan Universitet jamoatchilik kengashi raisi, Universitet va fakultet kengashlari a‘zosi.

29.09.1983-yilda Leningrad davlat universitetida “Ikkita tub sonlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanadigan sonlarning maxsus to‘plami haqida” mavzusida nomzodlik, 24.12.2008-yilda O‘zRFA ning Matematika va axborot texnologiyalari institutida “Sonli ketma-ketliklarning zichliklarini analitik usul bilan tekshirish” mavzusida doktorlik dissertatsiyasini himoya qilgan. 150 dan ortiq ilmiy maqolalar va tezislar, 25 ta uslubiy qo‘llanmalar hamda 2 ta monografiya, 3 ta o‘quv qo‘llanmaning muallifi. U rahbarligida 3 ta fan doktori (PhD), 25 ta magistrlik dissertatsiyasi va 50 dan ortiq BMI lar himoya qilingan.

U 2013-2016 yillarda O‘zMU qoshidagi fan doktori ilmiy daraja beruvchi ixtisoslashtirilgan kengash a‘zosi, 1918-2023-yillarda TerDUdagi Pedagogika fanlari bo‘yicha ilmiy daraja (PhD) beruvchi ixtisoslashtirilgan kengash, 2017-yildan h.v. Tojikiston MFA Matematika instituti huzuridagi Matematika fanlari bo‘yicha ilmiy daraja (DSc) beruvchi va 2023-yildan hozirgi vaqtgacha O‘z FA V.I.Romanovckiy nomidagi Matematika institutidagi Matematika fanlari bo‘yicha beruvchi ilmiy daraja (DSc) kengashlari a‘zosi va 2018-2023 yy TerDU dagi Pedagogika fanlari bo‘yicha ilmiy daraja (PhD) kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi o‘rinbosari va raisi bo‘lgan.

U stajirovka va aspiranturada o‘qigan davrlarida sonlar nazariyasidagi mashhur X.Goldbaxning binar muammosi: har qanday 6 dan kichik bo‘lmagan juft natural sonni 2 ta toq tub sonlarning yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin degan muammoga oid ilmiy izlanishlar olib bordi. Ma’lumki, bu muammo 1752-yilda Xristian Goldbax tomonidan qo‘yilgan bo‘lib, hozirgacha to‘liq hal etilmaganligi ko‘pchilik olimlarimiz uchun sir emas. Mazkur muammo ustida juda ko‘p matematik olimlarimiz hozir ham ishlar olib bormoqdalar.

U angliyalik R.C.Vaughan, amerikalik H. Montgomerylarning doiraviy metodi va rus olimi I.M. Vinogradov yaratgan trigonometrik yig‘indilar usullarini qo‘llab muhim natijalarga erishdi. Olingan natijalarning yakuni sifatida O‘zbekiston Fanlar Akademiyasining akademigi, professor A.F. Lavrik va professor M.I.Isroilovlar rahbarligida 1983-yilda Sankt-Peterburg Davlat Universitetida "Ikki tub sonlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalangan sonlarning maxsus to‘plami to‘g‘risida nomli mavzuda nomzodlik dissertatsiyasini muvaffaqiyatli himoya qilib fizika-matematika fanlari nomzodi ilmiy darajasini oldi. Dissertatsiya ishiga Sankt-Peterburglik professorlar Z.I. Borevich, A.V. Malishev, B.F. Skubenko va Samaralik professor B.M. Bredixinlar yuksak baho berdilar va bu ishlarni davom ettirish kerak ekanligini qattiq ta’kidladilar.

Matematika bo‘yicha 30 dan ortiq xalqaro konferentsiya va simpoziumlar ishtirokchisi. Uning keyingi asosiy ilmiy ishlari quyidagilarga bag‘ishlangan: arifmetik progressiyadagi tub sonlar va ularning darajalari bo‘yicha olingan trigonometrik yig‘indilarni baholash usuli ishlab chiqilgan va trigonometrik yig‘indilar uchun yangi baholar olinib, ular sonlar nazariyasining muhim additiv muammolari: Varing, Eyler-Goldbax, Xua-Lo-Ken muammolariga va berilgan natural sonlar sistemasini bir vaqtda tub sonlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash masalalariga tadbiq qilinib, sifat jihatidan yangi natijalar olindi. Shu masala bo‘yicha Hua-Lo-Ken tomonidan qo‘yilgan masalani deyarli barcha sonlar uchun hal qildi.

Uning ilmiy natijalariga Rossiya Fanlar Akademiyasi Uzoq Sharq bo‘limining Amaliy matematika instituti etakchi ilmiy xodimi RFA muxbir a‘zosi N.B.Kuznetsov, Belorussiya Milliy Fanlar Akademiyasi Matematika Instituti professori V.I. Bernik, Samarqand davlat universiteti professori X.N.Narzullayev, Nukus davlat universiteti professori S. Tajetdinovlar ijobiy taqrizlar berishganlar. I.Allakov Termiz davlat universitetining nashri ilmiy-nazariy jurnal «TerDU xabarlari», Rossiyada chiqadigan «Chebishevskiy sbornik» jurnalining redkollegiya a’zosi bo‘lib ham samarali faoliyat ko‘rsatmoqda.

“Mening matematik bo‘lib shakllanishimda ustozlarimning roli katta bo‘lgan. Jumladan, o‘rta maktabda menga matematika fanidan dars bergan E.Xaydarov, A.Jumayevlar bo‘lgan bo‘lsa, universitetda o‘qigan davrlarimda esa ilmiy ishlarimga rahbarlik qilgan va keyinchalik ham shu sohadagi ishlarimga maslahatlar berib turgan professorlar X.N. Narzullayev, B.F. Skubenko, aspirantura va doktoranturada o‘qigan paytlarimda va keyingi yillardagi ilmiy izlanishlarimga bevosita rahbarlik qilgan professor M.I.Isroilovga, shuningdek doimiy ravishda o‘zlarining qimmatli maslahatlarini berib turgan akademiklar A.F.Lavrik va Sh.A.Ayupov hamda do‘stlarim professorlar X.M.Shodimetov, M.Mirsoburov, A.Soleyev, R. Muxamadxonova va B.A.Shoimqulovlarning qimmatli maslahatlari men uchun juda qadrli“ dedi Ismail Allakov.

Uning 53 yildan oshiq davrdagi samarali mehnatlari munosib taqdirlangan va 2019-yilda Prezidentimiz Farmoni bilan “Do‘stlik” ordeni, 2021-yilda “Mustaqillikning 30 yilligi”, 2023-yilda Oliy ta‘lim a‘lochisi ko‘krak nishonlari bilan taqdirlangan.

Fizika matematika fanlari doktori, professor Ismail Allakovni qutlug‘ 75 yoshi bilan tabriklab, USTOZ ga sihat-salomatlik va ilmiy- pedagogik ishlariga ulkan muvaffaqiyotlar tilaymiz.

Konferensiya tashkiliy qo‘mitasi

1 – SHO‘BA. ALGEBRANING ZAMONAVIY MUAMMOLARI

СЕКЦИЯ 1. СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ АЛГЕБРЫ

UDK 511.24

Tub o‘zgaruvchili Diofant tengsizligi haqida

Abrayev. B. X.[1], Botiraliyeva O.[2],
[1] Iqtisodiyot va servis instituti, Termiz, Uzbekistan; babrayev@mail.ru
[2] Termiz Davlat universiteti, Termiz, Uzbekistan; obotialiyeva@jmail.com

Diofant yaqinlashtirishlari nazariyasining asosiy masalasi – berilgan haqiqiy sonni ma’lum ko‘rinishdagi ifodalar yordamida yaqinlashtirishdir. Ushbu ishda quyidagi ko‘rinishdagi ifodalar orqali haqiqiy sonlarni yaqinlashtirish masalasi o‘rganiladi:

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2^2 + \lambda_3 p_3^k$$

bu yerda, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – noldan farqli haqiqiy sonlar, p_1, p_2, p_3 – tub sonlar, $k - 1 < k < \frac{4}{3}$ oralig‘idagi haqiqiy son.

Ushbu ishning asosiy natijasini quyidagi teorema orqali bayon qilamiz:

Teorema. Faraz qilaylik: $1 < k < \frac{4}{3}$ haqiqiy son, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ noldan farqli haqiqiy sonlar (hammasi bir xil ishoraga ega emas), $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ nisbati irratsional, ϖ ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lsin.

U holda har qanday $\varepsilon > 0$ uchun:

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2^2 + \lambda_3 p_3^k - \varpi| \le (\max_j p_j)^{\frac{4-3k}{10k}+\varepsilon}$$

tengsizlik tub son o‘zgaruvchilar p_1, p_2 va p_3 da cheksiz ko‘p yechimga ega.

Teorema isbotining asosiy g‘oyasini keltiramiz.

Davenport va Heilbronn hamda Allakov usulining modifikatsiyasini qo‘llab $\mathbb{R}$ to‘plamni uchta qismga ajratamiz:

birinchi qismni asosiy yoy yoki katta yoylar deb ataymiz va uni $\mathfrak{M} = \left[-\frac{P}{X}, \frac{P}{X}\right]$ ko‘rinishda, ikkinchi qismni kichik yoylar deb ataymiz va uni $\mathbf{m} = \left(-R, -\frac{P}{X}\right) \cup \left(\frac{P}{X}, R\right)$ ko‘rinishda hamda uchinchi qismni trivial yoylar deb atab $\mathbf{t} = \mathbb{R} \setminus (\mathfrak{M} \cup \mathbf{m})$ ko‘rinishda ajratib olamiz, bu yerda

$P = X^{5/(6k)-\varepsilon},\ R = \eta^{-2}(\log X)^{3/2},\ \eta = X^{\gamma+\varepsilon}$

Shu bilan birga ushbu belgilashlar

$$S_k(\alpha) = \sum_{\delta X \le p^k \le X} \log p \cdot e(p^k \alpha), \quad U_k(\alpha) = \sum_{\delta X \le n^k \le X} e(n^k \alpha)$$

hamda umumlashtirilgan Selberg integrali

$$J_k(X,h) = \int_X^{2X} \Big(\theta((x+h)^{1/k}) - \theta(x^{1/k}) - ((x+h)^{1/k} - x^{1/k})\Big)^2 dx$$

dan foydalanamiz.

Olingan natija Diofant yaqinlashtirish nazariyasiga muhim hissa hisoblanadi.

Adabiyotlar

1. **R. C. Vaughan.** *The Hardy-Littlewood method.* Cambridge U. P., -1997.- 170 p.
2.**B.X.Abrayev., O.A.Botiraliyeva.**O NamDU ilmiy axborotnomasi 2025–yil 7-son. 12-17 b.

UDK 511.34

O‘nta tub o‘zgaruvchili Diofant tenglamasi yechimlari haqida

Abrayev B. X.[1], Xayrullayev I.N.[2], **Xo‘jamova F.**[3],
[1,2] Iqtisodiyot va servis universiteti, Termiz,
babrayev@mail.ru, xayrullayev0809@mail.ru
[3]Termiz Davlat universiteti, Termiz, Uzbekistan; obotialiyeva@jmail.com

Kirish. Ushbu ishda kubik Diofant tenglamaning tub sonlardagi yechimlari o‘rganiladi:

$$a_1p_1^3 + a_2p_2^3 + \cdots + a_{10}p_{10}^3 = n \tag{1}$$

bu yerda, $p_1, \ldots, p_{10}$ - tub sonlar, $a_1, \ldots, a_{10}$ - noldan farqli butun sonlar, n - berilgan butun sonlar bo‘lib ulardan ushbu shartlarni qanoatlantirishi talab qilinadi:

$$(a_i, a_j) = 1 \text{ (juft-juft o‘zaro tub)}, \tag{2}$$

$$(n, a_1, \ldots, a_{10}) = 1. \tag{3}$$

Shu bilan birga qyidagilardan biri bajariladi: ba’zi j lar uchun $p_j = 2$

$$a_1 + \cdots + a_{10} \equiv n \pmod 2 \tag{4}$$

Ushbu belgilanishlarni kiritamiz $D = \max\{2, |a_j| : 1 \le j \le 10\}$, N - yetarlicha katta son $M = cN$ $(0 < c < 1)$ ([1] ga qarang).

Ishning asosiy natijalari quyidagi teoremalar yordamida bayon qilingan

1-Teorema. Agar $a_1, \ldots, a_{10}$ sonlari bir xil ishoraga ega bo‘lmasa va (2)-(4) shartlar bajarilsa, u holda:

$$p_j \ll n^{1/3} + D^{20+\varepsilon}$$

shartni qanoatlantiruvchi tub sonlarda (1) tenglama yechimga ega.

2-Teorema Agar $a_1, \ldots, a_{10}$ sonlari musbat va (2)-(4) shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda:

$$n \gg D^{61+\varepsilon}$$

bo‘lganda (1) tenglama yechimga ega.

Teoremalarni isbotlashda ushbu belgilashlardan

$$r(n) = \int_0^1 S(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$$

bu yerda:

$$S(\alpha) = S_1(\alpha)\cdots S_{10}(\alpha), \qquad S_j(\alpha) = \sum_{M<|a_j|p^3\le N} (\log p)e(a_jp^3\alpha)$$

foydalanib, Hardy-Littlewudning doiraviy usulini ([2] ga qarang) qo‘llab bajariladi.

Adabiyotlar

1.**B.X.Abrayev., F.Xo‘jamova** Varing-Goldbax tipidagi bir masala haqida. Zamonaviy matematikaning dolzarb muammolari va uning tatbiqlari, konferensiya materiallari. Toshkent-2025 .

2. **R. C. Vaughan.** *The Hardy-Littlewood method.* Cambridge U. P., -1997. 170 p.

УДК 511.345

SONLARNI BIR VAQTDA CHIZIQLI FORMALAR ORQALI IFODALASHLAR HAQIDA

I.Allakov
Termiz davlat universiteti. Termiz, O‘zbekiston;
iallakov@mail.ru

Ushbu ma’ruzada biz uchta masala bo‘yicha keyingi yillarda shogirdlarim bilan olgan natijalarni sizlarning e’tiboringizga havola qilamiz:

1). Sonlarni bir vaqtda tub o‘zgaruvchili chiziqli formalar yordamida ifodalash masalasi.

2). Berilgan sonni to‘rtta va beshta tub sonlarning kvadratlari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalashlar haqida.

3). Berilgan sonni ikkita tub son va uchunchi tub sonning kvadratlari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash masalasi.

1)-masalada

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \quad (i = \overline{1,s}) \tag{1}$$

(bunda $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_s-$natural sonlar, $a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{im}-$ butun sonlar, $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m-$ tub sonlar) sistema qaralib, $s < m \leq 2s$ bo‘lganda (1) ko‘rinishda ifodalanmaydigan $(b_1, b_2, ..., b_s)$lar soni baholangan. Berilgan $(b_1, b_2, ..., b_s)$ ni (1) ko‘rinishda ifodalanishlar soni uchun quyidan baho olingan [1], [2], [3], [4], [5], [6].

2)-masalada bir nechta Diofont tenglamalari qaralgan bo‘lib, jumladan:

a) berilgan sonni arifmetik progressiyada olingan beshta tub sonlarning kvadratlari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash soni uchun birinchi marta quyidan baho olingan [7].

b) berilgan sonni arifmetik progressiyadan olingan beshta tub sonlarning kvadratlarini chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalash soni uchun birinchi marta quyidan baho olingan [8],[9].

c) berilgan sonni to‘rtta tub sonlarning kvadratlari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash masalasining maxsus to‘plami uchun baho yaxshilangan va ifodalashlar soni uchun birinchi marta quyidan baho olingan [10].

d) berilgan sonni arifmetik progressiyada olingan to‘rtta tub sonlarning kvadratlari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalashlar masalasi qaralgan, masalasning maxsus to‘plami uchun yangi baho isbotlangan va ifodalashlar soni uchun quyidan baho olingan [11].

3)-masalada dastalab, sonni ikkita tub son va uchinchi tub sonning kvadratlari yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlanishi isbotlangan va ifodalashlar soni uchun quyidan baho olingan [12]. Shuningdek, ixtiyoriy sonni arifmetik progressiyadan olingan ikkita tub son va uchinchi tub sonning kvadratlari yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlanishi isbotlangan va ifodalashlar soni uchun quyidan baho olingan [13].

Foydanilgan adabiyotlar ro‘yhati

1. **Wu Fang.** *On the solutions of the systems of linear equations with prime variables* // Acta Mathematica Sinica. Vol. 7. pp. 102-121. (1957).

2. **Аллаков И.** *Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах.* // Изв. ВУЗов. Матем., № 9, с. 10-16. (2006).

3. **Аллаков И., Абраев Б.Х.** *Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами.* // Чебышевский сборник Том. 24. № 2 с. 15-37. (2023).

4. **Аллаков И., Абраев Б.Х.** *О разрешимости одной системы линейных уравнений с*

целыми коэффициентами в простых числах. // Бюллетень Института математики. Том. 5, № 6, с. 37-49. (2022).
5. **Аллаков И., Эрдонов Б.Х.** *Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел.* // Чебышевский сборник. Том 25, № 3. с. 11-36. (2024).
6. **Allakov I. Erdonov B. Kh.** *On the solution of a system of linear diophantine equations in prime numbers.* // Uzbek Mathematical journal. Vol. 69. № 1. pp. 14-26. (2025).
7. **Имамов О.Ш.** *О количестве представлений натурального числа в виде суммы пяти квадратов простых чисел из арифметической прогрессии.*// Научный вестник НамГУ, № 4. с. 78-83. (2024).
8. **Аллаков И., Имамов О.Ш.** *О числах, представимых в виде суммы пяти квадратов простых чисел, из арифметической прогрессии.* //Научный вестник СамГУ, № 3. с. 113-119. (2024).
9. **Allakov I., Imamov O.** *A lower estimate for the quantity of a natural number represented as a sum of five squared prime numbers from an arithmetic progression.* // Bull. Inst. Math. V 7, № 4, pp. 86-93. (2024).
10. **Imamov O.** *О решении одного уравнения в простых числах .* // Samarkand University Scientific Bulletin, № 1, pp. 106-110. (2025).
11. **Аллаков И., Имамов О.Ш.** *О представлении чисел в виде суммы квадратов четырёх простых из арифметической прогрессии.* Материалы международной научной конференции “Современные проблемы математики и её приложения”, посвящённой 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича и 75-летию доктора физико-математических наук, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А.Джураева НАНТ, профессора Джангибекова Гулходжи. Душанбе, 30-31 мая 2025 г.
12. **Аллаков И., Музропова, Н.С.** *О решении одного уравнения в простых числах.* // Чебышевский сборник, т. 25, вып. 4, с. 5–26. (2024).
13. **Аллаков И., Имамов О.Ш.** *О представлении чисел в виде суммы двух простых чисел и квадрата третьего простого числа из арифметической прогрессии.* Zamonaviy matematikaning dolzarb muammolari va uning tatbiqlari. Akademik T.A.Sarimsoqov tavalludining 110 yilligiga bag‘ishlangan xorijiy olimlar ishtirokidagi respublika miqyosidagi ilmiy anjuman tezislari to‘plami. Toshkent 10-11-sentyabr, 2025 yil.

UDC 512.58

On Nakayama Automorphisms of Commutative Frobenius Algebras

Asrorov D.U.
Samarqand State University, Samarqand, Uzbekistan
96Asrorovdiorjon@mail.ru

Frobenius algebras are a fundamental concept in modern mathematics, arising in algebra, topology, representation theory, and mathematical physics, particularly in the study of quantum field theory and category theory. They were first systematically studied in the 1930s by Richard Brauer and Cecil Nesbitt, following the pioneering work of Ferdinand Georg Frobenius. The importance of Frobenius algebras lies in the interplay between algebraic and linear structures, which allow for powerful classification results and applications to geometry and physics. In this paper, we focus on the Nakayama automorphism associated with commutative Frobenius algebras, a construction that measures the asymmetry of the Frobenius bilinear form.

A Frobenius algebra is a vector space $\mathbb{V}$ equipped with:

1) An associative unital algebra structure $\mathbb{A} = (\mathbb{V}, \mu, 1)$, where $\mu : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ represents the multiplication and 1 is the unit element.

2) A nondegenerate bilinear form $\sigma : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{F}$, which satisfies the Frobenius property, namely:

$$\sigma(\mu(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{z}) = \sigma(\mathrm{x}, \mu(\mathrm{y}, \mathrm{z})) \text{ for all } \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{V}.$$

The bilinear form σ is called the Frobenius form of the algebra $\mathbb{A}$.

Definition. A pair $(\mathbb{A}, \sigma)$, where $\mathbb{A}$ is a finite-dimensional and $\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{F}$ is a nondegenerate bilinear form, is said to be a commutative Frobenius algebra if $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ for all $x, y \in \mathbb{A}$, i.e., σ is symmetric.

This definition, used for instance in the classification results of D.Asrorov, U.Bekbaev and I. Rakhimov for On complete classification of two-dimensional commutative Frobenius algebras, highlights the deep interaction between the linear and algebraic structures. Associated with such a Frobenius algebra, one can define the Nakayama automorphism. Given a Frobenius form σ, the Nakayama automorphism $\mu : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ is characterized by $\sigma(xy) = \sigma(y\mu(x))$, $\forall x, y \in \mathbb{A}$. As established by Nakayama and later studied by Farnsteiner, this automorphism is unique up to inner automorphism and reflects the asymmetry of the Frobenius form.

Theorem. Let $\mathbb{A}$ be a finite-dimensional commutative Frobenius algebra over a field $\mathbb{F}$. If the Frobenius form σ is symmetric, then the Nakayama automorphism μ is the identity, i.e. $\mu = id$

Proof. Since $\mathbb{A}$ is commutative, $xy = yx$ for all $x, y \in \mathbb{A}$. If σ is symmetric, then

$$\sigma(xy) = \sigma(yx).$$

By the definition of the Nakayama automorphism,

$$\sigma(xy) = \sigma(y\mu(x)).$$

Hence $\sigma(y\mu(x)) = \sigma(yx)$ for all $y \in \mathbb{A}$. Because σ is non-degenerate, this implies $\mu(x) = x$ for all $x \in \mathbb{A}$. Therefore,$\mu = id$.

Discussion and Applications This observation is significant in the broader classification of commutative Frobenius algebras. For many two-dimensional cases studied in the literature, symmetric Frobenius forms appear naturally, which implies that the Nakayama automorphism does not introduce additional algebraic complexity. On the other hand, in cases where the Frobenius form is not symmetric, the Nakayama automorphism provides valuable information about the structural asymmetry of the algebra. This dual role makes it a central tool for studying the interplay between associative algebra structures and bilinear forms in representation theory and algebraic geometry. Conclusion In this paper we have outlined the definition of commutative Frobenius algebras and the associated Nakayama automorphism. We proved that in the symmetric case the Nakayama automorphism is trivial, which simplifies classification efforts. These results highlight the role of Nakayama automorphisms in understanding algebraic structures and their applications in modern mathematics. Further directions include the study of higher-dimensional commutative Frobenius algebras and their connections to topological field theory and categorical algebra.

LITERATURE

1. **R. Farnsteiner.** *Frobenius Algebras.* Progress in Mathematics, vol. 272, Birkhauser, 2009.
2. **U. Bekbaev.** *Classification of two-dimensional algebras over any basic field.* AIP Conference Proceedings, 2023, 2880.
3. **T. Nakayama.** *On Frobenius algebras.* Ann. of Math., 1940.

УДК 512.55

On Inner RJ- and BJ-Algebras

Arzikulov F. N.[1,2], Khakimov U.I.[2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,; arzikulovfn@rambler.ru
[2]Andijan State University, Andijan, Uzbekistan khakimov_u@inbox.ru

The present paper is devoted to the classification problem of inner RJ- and BJ-algebras. Inner RJ-algebras and inner BJ-algebras were introduced and studied in the papers [2], [1] and [3]. An inner RJ-algebra (inner BJ-algebra) is defined as follows: a Jordan algebra $\mathcal{J}$ is called an inner RJ-algebra (respectively an inner BJ-algebra) if, for each element $a \in \mathcal{J}^2$ (respectively subset $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{J}^2$), there exists an idempotent $e \in \mathcal{J}$ such that ${}^{\perp_q}\{x\} \cap \mathcal{J}^2 = U_e(\mathcal{J}) \cap \mathcal{J}^2$ (respectively ${}^{\perp_q}\mathcal{S} \cap \mathcal{J}^2 = U_e(\mathcal{J}) \cap \mathcal{J}^2$), where $U_e(x) = 2(e \circ x) \circ e - e^2 \circ x$, $\mathcal{J}^2 := \{a^2 : a \in \mathcal{J}\}$, for each nonempty subset $\mathcal{S}$ of a Jordan algebra $\mathcal{J}$, the (inner) quadratic annihilator of $\mathcal{S}$ is defined by

$$^{\perp_q}\mathcal{S} := \{a \in \mathcal{J} : U_s a = 0 \text{ for all } s \in \mathcal{S}\}.$$

Inner RJ- and BJ-algebras are also mentioned in [5].

$\mathcal{J}$ is an inner BJ-algebra if, and only if, it is an inner RJ-algebra and the set of all idempotents of $\mathcal{J}$ is a complete lattice (cf. [2,Theorem 3.5]).

In the paper [3] the authors of the present paper studied inner RJ- and BJ-algebras and proved that a nilpotent Jordan algebra which has no square root nilpotent elements is an inner RJ-algebra, and a nilpotent Jordan algebra that has no nilpotent elements with a square root b such that $b^3 \neq 0$ is not an inner RJ-algebra if there exists a nonzero element a such that $a^2 \neq 0$.

In the present paper corrected versions of the wrong statements in the paper "Description of finite-dimensional inner Rickart and Baer Jordan algebras"by F.N. Arzikulov and U.I. Khakimov are given. In particular, it is shown that, for any Jordan algebra $\mathcal{J}$ with an idempotent p and an associative degenerate radical $\mathcal{D}$ such that $\mathcal{J} = \mathbb{F}p\dot{+}\mathcal{D}$, $\mathcal{J}$ is an inner RJ-algebra if and only if, for any nonzero $a \in \mathcal{D}$, $a^2 = 0$ and $p(pa) = pa$. It should be noted that these and all other statements of the paper [3] are valid for so-called almost inner RJ- and BJ-algebras.

Also, equivalent conditions when a Jordan algebra $\mathcal{J}$ is an inner RJ-algebra are given. As for finite-dimensional nilpotent Jordan algebras, there is not a nilpotent inner RJ-algebra (and hence inner BJ-algebra) except the finite-dimensional Jordan algebra the square of each element of which is zero.

The present paper is taken from [2] and [3]. Let $\mathcal{J}$ be a Jordan algebra, S be an arbitrary subset of $\mathcal{J}$ and, let

$$\mathcal{J}^2 = \{a^2 : a \in \mathcal{J}\},\ ^{\perp_q}S := \{x \in \mathcal{J} : U_a x = 0, (\forall a \in S)\}.$$

Then, for a Jordan algebra $\mathcal{J}$, we consider the following condition:

(A) for every element $x \in \mathcal{J}$, there exists an idempotent $e \in \mathcal{J}$ such that

$$^{\perp_q}\{x\} \cap \mathcal{J}^2 = U_e(\mathcal{J}) \cap \mathcal{J}^2.$$

Definition. A Jordan algebra satisfying condition (A) is called an inner RJ-algebra, and condition (A) itself is called inner Rickart condition.

Theorem 1. Let $\mathcal{J}$ be an indecomposable finite-dimensional inner RJ-algebra over the real numbers $\mathbb{F}$ with a two-dimensional semisimple subalgebra $\mathcal{S}$ and an n-dimensional associative nilpotent radical $\mathcal{N}$ such that $\mathcal{J} = \mathcal{S}\dot{+}\mathcal{N}$. Then there exist two mutually orthogonal nonzero

idempotents p_1, $p_2 \in \mathcal{J}$ such that $\mathcal{J} = (\mathbb{F}p_1 \oplus \mathbb{F}p_2)\dot{+}\mathcal{N}$ and, for any basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ of $\mathcal{N}$, the following conditions hold

$$e_i e_j = 0,\ i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

$$(p_1 + p_2)((p_1 + p_2)e_i) = (p_1 + p_2)e_i, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

$$(p_1 + p_2)(p_k e_i) = p_k e_i, i = 1, 2, \ldots, n, k = 1, 2, \tag{1.3}$$

$$p_2(p_2 e_i) = p_2 e_i, p_1(p_1 e_i) = p_1 e_i, i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.4}$$

Conversely, any Jordan algebra $\mathcal{J}$ over a field $\mathbb{F}$ of characteristic $\neq 2$ and $\neq 3$ with a two-dimensional semi-simple subalgebra $\mathcal{S} = \mathbb{F}p_1 \oplus \mathbb{F}p_2$, where p_1, p_2 are mutually orthogonal idempotents, and an n-dimensional associative nilpotent radical $\mathcal{N}$ with a basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ such that $\mathcal{J} = \mathcal{S}\dot{+}\mathcal{N}$, is an almost inner RJ-algebra if conditions (1.1)–(1.4) are valid.

Example 1. The straightforward checking of the conditions (1.1)–(1.5) from Theorem 1 shows that the Jordan algebra $\mathcal{T}_{10}$ [4]satisfies these conditions, i.e.,

$\mathcal{T}_{10}$

$$\begin{cases} e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, \\ e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, e_2 n_1 = \frac{1}{2} n_1. \end{cases}$$

is an inner RJ-algebra.

References

1. **Ayupov, Sh.A., Arzikulov, F.N.** *Jordan counterparts of Rickart and Baer $*$-algebras.* Uzbek. Mat. Zh.(2016) 1:13–3.
2. **Ayupov, Sh.A., Arzikulov, F.N.** *Jordan counterparts of Rickart and Baer $*$-algebras, II.* S̃ao Paulo J. Math. Sci.(2019) 13:27—38.
3. **Arzikulov, F.N., Khakimov, U.I.** *Description of finite-dimensional inner Rickart and Baer Jordan algebras.*(2023) Comm. Algebra. 51:6, 2501–2509.
4. **Kashuba, I., Martin, M.E.** *Deformations of Jordan algebras of dimension four.*(2014) J. Algebra. 399:277–289.
5. **McCrimmon, K.** *A test of Jordan algebras.*(2004) Springer, p. 562.

GENERAL JACOBI-JORDAN ALGEBRAS ASSOCIATED WITH A 5-DIMENSIONAL JACOBI-JORDAN ALGEBRA HAVING A 3-DIMENSIONAL DERIVED IDEAL

Begamov S.N.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
sirojiddinbegamov1123@gmail.com

The notion of Jacobi-Jordan algebras was introduced in [3] as a class of commutative algebras that satisfy the Jacobi identity. These algebras form a special subclass of Jordan nilalgebras and are also closely related to Bernstein-Jordan algebras.

The concept of general Jacobi-Jordan algebras was introduced in [1] as flexible algebras satisfying the identity $J(x, y, y) = 0$ for any $x, y \in J$, where

$$J(x, y, z) = x(yz) + y(zx) + z(xy).$$

A classification method for general Jacobi-Jordan algebras, analogous to that used for Poisson algebras [2], was also presented in [1]. In this work, we provide a description of the general Jacobi-Jordan algebras of dimension 5 whose underlying Jacobi-Jordan algebra has a 3-dimensional derived ideal.

Definition 1. An algebra $\mathcal{A}$ over a field $\mathbb{K}$ is called *Jacobi-Jordan* algebra if it satisfies the following two identities:

$$x \circ y = y \circ x, \quad x \circ (y \circ z) + y \circ (z \circ x) + z \circ (x \circ y) = 0,$$

for all $x, y, z \in A$.

Definition 2. An algebra $(J, \cdot)$ is said *general Jacobi-Jordan algebra* if it satisfies the following two identities:

$$(x \cdot y) \cdot x - x \cdot (y \cdot x) = 0,$$

$$x \cdot y^2 + y \cdot (y \cdot x) + y \cdot (x \cdot y) = 0,$$

for all $x, y \in J$.

Let $(\mathcal{A}, \circ)$ be a Jacobi-Jordan algebra and let $Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ be the set of all skew-symmetric bilinear maps $\theta : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ such that

$$\theta(x \circ y, z) - \theta(x, z) \circ y - x \circ \theta(y, z) = 0, \quad x, y, z \in \mathcal{A}.$$

Consider in the underlying vector space $\mathcal{A}$ the product given as

$$x \cdot_\theta y := x \circ y + \theta(x, y)$$

for any $x, y \in \mathcal{A}$. Then, $(\mathcal{A}, \cdot_\theta)$ is a general Jacobi-Jordan algebra [1].

Now, let $Aut(\mathcal{A})$ be the automorphism group of $\mathcal{A}$ with respect to the product $\circ$. Then $Aut(\mathcal{A})$ acts on $Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ by

$$(\theta * \phi)(x, y) := \phi^{-1}(\theta(\phi(x), \phi(y))),$$

where $\phi \in Aut(\mathcal{A})$ and $\theta \in Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, for any $x, y \in \mathcal{A}$.

Lemma 1. [1] *Let $(\mathcal{A}, \circ)$ be a Jacobi-Jordan algebra and $\theta, \vartheta \in Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$. Then the general Jacobi-Jordan algebras $(\mathcal{A}, \cdot_\theta)$ and $(\mathcal{A}, \cdot_\vartheta)$ are isomorphic if and only if there exists $\phi \in Aut(\mathcal{A})$ satisfying $\theta * \phi = \vartheta$.*

It is known that any indecomposable associative Jacobi-Jordan algebra of dimension 5 with a 3-dimensional derived ideal over an algebraically closed field of characteristic not 2 or 3 is isomorphic to exactly one of the following algebras, which are defined on the basis e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 by the products below:

$$\mathcal{A}_5 : e_1 \cdot e_1 = e_2, \qquad e_1 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = e_5, \qquad e_3 \cdot e_3 = e_4.$$

Lemma 2. Any element of $Z^2(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_5)$ has the following form:

$$\begin{aligned}
&\theta(e_1, e_3) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, && \theta(e_1, e_4) = 2\alpha_3 e_4 + 2\alpha_1 e_5,\\
&\theta(e_1, e_5) = \alpha_1 e_2 + \alpha_3 e_5, && \theta(e_2, e_3) = 2\alpha_1 e_2 + 2\alpha_3 e_5,\\
&\theta(e_3, e_5) = -\alpha_3 e_4 - \alpha_1 e_5.
\end{aligned}$$

In the following theorem, we give the classification of 5-dimensional general Jacobi-Jordan algebras whose underlying Jacobi-Jordan algebra has a 3-dimensional derived ideal.

Theorem. Let $\mathcal{J}$ be a general Jacobi-Jordan algebra of dimension 5 such that $\mathcal{J}^+$ is an indecomposable associative Jacobi-Jordan algebra with a 3-dimensional derived ideal $\mathcal{A}_5$. Then $\mathcal{J}$ is isomorphic to one of the following algebras:

$$\mathcal{J}_1^{\alpha}: \quad e_1 \circ e_1 = e_2, \quad e_1 \circ e_3 = (1+\alpha)e_5, \quad e_3 \circ e_3 = e_4, \quad e_3 \circ e_1 = (1-\alpha)e_5,$$

$$\mathcal{J}_2: \quad e_1 \circ e_1 = e_2, \quad e_1 \circ e_3 = e_5 + e_4, \quad e_3 \circ e_3 = e_4, \quad e_3 \circ e_1 = e_5 - e_4,$$

$$\mathcal{J}_3: \quad e_1 \circ e_1 = e_2, \quad e_1 \circ e_3 = e_5 + e_2, \quad e_3 \circ e_3 = e_4, \quad e_3 \circ e_1 = e_5 - e_2,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_4: \quad & e_1 \circ e_1 = e_2, \quad e_1 \circ e_3 = e_5 + e_3, \quad e_1 \circ e_4 = 2e_4 \\ & e_3 \circ e_3 = e_4, \quad e_3 \circ e_1 = e_5 - e_3, \quad e_4 \circ e_1 = -2e_4, \\ & e_1 \circ e_5 = e_5, \quad e_2 \circ e_3 = 2e_5, \quad e_3 \circ e_5 = -e_4, \\ & e_5 \circ e_1 = -e_5, \quad e_3 \circ e_2 = -2e_5, \quad e_5 \circ e_3 = e_4.\end{aligned}$$

REFERENCES

1. **Abdelwahab H., Abdo N.F., Barreiro E., Sánchez J.M.** *On Generalizations of Jacobi-Jordan Algebras*, Axioms, 2024, 13, 787.
2. **Abdelwahab H. Ouaridi A.F., González C.M.** *Degenerations of Poisson algebras*,Journal Algebra Appl., 2025, 24 (3), 2550087.
3. **Burde D., Fialowski A.***Jacobi-Jordan algebras*, Linear Algebra Appl., 2014, 459, 586-594.

UDK 511.348

On the Simultaneous Representations of Natural Numbers by Integers and Prime Numbers

Erdonov B.Kh.
Termez University of Economics and Service, Termez
bekmurod.erdonov@mail.ru

After the well-known works of I. M. Vinogradov [1] on representing numbers as the sum of three prime numbers, Hua Loo-Keng [2] formulated several problems concerning the representation of numbers as sums of prime numbers. In particular, he posed the following question: "Can the system of equations

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}p_j = b_i, \quad (1 \le i \le n)$$

have a solution in prime numbers, where $b_1, \ldots, b_n$−are natural numbers, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i,n+1}$ are integers, while $p_1, \ldots, p_{n+1}$ are prime numbers? This problem might be positively resolved under certain “order” and “congruence” conditions. However, at present, a complete solution to this problem lies beyond the reach of mathematics. Nevertheless, it is noted that the given system has a solution for almost all b_i satisfying specific congruence conditions.

Moreover, the system of equations

$$\sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij}p_j = b_i, \quad (1 \le i \le n)$$

is solvable for large b_i if certain order and congruence conditions are fulfilled".

This problem can be restated as the problem of representing natural numbers b_i by means of integers a_{ij} and prime numbers p_j in the following form:

$$b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_j, \quad \left(i = \overline{1,s}; \quad m > s\right). \tag{1}$$

Here, two related questions can be considered:

1) Is it possible to represent all natural numbers $b_1, b_2, ..., b_s$ in the form (1)?

2) For given natural numbers $b_1, b_2, ..., b_s$ representable in the form (1), how can one estimate the number of solutions of system (1)?

Initially, Wu Fang [3] studied system (1) in the case $m \geq 2s+1$ and showed, under certain additional conditions, that all b_i can be represented in the form (1). Moreover, he obtained an asymptotic formula for the number of solutions of this system.

Later, M. C. Liu and K. M. Tsang [4] investigated system (1) for the case $s = 2$ and $m = 3$, and proved that not all pairs (b_1, b_2) can be represented in the form (1). They also gave an upper bound for the number of such pairs (b_1, b_2) that cannot be represented in the form (1).

I. Allakov [5][6] considered system (1) in the case $s = n$ and $m = n+1$, and proved that, with some exceptions, the considered system has a solution and provided a lower bound for the number of solutions. Thus, the first problem formulated by Hua Loo-Keng was solved, up to certain exceptions.

The solvability of system (1) depends on the following two conditions formulated by Hua Loo-Keng [2]:

(a) For any prime p, the pair of simultaneous congruence equations

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \ldots + a_{im}l_m \equiv b_i \,(mod p), \quad (i = 1, \ldots, s)$$

is satisfied by some integers $l_1, \ldots, l_m$ with $1 \leq l_1, \ldots, l_m \leq p-1$

(b) For some positive real numbers $y_1, y_2, \ldots, y_m$,

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{im}y_m = b_i, \text{ holds for } i = 1, 2, ..., s.$$

We denote by $W_{s,m}(X)$ the set of vectors $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $1 \leq b_1, b_2, \ldots, b_s \leq X$ that satisfy conditions (a), (b) and $B = max\{3|a_{ij}|\}$, where X is a sufficiently large real number.

For system (1), in the cases $s = n$ and $m = n+k$ with $1 \leq k \leq n$, the following theorems hold.

Theorem 1. *Then there exist effective absolute constants A and ε such that, whenever $X \geq B^A$*

$$card\{\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in W_{n,n+k}(X) : \ \vec{b} \text{ is not representable in the form (1)}\} \ll X^{n-\varepsilon}.$$

Theorem 2. *Let $R\left(\vec{b}\right)$ denote the number of solutions in prime numbers $p_j \leq N$ of system (1) for a given vector $(b_1, ..., b_n)$. Then, for all vectors $(b_1, ..., b_n)$ with $1 \leq b_1, ..., b_n \leq X$, except for at most $X^{n-\varepsilon}$ values, the following estimate holds:*

$$R\left(\vec{b}\right) \gg \mathcal{K}^{k-\varepsilon}(\ln \mathcal{K})^{-n-k},$$

where $\mathcal{K} = 3(n!)^2 B^{2n-1} \left|\vec{b}\right| (\sqrt{n})^{-1}$, $N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X$.

Refernces

1. **Виноградов И.М.** *Новый метод в аналитической теории чисел.* Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 10, 1937, с. 1-122.
2. **Хуа Ло-Кен.** *Аддитивная теория простых чисел.* Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1947. Том 22, с. 3-179.
3. **Wu Fang.** *On the solutions of the systems of linear equations with prime variables.* Acta Mathematica Sinica. 1957. Vol. 7. pp. 102-121.
4. **Liu M. C. and Tsang K. M.** *On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach's problem.* Journal fur die reine und angewandte Mathematik. 1989. Vol. 399. pp. 109-136.
5. **Аллаков И.** *Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах.* Изв. ВУЗов. Матем., 2006. № 9, с. 10-16.
6. **Аллаков И.** *Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел.* Издательства "Сурхан нашр", Термиз. 2021. 180 с.

MSC 15A.80

On the solution of a system of three max-plus linear equations in three variables

Eshimbetov M. R.[1], Eshimbetov J. R.[2], Ashurova N. A.[3]

[1] Tashkent International University of Financial Management and Technologies, Tashkent, Uzbekistan and Chirchik State Pedagogical University, Chirchik, Tashkent Region, Uzbekistan; mr.eshimbetov@gmail.com

[2] Tashkent University of Human Sciences, Republic of Karakalpakstan, Uzbekistan; eshimbetovjurabek@gmail.com

[3]Tashkent International University of Financial Management and Technologies, Tashkent, Uzbekistan; nashurova881@gmail.com

The max-plus algebra is an algebraic structure consisting of real numbers where the standard operations of addition and multiplication are replaced by the operation of taking a maximum and the operation of standard addition, respectively. More precisely, let $\mathbb{R}_{\max}$ denote the set $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, let $\oplus$ be a binary operator on $\mathbb{R}_{\max}$ with $x \oplus y = \max\{x, y\}$, and let $\odot$ be the binary operator on $\mathbb{R}_{\max}$ with $x \odot y = x + y$. The resulting algebraic structure $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \odot)$ is called a *max-plus semi-field* or simply a *max-plus algebra*. $\mathbb{R}_{\max}$ is also called a commutative idempotent semiring or a dioid. In max-plus algebra $\varepsilon = -\infty$ is the additive identity: $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$, for each $x \in \mathbb{R}_{\max}$ and the multiplicative identity is $e = 0$: $x \odot e = e \odot x = x$, for all $x \in \mathbb{R}_{\max}$ [1].

Let $n \in \mathbb{R}$. The nth max-plus algebraic power of $x \in \mathbb{R}$ is denoted by $x^{\odot^n}$ and corresponds to nx in conventional algebra. If $x \in \mathbb{R}$ then $x^{\odot^0} = 0$ and the inverse element of x written $\odot$ is $x^{\odot^{-1}} = -x$. There is no inverse element for ε written $\odot$ since ε is absorbing for $\odot$. If $n > 0$ then $\varepsilon^{\odot^n} = \varepsilon$. If $n < 0$ then $\varepsilon^{\odot^n}$ is not defined [2], [3], [4].

The max-plus algebraic division operation is defined as follows:

$$\text{if } x,\, y \in \mathbb{R}_{\max} \text{ and } y \neq \varepsilon, \text{ then } \tfrac{x}{y} = x \odot y^{\odot^{-1}} = x \odot (-y).$$

If y is equal to ε then the max-plus algebraic division is not defined.

In [4], we studied how to determine the solution set of the system

$$\begin{cases} a_{11} \odot x \oplus a_{12} \odot y = b_1, \\ a_{21} \odot x \oplus a_{22} \odot y = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

by applying the Theorem 1 stated below.

We denote:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \triangle_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Theorem 1. [4] Let $\triangle \neq \varepsilon$.

1) If $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$, then the solution system (1) consists of the pairs (x, v) here

$$x = \tfrac{\triangle_x}{\triangle} \text{ and } v \in \{s \in \mathbb{R}_{\max} \colon s \leq \tfrac{\triangle_y}{\triangle}\};$$

2) If $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$, then the solution system (1) consists of the pairs (u, y) here

$$u \in \{t \in \mathbb{R}_{\max} \colon t \leq \tfrac{\triangle_x}{\triangle}\} \text{ and } y = \tfrac{\triangle_y}{\triangle};$$

3) If $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$, then the solution system (1) consists of the pairs (u, v) here

$$x = \tfrac{\triangle_x}{\triangle},\ v \in \{s \in \mathbb{R}_{\max} \colon s \leq \tfrac{\triangle_y}{\triangle}\} \text{ and } u \in \{t \in \mathbb{R}_{\max} \colon t \leq \tfrac{\triangle_x}{\triangle}\},\ y = \tfrac{\triangle_y}{\triangle};$$

4) If $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$, then the system (1) has no solution;

5) If $\frac{a_{12}}{a_{22}} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{11}}{a_{21}}$ or $\frac{a_{11}}{a_{21}} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{12}}{a_{22}}$, then the system (1) consists of a unique root (x, y) with

$$x = \tfrac{\triangle_x}{\triangle} \text{ and } y = \tfrac{\triangle_y}{\triangle};$$

6) If $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$ and both of inequalities in 5) do not hold, then the system (1) has no solution.

Let us be given the following max-plus linear system:

$$\begin{cases} a_{11} \odot x \oplus a_{12} \odot y \oplus a_{13} \odot z = b_1, \\ a_{21} \odot x \oplus a_{22} \odot y \oplus a_{23} \odot z = b_2, \\ a_{31} \odot x \oplus a_{32} \odot y \oplus a_{33} \odot z = b_3. \end{cases} \tag{2}$$

Assume that $a_{11} \neq \varepsilon$. In this case, we divide the first equation of the system by a_{11} and denote the resulting new coefficients by a'_{12}, a'_{13}. Similarly, if $a_{21} \neq \varepsilon$ and $a_{31} \neq \varepsilon$, then we divide the second and third equations of the system by a_{21} and a_{31}, respectively, and denote the resulting new coefficients by a'_{22}, a'_{23} and a'_{32}, a'_{33}, respectively. As a result, we obtain system (3), which is equivalent to system (2):

$$\begin{cases} x \oplus a'_{12} \odot y \oplus a'_{13} \odot z = b'_1, \\ x \oplus a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z = b'_2, \\ x \oplus a'_{32} \odot y \oplus a'_{33} \odot z = b'_3. \end{cases} \tag{3}$$

We now construct the following systems based on system (3):

$$\begin{cases} a'_{12} \odot y \oplus a'_{13} \odot z = b'_1, \\ a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z = b'_2, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z = b'_2, \\ a'_{32} \odot y \oplus a'_{33} \odot z = b'_3. \end{cases} \tag{5}$$

We denote the solution sets of systems (4) and (5) by W_1 and W_2, respectively.

Theorem 2. If systems (4) and (5) have solutions, then system (3) also has a solution and the solution set of system (3) is given as follows:

$$W = \{(x, y, z) \colon x \leq \min\{b_1', b_2', b_3'\}, (y, z) \in W_1 \cap W_2\}.$$

References

1. **Gunawardena J.** *"Idempotency"*, Publ. of the Newton Institute, Cambridge University Press, Cambridge, Vol. 11 (1998).
2. **Sennosuke W., Akiko F., Etsuo S., Iwao S.** *"A walk on max-plus algebra"*, Linear Algebra and its Applications, 598, pp. 29–48 (2020).
3. **Yonggu K., Hyun-Hee Sh.** *"An overview of max-plus linear systems"*, Honam Math. J., 33, No. 1, pp. 93–113 (2011).
4. **Eshimbetov M., Eshimbetov J., Abduraimov Y.** *"On solution of systems of max-plus linear equations"*, Bul. Ins. Math., Vol. 8, No 2, pp. 24–35 (2025).

UDC 512.556.5

Some properties of double derivations of 3-Lie superalgebras

Gaybullaev R. K.[1], Nurilloyeva A. X.[2]
[1,2]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
[1]r.gaybullaev@nuu.uz, [2]anoranurillayeva1@gmail.com

Double derivations of n-Lie algebras are introduced in [1], these derivations are similar to the triple derivations of Lie algebras to some extent (see [2]). In this thesis, we consider some properties of double derivations of 3-Lie superalgebras.

Definition 1. [3] A $\mathbb{Z}_2$-graded vector space $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ is called an 3-*Lie superalgebra of parity* α if there exists a multilinear map $[\cdot, \ldots, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ such that

$$|[x_1, x_2, x_3]| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \alpha, \tag{1}$$

$$[x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_3] = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}[x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_3]$$

$$[x_1, x_2, [y_1, y_2, y_3]] = (-1)^{\alpha(|x_1|+|x_2|)}\Big((-1)^{(|x_1|+|x_2|)(|y_1|+|y_2|)}\Big\{[[x_1, x_2, y_1], y_2, y_3]+$$
$$[y_1, [x_1, x_2, y_2], y_3] + [y_1, y_2, [x_1, x_2, y_3]]\Big\}\Big)$$

where $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ and $|x| \in \mathbb{Z}_2$ denotes the degree of a homogeneous element $x \in \mathfrak{g}$.

Definition 2.[4] A derivation of an 3-Lie superalgebra $\mathfrak{g}$ is a linear map $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ such that

$$D[x_1, x_2, x_3] = (-1)^{|D|(|x_1|+|x_2|}\Big([D(x_1), x_2, x_3] + [x_1, D(x_2), x_3] + [x_1, x_2, D(x_3)]\Big)$$

for $x_i \in \mathfrak{g}(i = 1, 2, 3)$.

We denote by $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ the set of derivations of the 3-Lie superalgebra $\mathfrak{g}$. For $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, we define the map

$$\mathrm{ad}(x_1, x_2) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad \text{by} \quad \mathrm{ad}(x_1, x_2)(x_3) = [x_1, x_2, x_3] \quad \forall x_i \in \mathfrak{g}.$$

One sees that $\mathrm{ad}(x_1, x_2)$ is a derivation which we call an *inner derivation*. The set of all finite linear combinations of inner derivations is an ideal of $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ and is denoted by $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

For subspaces B_1, B_2, B_3 of an 3-Lie superalgebra $\mathfrak{g}$, the symbol $[B_1, B_2, B_3]$ denotes the subspace spanned by vectors $[x_1, x_2, x_3]$ for any $x_i \in B_i$, where $1 \leq i \leq 3$.

The algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ is called the *derived algebra* of $\mathfrak{g}$ and is denoted by $\mathfrak{g}^1$. If $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, then $\mathfrak{g}$ is called a *perfect 3-Lie superalgebra*.

Definition 3. Let $\mathfrak{g}$ be an 3-Lie superalgebra over a field $\mathbb{F}$. A linear map $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ is called a *double derivation* of $\mathfrak{g}$ if it satisfies the following identity:

$$D([x_1, x_2, [y_1, y_2, y_3]]) = (-1)^{|D|(|x_1|+|x_2|)}\Big\{[D(x_1), x_2, [y_1, y_2, y_3]] + [x_1, D(x_2), [y_1, y_2, y_3]]\Big\}+$$
$$+(-1)^{|D|(|x_1|+|x_2|+|y_1|+|y_2|)}\Big\{[x_1, x_2, [D(y_1), y_2, y_3]] + [x_1, x_2, [y_1, D(y_2), y_3]] + [x_1, x_2, [y_1, y_2, D(y_3)]]\Big\}$$

for all $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \in \mathfrak{g}$.

The vector space spanned by double derivations is denoted by $D(\mathfrak{g})$. In the following, we describe some properties of 3-Lie superalgebras.

Proposition. Let $\mathfrak{g}$ be an 3-Lie superalgebra over a field $\mathbb{F}$. Then $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq D(\mathfrak{g})$.

Theorem 1. For any $D_1, D_2 \in D(\mathfrak{g})$, one has $[D_1, D_2] \in D(\mathfrak{g})$, i.e., the algebra $D(\mathfrak{g})$ is a subalgebra of the general linear Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Theorem 2. If $\mathfrak{g}$ is a perfect 3-Lie superalgebra, then $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ is an ideal of the Lie superalgebra $D(\mathfrak{g})$.

Literature

1. **R. Bai, Y. Gao, Y. Zhang, Z. Li**, *Double derivations of n-Lie algebras*, Bull. Iranian Math. Soc. 3 (2017) 897-910.
2. **J. Zhou,** *Triple derivations of perfect Lie algebras,*, Comm. Algebra 41 (2013) 1647-1654.
3. **N. Cantarini, V. Kac,** *Classification of simple linearly compact n-Lie superalgebras,* Comm. Math. Phys. 298 (2010) 833-853.
4. **B.L. Guan, L.Y. Chen, Y. Ma,** *On the deformations and derivations of n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie superalgebras,* Adv. Math. Phys. (2014) Art. ID 381683, 9 pp.

УДК 511.345

Egizak tub sonlar haqida

Mardonova G. O‘.
Termiz Davlat Universiteti, Termiz, O‘zbekiston;
mardonovag03@gmail.com

Sonlar nazariyasida tub sonlar bilan bog‘liq muhim muammolaridan biri – 2000 yildan ortiq vaqt davomida hal qilinmay kelayotgan masala 5–Xalqaro matematik kongressida ilgari surilgan egizak tub sonlarining cheksizligini isbotlash muammosidir. Hozirgi kunda bu masala Landauning ikkinchi muammosi deb nomlanadi [1],[2],[3].

Ushbu ishda biz tub sonlar matritsalarini tuzish orqali $n = 4-$ egizaklari tub sonlarini cheksizligini aniqlash imkonini beruvchi yangi usul taklif qildik.

$n = 4-$ egizaklari tub sonlari – bu ayirmasi 4 ga teng bo‘lgan ketma ket kelgan tub sonlarni bildiradi. Biz qulaylik uchun quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$2 * 3 * 5 * 7 * 11 * ... * p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i = p_n!'$$

Bu yerda p_i – tartib raqami i bo‘lgan tub sonni bildiradi. Belgilanayotgan $p_n!'$ ifodasi 2 dan p_n gacha bo‘lgan barcha tub sonlarning ketma-ket ko‘paytmasini anglatadi. Uni p_n tub sonining maxsus faktoriali deb ataymiz.

Tub sonlar matritsasi.

Natural sonlar to‘plamini A_k matritsalar oilasi ko‘rinishida tasvirlaymiz, bu yerda elementlar $a(k,i,j)$ bilan ifodalanadi, i – qatorning tartib raqami, j – ustunning tartib raqami, $k - A_k$ matritsasining tartib raqami.

Bunda A_k matritsaning maksimal qatorlar soni maxsus faktorial p_k ga teng bo‘lishi kerak, ya’ni: $i_{k,\max} = p_k!$ Bu shuni anglatadiki, har bir k tartib raqamli matritsaga muayyan ketma-ketlikdagi tub sonlar to‘plami mos keladi: $p_1, p_2, p_3, ... p_k$ (E’tibor bering, ushbu matritsaga mos keladigan oxirgi tub son p_k bo‘ladi). Ustunlar soni esa yetarlicha katta, hatto cheksiz bo‘lishi mumkin. Bu yerda va bundan keyin biz hech qanday tub son oldindan ma’lum emas deb hisoblaymiz. Tub sonlar A_k matritsalarini qurish jarayonida bosqichma-bosqich hosil qilinadi va aniqlanadi.

Tarif. Agar ikki qo‘shni bo‘yalmagan qatorlar tartib raqami orasidagi farq 4 ga teng bo‘lsa, bunday qatorlar “$n = 4-$ egizak qatorlar“ yoki “egizak qator juftligi“ deb ataladi. Agar bitta ustunda joylashgan sonlar shu egizak qatorlarning turli qatnashchilariga tegishli bo‘lsa, ular quyidagi tenglikni qanoatlantiradi: $|a(k,i,j) - a(k,i \mp 4,j)| = 4$

Matritsaning har bir $n = 4-$ egizak qatori arifmetik progressiyani tashkil qiladi va u quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{cases} 6m + 1 + p_4!(j-1), & j = 1,2,... \\ 6m + 5 + p_4!(j-1), & j = 1,2,... \end{cases} \tag{1}$$

Istalgan A_k matritsasida umumiy qatorlar soni va egizak qator juftliklari soni quyidagicha aniqlanadi:

$$i_{k,\max} = i_{k-1,\max} \cdot p_k \quad \text{va} \quad m_k = m_{k-1}(p_k - 4) \tag{2}$$

yoki

$$i_{k,\max} = p_k!' \quad \text{va} \quad m_k = (p_k - 4)!', \ k \geq 4 \tag{3}$$

Bunda:

- $i_{k,\max}$ – matritsa qatorlarining umumiy soni;
- m_k – egizak qator juftliklarining umumiy soni;
- k – matritsa tartib yoki tub son tartib;
- $(p_k - 4)!'$ – maxsus faktorial ifodasi.

(2) va (3) ifodalardan kelib chiqadiki, $n = 4$ egizak qator juftliklarining soni har bir yangi matritsaga o‘tganda, ya’ni k tartib raqami oshgani sayin monoton ravishda ortib boradi. Dirixle teoremasiga ko‘ra har bir $n-$ tartibli egizak qator juftligida cheksiz ko‘p tub sonlar mavjud.

Teorema. A_k matritsasida $n = 4$ – tartibli egizak qator juftliklarining soni k ortishi bilan monoton ravishda oshadi, shuningdek, har bir egizak qator ichida cheksiz ko‘p tub sonlar mavjud bo‘ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. **Лаврик А.Ф.** *К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова* Вестник ЛГУ. – Ленинград, 1961.

- № 13. - С. 11-27.
2. **Лаврик А.Ф.** *К теории распределения простых чисел на основе метода тригонометрических сумм И.М. Виноградова* Труды МИРАН. -М.:, 1961.- № 64 . - С. 90-125.
3. **Аллаков И.** *О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии.* Известия ВУЗов. "Математика". – Казань, 2000. - № 8(459). -С.3-15.
UDC 512.556.5

Tashkil etuvchilari ikkita bo'lgan erkin gruppaning indeksi 3 ga teng qism gruppalari

Normatov E. P.[1], Akmalova R. A.[2], Zayniddinova N. O'.[3]
[1,2,3]Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
[1]erkinormatov@yandex.ru

Erkin gruppalar gruppalar nazariyasida ancha muhim rol o'ynaydi. [1] maqolada erkin gruppalar va toq tartibli Keli daraxti uchlari o'rtasida bir qiymatli moslik mavjudligi ko'rsatilgan. Keli daraxtida o'rganiladigan masalalarda uning gruppaviy tasviri xossalari muhim o'rin egallaydi [2,3]. Ushbu ishda soddalik uchun tashkil etuvchilari 2 ta bo'lgan erkin gruppaning indeksi 3 ga teng qism gruppalarini tasniflaymiz. Indeksi 2 ga teng qism gruppalarini tasniflash masalasi ancha sodda bo'lib, bu masala [1] ishda o'rganilgan.

Aytaylik $F_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ erkin gruppa bo'lsin. Bu gruppani $(\mathbb{Z}_3, +)$ chegirmalar gruppasiga akslantiruvchi akslantirish quyidagicha aniqlanadi:

$$f(x) = \begin{cases} \bar{0}, & \text{agar } x \in H, \\ \bar{1}, & \text{agar } x \in a_1 H, \\ \bar{2}, & \text{agar } x \in a_2 H. \end{cases} \tag{1}$$

$f(x)$ akslantirishni (1) ko'rinishida qidiramiz. Bunda

$$H = \{x \in F_2 \mid f(x) = \bar{0}\}$$

qism to'plam quyidagi shartlarni bajarsa, erkin gruppaning qism gruppasi bo'ladi:

1. $h \in H \implies h^{-1} \in H$,
2. $h_1, h_2 \in H \implies h_1 h_2 \in H$.

Agar $f(x)$ gomomorfizm bo'lsa, H – normal qism gruppa; aks holda, normal bo'lmagan qism gruppa bo'ladi.

Endi erkin gruppadagi so'zlar $F_2 = H \cup a_1 H \cup a_2 H$ bo'linishdagi qaysi sinfga kirishini tekshirib chiqamiz. Bunda quyidagi 4 ta hol hosil bo'ladi:

1. $\begin{cases} a_1 H = a_1^{-1} H, \\ a_2 H = a_2^{-1} H, \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a_1 H = a_1^{-1} H, \\ a_2 H = a_1 H, \end{cases}$ 3. $\begin{cases} a_1 H = a_2 H, \\ a_2 H = a_2^{-1} H, \end{cases}$ 4. $\begin{cases} a_1 H = a_2 H, \\ a_2 H = a_1 H, \end{cases}$

Bu hollarni navbat bilan ko'rib chiqib quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

Teorema. F_2 erkin gruppa va $H = \{x \in F_2 \mid f(x) = 0\}$ to'plam F_2 erkin gruppaning qism gruppasi bo'lsin. U holda:

$$1) \quad g_1(a_1^{\epsilon_i} a_2^{\delta_j}) = \begin{cases} e, & \text{agar } (\delta_j = 2t, \epsilon_i = 2k) \cup (\epsilon_i = 2k, \delta_j = 2t), \\ a_1, & \text{agar } (\delta_j = 2t, \epsilon_i = 2k+1) \cup (\epsilon_i = 2k+1, \forall \delta_j), \\ a_2, & \text{agar } (\delta_j = 2t+1, \forall \epsilon_i) \cup (\epsilon_i = 2k, \delta_j = 2t+1), \end{cases}$$

va

$$2)\quad g_2(a_1^{\epsilon_i}a_2^{\delta_j}) = \begin{cases} e, & \text{agar } (\delta_j = 3t, \epsilon_i = 3k) \cup (\delta_j = 3t+1, \epsilon_i = 3k+1) \cup (\delta_j = 3t+2, \epsilon_i = 3k+2) \\ & \cup(\epsilon_i = 3k, \delta_j = 3t) \cup (\epsilon_i = 3k+1, \delta_j = 3t+1) \cup (\epsilon_i = 3k+2, \delta_j = 3t+2), \\ a_1, & \text{agar } (\delta_j = 3t, \epsilon_i = 3k+1) \cup (\delta_j = 3t+1, \epsilon_i = 3k+2) \cup (\delta_j = 3t+2, \epsilon_i = 3k) \\ & \cup(\epsilon_i = 3k, \delta_j = 3t+2) \cup (\epsilon_i = 3k+1, \delta_j = 3t) \cup (\epsilon_i = 3k+2, \delta_j = 3t+1), \\ a_2, & \text{agar } (\delta_j = 3t, \epsilon_i = 3k+2) \cup (\delta_j = 3t+1, \epsilon_i = 3k) \cup (\delta_j = 3t+2, \epsilon_i = 3k+1) \\ & \cup(\epsilon_i = 3k, \delta_j = 3t+1) \cup (\epsilon_i = 3k+1, \delta_j = 3t+2) \cup (\epsilon_i = 3k+2, \delta_j = 3t), \end{cases}$$

bo‘lsa, H qism gruppa F_2 erkin gruppaning **normal qism gruppasi**.

$$3)\quad g_3(a_1^{\epsilon_i}a_2^{\delta_j}) = \begin{cases} e, & \text{agar } (\delta_j = 3t, \epsilon_i = 2k) \cup (\delta_j = 3t+2, \epsilon_i = 2k+1) \\ & \cup(\epsilon_i = 2k+1, \delta_j = 3t+1) \cup (\epsilon_i = 2k, \delta_j = 3t), \\ a_1, & \text{agar } (\delta_j = 3t, \epsilon_i = 2k+1) \cup (\delta_j = 3t+2, \epsilon_i = 2k) \\ & \cup(\epsilon_i = 2k, \delta_j = 3t+2) \cup (\epsilon_i = 2k+1, \delta_j = 3t), \\ a_2, & \text{agar } (\delta_j = 3t+1, \forall\epsilon_i) \cup (\epsilon_i = 2k, \delta_j = 3t+1) \cup (\epsilon_i = 2k+1, \delta_j = 3t+2), \end{cases}$$

va

$$4)\quad g_4(a_1^{\epsilon_i}a_2^{\delta_j}) = \begin{cases} e, & \text{agar } (\delta_j = 2t, \epsilon_i = 3k) \cup (\delta_j = 2t+1, \epsilon_i = 3k+1) \\ & \cup(\epsilon_i = 3k, \delta_j = 2t) \cup (\epsilon_i = 3k+2, \delta_j = 2t+1), \\ a_1, & \text{agar } (\delta_j = 2t, \epsilon_i = 3k+1) \cup (\delta_j = 2t+1, \epsilon_i = 3k+2) \cup (\epsilon_i = 3k+1, \forall\delta_j), \\ a_2, & \text{agar } (\delta_j = 2t, \epsilon_i = 3k+2) \cup (\delta_j = 2t+1, \epsilon_i = 3k) \cup (\epsilon_i = 3k, \delta_j = 2t+1), \end{cases}$$

bo‘lsa, H qism gruppa F_2 erkin gruppaning **normal bo‘lmagan qism gruppasi** bo‘ladi.

Bu yerda

$$\forall x = a_1^{\epsilon_1}a_2^{\delta_1}a_1^{\epsilon_2}a_2^{\delta_2}\dots a_1^{\epsilon_m}a_2^{\delta_m} \in F_2$$

uchun

$$r(x) = g_k(a_1^{\epsilon_1}a_2^{\delta_1})\, g_k(a_1^{\epsilon_2}a_2^{\delta_2})\, \dots\, g_k(a_1^{\epsilon_m}a_2^{\delta_m}), \quad (k = 1, 4).$$

$$s(r(x)) = \begin{cases} \bar{0}, & \text{agar } r(x) = e, \\ \bar{1}, & \text{agar } r(x) = a_1, \\ \bar{2}, & \text{agar } r(x) = a_2. \end{cases} \quad f = s \circ r,$$

Adabiyotlar ro‘yxati

1. **Розиков У.А.**, *Представимость деревьев и их некоторие приложения.*, Матем. Заметки, Москва, 2002, Т.72, Вып.4, С.516-527.

2. **Розиков У.А.**, *Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса.*,Теор. и матем. физика, Москва, 1997, Т.112, №1, С.170-176.

3. **Норматов Э.П., Розиков У.А.**, *Описание гармонических функций с применением свойств группового представления дерева Кэли.*, Матем. заметки, Москва, 2006, Т.79, №3, С.434-444.

УДК 519.00

Algebraik egri chiziqlarning eskizini darajali geometriya va kompyuter algebrasi metodlari yordamida tasvirlash

Ruzimuradov X.X.[1], Uroqova S.N.[2]
Самаркандский государственный уриверситет имени Шарофа Рашидова, город Самарканд, Узбекистан.
e-mail: rxx05@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu ishda algebraik egri chiziqning maxsus nuqta atrofidagi eskizini chizish bosqichlari ishlab chiqilgan va bir algebraik egri chiziqning eskizi darajasi geometriya va kompyuter algebrasi metodlari yordamida tasvirlangan.

$f(x_1, x_2)$ – funksiya haqiqiy yoki kompleks koeffisiyentli ko‘phad bo‘lsin. Quyidagi

$$f\left(x_1, x_2\right) = 0 \tag{1}$$

tenglamaning yechimlari to‘plamiga

$$F = \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f\left(x_1,\ x_2\right) = 0\right\}, \quad \left(F = \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid f\left(x_1,\ x_2\right) = 0\right\}\right)$$

yassi (tekis) algebraik egri chiziq deb ataladi.

Ma’lumki, $x = (x_1^0,\ x_2^0)$ nuqtada $f\left(x_1^0,\ x_2^0\right) = 0$ bo‘lib, bu nuqtada $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \neq 0$ bo‘lsa, $x = (x_1^0,\ x_2^0)$ nuqta F - egri chiziqning oddiy nuqtasi deyiladi. Aks holda $x = (x_1^0,\ x_2^0)$ nuqta (1) chiziqning *maxsus* yoki kritik nuqtasi deb yuritiladi. Koordinatalar sistemasiga siljitish almashtirishini qo‘llab, koordinatalar boshini $x = (x_1^0,\ x_2^0)$ nuqtaga o‘tkazamiz. $x = (x_1^0,\ x_2^0)$ nuqta (1) chiziqning oddiy nuqtasi bo‘lganda quyidagi teorema o‘rinli.

1 –teorema (Koshi [2])**.** *Agar* $x = (0,\ 0)$ *bo‘lganda* $\frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0$ *bo‘lsa , u holda (1) tenglamaning barcha yechimlari* $x = (0,\ 0)$ nuqta atrofida

$$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_1^k$$

yoyilmadan iborat bo‘ladi, bu yerda b_k *— o‘zgarmaslar (haqiqiy yoki kompleks).*

$x = (x_1^0,\ x_2^0)$ nuqta (1) chiziqning maxsus nuqtasi bo‘lganda yuqoridagi teorema o‘rinli emas. Ushbu ishda maxsus nuqta atrofida (1) tenglamaninig taqribiy yechimlarini topish uchun darajali geometriya metodlaridan Nyuton ko‘pyoqligi usuli qo‘llanilgan [1], ma’lum bir yassi chiziqning maxsus nuqta atrofidagi taqribiy yechimlari va yecimning barcha tarmoqlarining eskizi topilgan.

$f(X)$ ko‘phadning barcha koeffitsientlari haqiqiy bo‘lsin, u holda $X \quad R^2$ haqiqiy tekislikda yuqorida bayon qilingan lokal analiz yordamida uning barcha tarmoqlarini chizishimiz mumkin. Ushbu protsedurani bir necha bosqichlarga ajratamiz.

1-qadam. Yuqoridagi algoritmlar yordamida $f(X)$ ko‘phadni kompyuter algebrasi tizimida mavjud bo‘lgan kopaytuvchilarga yoyosh algoritmlaridan foydalanib,

$$f = f_1\left(X\right) \ldots f_m\left(X\right),$$

keltirilmaydigan polinom ko‘paytuvchilarga yoyamiz. Keyinchalik, har bir ajralmaydigan ko‘paytuvchi $f_l(X)$ uchun alohida egri chiziqlarning tarmoqlarini yasaymiz.

2-qadam. Yo‘qotish usulidan foydalanib [4], $f = 0$ egri chiziqning

$$f(X^0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(X^0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(X^0\right) = 0,$$

shartlar o‘rinli bo‘lgan barcha haqiqiy chekli kritik (maxsus) X^0 nuqtalarini topamiz.

3-qadam. Har bir X^0 maxsus nuqta yaqinida uni koordinata boshiga o‘tkazib, yuqoridagi usullaridan foydalanib, keltirilmaydigan polinom ko‘paytuvchilarning barcha haqiqiy tarmoqlarni topamiz.

4-qadam. Yuqorida keltirilgan usullaridan foydalanib, va 1- teorema yordamida ularni aniqlashtirib, $f(0,\ x_2) = 0$ va $f(x_1;\ 0) = 0$ tenglamalarining yechimlari sifatida $x_1 = 0$ va $x_2 = 0$ o‘qlari bilan egri chiziqning kesishish nuqtalarini topamiz.

5-qadam. $P_1 = (1;\ 0)$ va $P_2 = (0;\ 1)$ shartlar bilan qisqartirilgan tenglamalar yordamida $x_1 = \infty$ va $x_2 = \infty$ bilan egri chiziqning kesishish nuqtalarini topamiz: Ularning har biri uchun biz

$$x_2 = b_1 x_1^{p_1} + b_2 x_1^{p_2} + b_3 x_1^{p_3} + \dots,$$

tipdagi yoyilmalar boshlang‘ich hadlarini hisoblaymiz.

6-qadam. N ning chegarasi qismini $K_1 = \{P : p_1 < 0;\ p_2 > 0\}$ masala konusi bilan $x_1 \to 0, x_2 \to \infty$ da, shunga o‘xshsash $x_1 \to \infty, x_2 \to 0$ da - $K_2 = \{P : p_1 > 0;\ p_2 < 0\}$ masala konusi bilan birga foydalanib egri chiziqning tarmoqlarini topamiz.

7-qadam. $x_1, x_2 \to \infty$, da N ning chegarasi qismini $K_3 = \{P : p_1 > 0;\ p_2 > 0\}$ masala konusi bilan birga foydalanib, egri chiziqning tarmoqlarini topamiz.

8-qadam. X^0 maxsus nuqtalaridan tashqarida egri chiziq tarmoqlari kesishmasligini hisobga olib, egri chiziq tarmoqlari topilgan qismlarini tutashtiramiz.

Natijada (1) tenglamaning maxsus nuqta atrofida yechimidan iborat bo‘lgan funksiya grafigining tekislikdagi eskizini hosil qilamiz. Yuqorida keltirilgan prosedura yordamida

$$f(x_1, x_2) = x_1^3\, x_2^0 - x_1^2\, x_2^0 + x_1^0\, x_2^2$$

algebraik egri chiziqning maxsus nuqta atrofidagi eskizi topilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Брюно А.Д.** *Алгоритмы решения одного алгебраического уравнения.* Программирование. 2019. №1. С. 59—72. DOI: 10.1134/S0132347419.

2. **Брюно А.Д.** *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* М.: Наука, 1998. 288 с.

3. **Брюно А.Д.б Батхин А.Б.** *Разрешение особенностей алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии* Программирование. 2012. №2.

4. **Курош А.Г.** *СКурс вaысшей алгебры.* . М.: Наука, 1956. 431 с.

5. **F. J. Mahmatqobilova, H.X Ro‘zimuradov.** *Yassi algebraik chiziqning maxsus nuqtalari to‘g‘risida. “Amaliy matematikaning zamonaviy muammolari va istiqbollari” Respublika ilmiy-amaliy anjuman materiallari to‘plami.* 2024 yil 24-25-may. Qarshi: “Qarshi davlat universiteti” nashriyoti, 2024. 457-459 betlar.

Arifmetik progressiyadan olingan tub sonlar yig‘indisining maxsus to‘plamlari haqida.

Safarov A. Sh.[1], Bozoraliyev E. T.[2]
Termiz Davlat Universiteti, Termiz, O‘zbekiston;
asafarov1977@mail.ru

Ushbu maqolada sonlarni arifmetik progressiyadan olingan ikkita tub sonlar yigindisi ko‘rinishida ifodalash masalasi, ya‘ni tub sonlar biror arifmetik progressiyadan olingan holatdagi Goldbax muammosi o‘rganilgan [1].

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $X-$ yetarlicha katta haqiqiy son, $n-$ natural son, $p, p_1,\ p_2$ – tub sonlar, $E(X)-$ orqali $n \le X$ uchun, $n = p_1+p_2$ ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydigan sonlar sonini belgilaymiz. $M(D,X)-$ orqali $n \le X$ uchun

$$n = p_1 + p_2,\ \ p_i \equiv l_i (mod\, D),\ (l_i, D) = 1,\ \ i = 1, 2; \tag{1}$$

ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydigan sonlar to‘plamini va $E(D,X) = card\, M(D,X)$ deb hamda $R(n,D,X)-$ orqali esa berilgan n ni (1) ko‘rinishda ifodalashlar sonini belgilaymiz,
$c_j\ (j = 1, 2, ...)-$ musbat o‘zgarmas sonlar, $\varphi(a)-$ Eyler funksiyasi, χ_q orqali q modul bo‘yicha Dirixle xarakterni, $\bar{\chi}_q$ orqali q modul bo‘yicha χ_q xarakterga qo‘shma Dirixle xarakterni belgilaymiz.

Asosiy intervallar to‘plamini $\mathcal{M}$ orqali, τ orqali esa $Q^{-1} < \alpha < 1 + Q^{-1},\ \alpha \notin \mathcal{M}$ shartni qanoatlantiruvchi asosiy intervalga kirmaydigan α lar to‘plamini belgilaymiz. Shunday qilib, τ qo‘shimcha intervallar birlashmasini ifodalaydi.

A.F.Lavrik va R.Von ishlaridan foydalanib, I.Allakov quyidagi teoremani isbotladi [2]:

1-teorema. $D = p^v$ va $\mathrm{D} \ll \ln^A X$ uchun

$$E(D,X) \le c_3 \frac{X}{\varphi(D)} \exp(-c_4\sqrt{\ln X})$$

baho va $n \notin M(D,X),\ n \le X$ uchun

$$R(n) \ge c_5 \frac{n}{\varphi(D) ln^2 n} \left(1 - \frac{\ln^A n}{\exp(c_6\sqrt{\ln n})}\right) \exp\left(-\frac{c_6}{4}\sqrt{\ln n}\right)$$

tengsizlik o‘rinli.

Qaralayotgan maqolada 1-teoremadagi baholar takomillashtirilgan [3]. Jumladan quyidagi baho olingan.

2-teorema. Yetarlicha katta X va yetarlicha kichik $\delta > 0$ uchun, $D < X^{\delta_1}$, $(10\delta_1 < \delta)$ da,

$$E(D,X) \le c_7 X^{1-\delta} \varphi^{-1}(D)$$

baho va $n \notin M(D,X)$, $n \le X$ uchun

$$R(n,D) \ge c_8 \frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\varphi(D) \ln^2 n} \left(n^{\frac{\delta}{8}} - 1\right)$$

baholar o‘rinli.

Ta‘kidlash joizki, 1-teorema va 2- teoremalar bir-biridan quyidagicha farq qiladi: 1-teoremada arifmetik progressiyaning ayirmasi $D = p^v$ (yani tub sonning darajasiga teng) va $\mathrm{D} \ll \ln^A X$ maxsus to‘plam quyidagi bahoni qanoatlantiradi:

$$E(D,X) \le c_3 \frac{X}{\varphi(D)} \exp(-c_4\sqrt{\ln X}).$$

2-teoremada esa, D ixtiyoriy va $1 < D < X^{\delta_1}$ (δ_1 yetarlicha kichik), maxsus to‘plam $E(D,X) \le c_7 X^{1-\delta_1} \varphi^{-1}(D)$ (δ yetarlicha kichik va $10\delta_1 < \delta$) bahoni qanoatlantiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. **Аллаков И.** *О гольдбаховых числах.* // Чебышевский сборник. Тула, 2008. т.9 вып.1 с.13-17.
2. **Allakov I., Safarov A.Sh.** *Exceptional set of the sum of a prime number and a fixed degree of a prime number.* // Russian Mathematics. 2020. №64, p. 8-21.
3. **Аллаков И., Исраилов М.** *Оценка тригонометрических сумм по простым числам в арифметической прогрессии.* //Доклады АН Руз., 1982, №4., с.5-13.

UDK 511.348

Additiv masalalar haqida

Saatmurotov Sh. Z. [1], Ashirqulov T. Z. [2]
[1,2] Termiz davlat universiteti, Termiz. O'zbekiston
shoxruh@mail.ru, ashirkulovt@mail.ru

Faraz qilaylik, M_i musbat butun sonlarning o'suvchi, cheksiz ketma-ketligi

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in}, ... \tag{1}$$

bo'lsin. Agar k ta $M_1, M_2, ..., M_k$ ketma-ketliklar (ularning orasida bir xillari ham bo'lishi mumkin) berilgan bo'lsa, elementlari

$$b_j = a_{1j1} + a_{2j2} + ... + a_{kjk} \quad a_{1j1} \in M_1, \quad a_{2j2} \in M_2, ..., a_{kjk} \in M_k \tag{2}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $b_1, b_2, ..., b_n, ...$,ketma-ketlikka berilgan ketma-ketliklarning yig'indisi deb ataladi [1] va $M_1 + M_2 + ... + M_k$ ko'rinishda belgilanadi.

$$P(M_i) = \inf \frac{N(x)}{x}$$

каttalikka M_i ketma-ketlikning zichligi deb ataladi. Bunda $N(x)$ (1) ketma- ketlikdagi x dan katta bo'lmagan hadlar sonini bildiradi.

Additiv masalalar deganda berilgan M to'plamning elementlarini $M_1 + M_2 + ... + M_k$ to'plamlar elementlari yig'indisi ko'rinishida ifodalash tushiniladi.

Bu yerda quyidagi masalalarni hal etish muhim [1] :

1. Agar $M_1 + M_2 + ... + M_k$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsa, M dagi (2) shartni qanoatlantiruvchi elementlardan tuzilgan M' ketma-ketlikning zichligi qanday bo'ladi?

Shunga o'xshash M dagi (2) shartni qanoatlantirmaydigan elementlardan tuzilgan $\overline{M}'$ ketma-ketlikning zichligini ham qarash mumkin.

2. b_j va k lar berilgan bo'lganda (2) shartni qanoatlantiruvchi $(a_{1j1}, a_{2j2}, ..., a_{kjk})$ lar sonini bildiruvchi $R_k(b_j)$ funksiyani tekshirish.

Boshqacha qilib aytganda, $R_k(b_j)$ funksiya uchun aniq yuqori va quyi chegaralarini topish yoki asimptotik formula keltirib chiqarish.

Bu keltirilgan masalalar: Waring muammosi, Eyler-Goldbax muammosi, Xardi-Littlvud muammosi, Xua-Lo-Ken muammosi va boshqa ko'plab sonlar nazariyasining additiv muammolarini o'z ichiga oladi.

Agar biz $1 < n < X$ oraliqdagi ikkita tub son ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lmagan sonlarning sonini $E(x)$ bilan belgilasak, u holda yuqoridagi mualliflar tomonidan isbotlangan natijani $E(x) \ll \frac{x}{ln^a x}$ ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda $\ll$-Vinogradov simvoli, $A > 0$-haqiqiy son. 1961-yilda A.F.Lavrik[6] berilgan $n, 1 < n < X$ juft sonini arifmetik progressiyadan

olingan ikkita tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalashlar soni uchun assimptotik formula oldi. Ushbu ishda shu asimptotik formulaning qoldiq hadi aniqlashtirilib va quyidagi teorema isbotlangan:

Teorema. (O,X) oralig'idagi ko'pi bilan $\frac{cX}{D(\ln X)^M}$ ta dan boshqa barcha juft $n = l^{'} + l^{''} \,(\mathrm{mod} D)$ sonlar uchun $n = p^{'} + p^{''}$ tenglamaning tub sonlar $p^{'} \equiv l^{'} \,(\mathrm{mod} D)\,; p^{''} \equiv l^{''} \,(\mathrm{mod} D)\,, 1 \le l^{'}, l^{''} \le D; \left(l^{'}, D\right) = \left(l^{''}, D\right) = 1; 0 \prec D \le (\ln N)^A$ tub sonlardagi yechimlari soni $Q\,(N,D)$ uchun quyidagi formulani isbotladi:

$$Q\,(N,D) = 2\prod_{p\succ 2} \frac{p\,(p-2)}{(p-1)^2} \prod_{\substack{\frac{p}{D} \\ p\succ 2}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{N}{\varphi\,(D)\ln^2 N} \prod_{\substack{p\succ 2 \\ \frac{p}{D}, p\times D}} \frac{p-1}{p-2} + o\left(\frac{N\ln\ln D}{\varphi\,(D)\ln^3 N}\right),$$

bu yerda p-barcha tub sonlarni qabul qiladi, φ-Eyler funksiyasi, A va M lar musbat haqiqiy sonlar, O-simvoldagi o'zgarmas son A va M ga bog'liq.

Adabiyotlar

1. **Аллаков И.** *Оценка тригометрических сумм и их приложения к решению некоторы аддитивных задач теории чисел* Термиз, Сурхан нашр.2021, 160 с.
2. **Аллаков И.** *О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической*
3. **Лаврик А.Ф.**К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М.Виноградова // Вестник ЛГУ.-Ленинград, 1961. -№13.-С. 11-27.

Local and 2-local anti-derivations on naturally graded filiform Lie algebras

Vaisova N. Z.[1], Atajonov Kh. O.[2], Bobojonov I. G'.[3]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; nafosat_vaisova@mail.ru
[2]Urgench state university named after Abu Rayhon Beruni, Urgench, Uzbekistan; atajonovxusainboy@gmail.com
[3]Urgench state university named after Abu Rayhon Beruni, Urgench, Uzbekistan; Bobojonovislom2001@gmail.com

Investigation of local derivations on Lie algebras was initiated in [1] by Ayupov and Kudaybergenov. They proved that every local derivation on semisimple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations that are not derivations. In [2], local derivations of solvable Lie algebras are investigated, and it is shown that in the class of solvable Lie algebras there exist algebras that admit local derivations that are not derivations and also algebras for which every local derivation is a derivation. Furthermore, we have recently obtained significant results in our paper entitled "Local and 2-local anti-derivations on solvable Lie algebras" [3].

Definition 1. Let $(\mathfrak{L}, [-,-])$ be an algebra with a multiplication $[-,-]$. A linear map φ is called a δ-derivation if it satisfies

$$\varphi[x,y] = \delta\big([\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]\big),$$

where δ is from the ground field $\mathbb{F}$.

Note that 1-derivation is a usual derivation and (-1)-derivation is called an anti-derivation. If φ_1 and φ_2 are δ_1 and δ_2-derivations, respectively, then their commutator $[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1$ is a $\delta_1\delta_2$-derivation. The set of all δ-derivations, for the fixed δ, we denote by $\mathrm{Der}_\delta(\mathfrak{L})$. For Lie algebras, the notion of anti-derivations coincides with the notion of reverse derivations, which was studied by Herstein in [4].

Definition 2. A linear map Δ is called a local δ-derivation, if for any $x \in \mathfrak{L}$, there exists a δ-derivation $\varphi_x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = \varphi_x(x)$. The set of all local δ-derivations on $\mathfrak{L}$ we denote by $\mathrm{LocDer}_\delta(\mathfrak{L})$.

Definition 3. A map $\nabla : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (not necessary linear) is called a 2-local δ-derivation, if for any $x, y \in \mathfrak{L}$, there exists a δ-derivation $\varphi_{x,y} \in \mathrm{Der}_\delta(\mathfrak{L})$ such that

$$\nabla(x) = \varphi_{x,y}(x), \quad \nabla(y) = \varphi_{x,y}(y).$$

It should be noted that 2-local δ-derivation is not necessarily linear, but for any $x \in \mathfrak{L}$ and for any scalar λ, we have

$$\nabla(\lambda x) = \varphi_{x,\lambda x}(\lambda x) = \lambda\varphi_{x,\lambda x}(x) = \lambda\nabla(x).$$

For an arbitrary Lie algebra L we define the **derived** and **central series** as follows:

$$\mathfrak{L}^{[1]} = \mathfrak{L}, \ \mathfrak{L}^{[s+1]} = [\mathfrak{L}^{[s]}, \mathfrak{L}^{[s]}], \ s \geq 1,$$

$$\mathfrak{L}^{1} = \mathfrak{L}, \ \mathfrak{L}^{k+1} = [\mathfrak{L}^{k}, \mathfrak{L}], \ k \geq 1.$$

Definition 4. An n-dimensional Lie algebra $\mathfrak{L}$ is called **solvable (nilpotent)** if there exists $s \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) such that $\mathfrak{L}^{[s]} = \{0\}$ ($\mathfrak{L}^{k} = \{0\}$). Such minimal number is called **index of solvability** (**nilpotency**).

The maximal nilpotent ideal of a Lie algebra is said to be the nilradical of the algebra.

Definition 5. An n-dimensional Lie algebra $\mathfrak{L}$ is said to be **filiform** if $\dim \mathfrak{L}^i = n - i$, for $2 \leq i \leq n$.

Now let us define a natural gradation for the nilpotent Lie algebras.

Definition 6. Given a nilpotent Lie algebra $\mathfrak{L}$ with nilindex s, put $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}^i/\mathfrak{L}^{i+1}, 1 \leq i \leq s-1$, and $Gr(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{L}_{s-1}$. Define the product in the vector space $Gr(\mathfrak{L})$ as follows:

$$[x + \mathfrak{L}^{i+1}, y + \mathfrak{L}^{j+1}] := [x, y] + \mathfrak{L}^{i+j+1},$$

where $x \in \mathfrak{L}^i/\mathfrak{L}^{i+1}$, $y \in \mathfrak{L}^j/\mathfrak{L}^{j+1}$. Then $[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] \subseteq \mathfrak{L}_{i+j}$ and we obtain the graded algebra $Gr(\mathfrak{L})$. If $Gr(\mathfrak{L})$ and $\mathfrak{L}$ are isomorphic, then we say that the algebra $\mathfrak{L}$ is **naturally graded**.

It is well known that there are two types of naturally graded filiform Lie algebras. In fact, the second type will appear only in the case when the dimension of the algebra is even.

Theorem 1. [5] Any naturally graded filiform Lie algebra is isomorphic to one of the following non-isomorphic algebras:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{n}_{n,1}: \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1;\\
&\mathfrak{Q}_{2n}: \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ 2 \leq i \leq 2n-2, \quad [e_i, e_{2n+1-i}] = (-1)^i e_{2n}, \ 2 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Proposition 1. Any anti-derivation D on algebras $\mathfrak{n}_{n,1}$ and $\mathfrak{Q}_{2n}$ has the following form:

$$\mathfrak{n}_{n,1}: \begin{cases} D(e_1) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad D(e_2) = \sum\limits_{i=2}^{n} \beta_i e_i, \\ D(e_i) = (-1)^i((\frac{1+(-1)^{i+1}}{2}\alpha_1 + \beta_2)e_i + \sum\limits_{j=i+1}^{n} \beta_{j-i+2} e_j), \quad 3 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$\mathfrak{O}_{2n}: \begin{cases} D(e_1) = \alpha_1 e_1 + \sum\limits_{i=3}^{2n} \alpha_i e_i, \quad D(e_2) = \sum\limits_{j=2}^{2n} \beta_j e_j, \\ D(e_i) = (-1)^i((\frac{1+(-1)^{i+1}}{2}\alpha_1 + \beta_2)e_i + \sum\limits_{j=i+1}^{2n-1} \beta_{j-i+2} e_j + \alpha_{2n-i+2} e_{2n}), \quad 3 \le i \le 2n. \end{cases}$$

Theorem 2. Naturally graded filiform Lie algebras $\mathfrak{n}_{n,1}$ and $\mathfrak{O}_{2n}$ admit local and 2-local anti-derivations which are not anti-derivations.

Literature

1. **Ayupov Sh., Kudaybergenov K.** *Local derivations on finite-dimensional Lie algebras, Linear Algebra and its Applications, 493 (2016), 381–398.*
2. **Ayupov Sh., Khudoyberdiyev A.** *Local derivations on solvable Lie algebras. Linear and Multilinear Algebra, 69 (2021), 7, 1286–1301.*
3. **Ayupov Sh., Atajonov Kh., Yusupov B.** *Local and 2-local anti-derivations on solvable Lie algebras. European Journal of Mathematics (2025) 11:52.*
4. **Herstein I.** *Jordan derivations of prime rings. Proceedings of the American Mathematical Society, 8 (1957), 1104–1110.*
5. **Vergne M.** *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à létude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, Bulletin de la Société Mathématique de France, 98 (1970), 81–116.*

УДК 511.216

CHIZIQLI OPERATORNING XOS SON VA XOS VEKTORLARNI TOPISHNING USULLARI.

Xo‘jamqulov B. T.[1], Mamaraimova G.[2], Shomirzayev A.[3]
[1,2,3] Termiz Davlat Universiteti, Termiz, O‘zbekiston;
xojamqulovb@mail.ru

Hozirgi zamonda matematika jadal rivojlanib bormoqda. Tabiiykiy, bu masalalarni yechish ham xilma – xildir. Algebrada uchraydigan ko‘p masalalarni

$$y = Ax \tag{1}$$

shaklda yozish mumkin, bu yerda x va y berilgan W va V funksional fazolarning elementlari bo‘lib, $A-$ operator yoki xususiy holda funksionaldir. Matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini topish muammosi fizika, mexanika va astronomiyaning ko‘plab amaliy muammolarini hal qilishda zarur bo‘ladi. Bunda $Ax = \lambda x$ ko‘rinishdagi tenglamalarning notrivial yechimni aniqlashda kerak bo‘ladi va bunday yechim mavjud bo‘lgan λ son ko‘phadning xos sonlari [1].

Ushbu maqola chiziqli operatorlarning xos soni va xos vektorlarini topishning turli metodlardan foydalanilgan holda topishga bag‘ishlangan.

Xos vektor chiziqli algebradagi tushuncha bo‘lib, kvadrat matritsa uchun vektor sifatida belgilanadi, matritsani x vektorga ko‘paytirish natijasida bir xil vektor matritsaning xos son deb ataladigan shunday skalyar songa ko‘paytiriladi [2]. Shunday qilib, A matritsaning xos vektori shunday nolga teng bo‘lmagan x vektor bo‘lib, shunday λ son uchun

$$Ax = \lambda x \tag{2}$$

bajariladi. O‘z navbatida, A matritsasining xos qiymati λ soni bo‘lib, uning uchun xos vektor x mavjud, ya‘ni (2) tenglik mavjud [3].

1 - teorema. n o‘chovli R_n fazodagi ixtiyoriy A chiziqli operatorning xos vektori mavjud. Agar A operatorning matritsasi

$$A(e) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dan iborat bo‘lsa, u holda

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

tenglama λ ga nisbatan A operatorning xarakteristik tenglamasi deb ataladi. (3) tenglamaning chap tomoni

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - ... - p_n) \tag{4}$$

$n-$ darajali ko‘phad bo‘lib, u A operatorning xaraktiristik ko‘phadi deyiladi. Ayrim hollarda (4) ko‘phad o‘rnida A operatorning xos ko‘phadi deb ham ataladi.

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - ... - p_n \tag{5}$$

Bu yerda A operatorni matritsa deb olsak. Matritsaning xos sonlari uning xos ko‘phadlari ildizlari bo‘ladi. (5) ko‘phad $n-$ darajali bo‘lgani uchun n ta ildizga ega. [3]

Bizga $\det(A - \lambda_i E)\overline{x} = \overline{0}$ tenglama berilgan bo‘lsin. Algebradan ma‘lumki, umumiy holda, $p(\lambda)$ ning p_i koeffisienti A matritsaning $(-1)^{i-1}$ ishora bilan olingan $i-$ tartibli bosh minorlari yig‘indisiga teng. Viyet teoremasidan foydalanib, quyidagi tengliklarni yozishimiz mumkin:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = p_1,$$
$$.....$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n = (-1)^{n-1}p_n.$$

Endi biz matritsalar nazariyasidagi yana bir muhim metodni taqdim etamiz, u A matritsaga (butunlay boshqa g‘oyalar va usullardan foydalangan holda) to‘liq umumlashtiriladi.

1-ta‘rif. Ixtiyoriy $A \in M_n(C)$ matritsaning bosh dioganallar yig‘indisiga A matritsaning izi deb ataladi.

Bu ta‘rifga ko‘ra A matritsaning izi quyidagicha belgilanadi. $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = Tr(A)$, endi biz bu tenglikdan foydalanim quyidagi ko‘phadni hosil qilamiz.

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + (\det A)\, E_2 = 0 \tag{6}$$

2-ta‘rif. (6) xaraktiristik ko‘phadning λ_1, λ_2 kompleks ildizlari $A \in M_2(C)$ matritsaning xos sonlari deb ataladi.

Bu yerda $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A)$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = Tr(A)$.

2-teorema. (Gamilton – Keli) Ixtiyoriy $A \in M_2(C)$ tenglik o‘rinli

$$A^2 - Tr(A)A + \det(A)E_2 = O_2$$

Shunday qilib, matritsaning barcha xos sonlar yig‘indisi uning iziga teng bo‘lib, ularning ko‘paytmasi shu matritsaning determinantiga teng.

Faddeev metodi. D. K. Faddeev Leveri metodini shunday takomillashtirdiki, natijada, berilgan A matritsaning xos ko‘phadini topish bilan birgalikda teskari bo‘lgan A^{-1} matritsani hamda A matritsaning xos vektorlarini ham topish mumkin.

$$\begin{aligned} &A_1 = A, trA_1 = q_1, B_1 = A_1 - q_1E, \\ &A_1 = AB_1, \frac{trA_2}{2} = q_2, B_2 = A_2 - q_2E, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_{n-1} = AB_{n-2}, \frac{trA_{n-1}}{n-1} = q_{n-1}, B_{n-1} = A_{n-1} - q_{n-1}E, \\ &A_n = AB_{n-1}, \frac{trA_n}{n} = q_n, B_n = A_n - q_nE. \end{aligned} \tag{7}$$

(7) dan quyidagilar kelib chiqadi.
1. $q_1 = p_1, q_2 = p_2, ..., q_n = p_n$;
2. B_n nol matritsa;
3. Agar A xosmas matritsa bo‘lsa, u holda $A^{-1} = \frac{B_{n-1}}{p_n}$.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. **M.I.Isroilov.** *Hisoblash metodlari.* Darslik. TOSHKENT “O‘zbekiston“ 2003. 440 bet.
2. **Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev.** *Chiziqli Algebra.* Darslik “MUHR PRESS“ nashriyoti. Toshkent, 2023, – 392 bet .
3. **3. G.G‘ayipnazarov, O.Gaimnazarov.** *Algebra va sonlar nazariyasidan misol va masalalar yechish.* TOSHKENT 2015.

Biderivations of null-filiform Leibniz algebras.

Yusupov B.[1], Jumaniyozov D.[2], Azizov M.[3]
[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
baxtiyor yusupov 93@mail.ru
[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
dostondzhuma@gmail.com
[3]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
azizovmajidkhan@gmail.com

We classify the biderivations of null-filiform Leibniz algebras and construct induced Leibniz algebras. Moreover, we explore the relation between the algebras and the Leibniz algebra of its biderivations.

First, we provide descriptions of the derivations and anti-derivations on the given Leibniz algebras. Then we give the classification of the biderivations as well as the Leibniz algebras constructed by them.

Proposition 1 Any derivation on NF_n has the following form:

$$d(e_i) = i\alpha_1 e_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{j-i+1} e_j.$$

where $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Now, we determine the space of anti-derivations of NF_n.

Proposition2 Any anti-derivation on NF_n has the following form:

$$D(e_1) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j, \quad D(e_i) = 0, \quad 2 \leq i \leq n.$$

where $\beta_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Theorem Any biderivation of NF_n is described as the following form:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & (n-1)\alpha_1 & 0 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 & n\alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$

Now, we describe the Leibniz algebra $\mathrm{Bider}(NF_n)$. For this, let us fix the basis $\mathcal{B}$ of $\mathrm{Bider}(NF_n)$. One can verify that $\mathrm{Bider}(NF_n)$ is $(2n-1)$-dimensional. Thus, consider $\mathcal{B} = \{X_1, X_2, \dots, X_n, Y_2, Y_3, \dots, Y_n\}$, where

$$\begin{aligned} X_1 &= (E_{11} + 2E_{22} + \cdots + nE_{nn}, E_{11}) & & \\ X_2 &= (E_{21} + E_{32} + \cdots + E_{nn-1}, 0) & Y_2 &= (0, E_{21}) \\ &\cdots & &\cdots \\ X_{n-1} &= (E_{n-11} + E_{n2}, 0) & Y_{n-1} &= (0, E_{n-11}) \\ X_n &= (E_{n1}, 0) & Y_n &= (0, E_{n1}), \end{aligned}$$

where E_{ij} are matrix units.

Thus, by summarizing all above, we obtain the following basis products:

$$[X_1, X_k] = X_k - Y_k, \quad [X_k, X_1] = -X_k, \tag{2}$$

$$[Y_k, X_1] = -(k-1)Y_k \quad [Y_k, X_l] = -Y_{k+l-1}, \tag{3}$$

where $2 \leq k \leq n$, $k + l - 1 \leq n$ and the omitted products are zero.

Proposition $\mathrm{Bider}(NF_n)$ is a solvable Leibniz algebra of dimension $2n - 1$ with the multiplication table given as (2) and (3).

Literature

1. **Ayupov Sh.A, Omirov B.A.** *On some classes of nilpotent Leibniz algebras.* Siberian Mathematical Journal, 42 (2001) 15-24.

2. **Casas J. M., Ladra, M., Omirov, B. A. and Karimjanov, I. A.**, *Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical.* Linear and Multilinear Algebra, 61(6) (2012) 758–774.

Свойство Блюма-Хансона для L_1-сжатий в L_p-пространствах Банаха-Канторовича над кольцом измеримых функций

Закиров Б.С.[1], Чилин В.И.[2]

[1,2] Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
vladimirchil@gmail.com; botirzakirov@list.ru

Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с σ-конечной мерой, $L^0(\Omega)$ алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) и пусть $B(\Omega)$ полная булева алгебр всех идемпотентов из $L^0(\Omega)$.

Пусть B произвольная полная булева алгебра, $Q(B)$ стоуновский компакт, соответствующий B, и пусть $C_\infty(Q(B))$ алгебра всех непрерывных функций $x : Q(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$.

Пусть $m : B \to L^0(\Omega)$ – строго положительная $L^0(\Omega)$-значная мера на B, обладающая свойством Магарам, т.е. для любых $e \in B$, $f \in L^0(\Omega)$, $0 \le f \le m(e)$, существует такое $q \in B$, $q \le e$, что $m(q) = f$. В этом случае [1], существует единственный инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$ такой, что $\nabla(m) = \varphi(B(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. Кроме того, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с подалгеброй $C_\infty(Q(\nabla(m)))$ в алгебре $C_\infty(Q(B))$.

Пусть $L^1(B, m)$ пространство всех m-интегрируемых элементов из $C_\infty(Q(B))$. Для каждого $x \in L^1(B, m)$ формула $\|x\|_{1,m} := \int |x| dm$ определяет $L^0(\Omega)$-значную норму на $L^1(B, m)$. Поскольку, m – мера Магарам, то пара $(L^1(B, m), \|x\|_{1,m})$ является пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ (см. [2, 6.1.10]).

Для каждого $p \ge 1$ положим $L^p(B, m) = \{x \in C_\infty(Q(B)) : |x|^p \in L^1(B, m)\}$, $\|x\|_{p,m} := \left[\int |x|^p dm\right]^{\frac{1}{p}}$, $x \in L^p(B, m)$. Известно, что для меры Магарам m пара $(L^p(B, m), \|x\|_{p,m})$ также является пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ решеточно нормированные пространства над $L^0(\Omega)$. Линейный оператор $T : X \to Y$ называется $L^0(\Omega)$-*ограниченным,* если существует такой элемент $\mathbf{0} \le \alpha \in L^0(\Omega)$, что $\|T(x)\|_Y \le \alpha\|x\|_X$ для всех $x \in X$. Пусть $L_b(X, Y)$ векторное пространство всех $L^0(\Omega)$-ограниченных операторов из X в Y. Каждый оператор $T \in L_b(X, Y)$ имеет $L^0(\Omega)$-значную норму, которая определяется по формуле $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in B_X\}$, где $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \le \mathbf{1}\}$ – единичный шар в $(X, \|\cdot\|_X)$ и $\mathbf{1}$ - единица в булевой алгебре $B(\Omega)$. Если $(X, \|\cdot\|_X)$ разложимое решеточно нормированное пространство, а $(Y, \|\cdot\|_Y)$ пространство Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$, тогда $(L_b(X, Y), \|\cdot\|)$ также является пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ (см. [2, 4.2.6]).

Если $Y = L^0(\Omega)$, тогда $X^* := L_b(X, L^0(\Omega))$ называется $L^0(\Omega)$-*сопряженным пространством* к решеточно нормированному пространству $(X, \|\cdot\|_X)$. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ из X $\sigma(X, X^*)$-*сходится к* $x \in X$, если последовательность $\{T(x_n)\}$ (o)-сходится к $T(x)$ для всех $T \in X^*$.

В случае, когда $Y = X$, через $BL(X) := L_b(X, X)$ обозначим пространство всех $L^0(\Omega)$-ограниченных линейных операторов в $(X, \|\cdot\|_X)$. Если $T \in BL(X)$ и $\|T\| \le \mathbf{1}$, то T называется *сжатием.*

Положительный оператор T в пространстве Банаха-Канторовича $(X, \|\cdot\|_X)$ над $L^0(\Omega)$ называется *средно-эргодическим*, если последовательность $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^n x$ является (bo)-сходящейся в $(X, \|\cdot\|_X)$, т.е. последовательность $\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^n x\right\|_X$ (o)-сходится в решетке $L^0(\Omega)$, для каждого $x \in X$.

Положительный оператор $T \in BL(L^1(B,m))$ называется (L_1, L_∞)-*сжатием*, если $T\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ и $\|T\|_{L_1(B,m)\to L_1(B,m)} \leq \mathbf{1}$. Множество всех (L_1, L_∞)-сжатий обозначим через $PC(B,m)$. Каждый оператор $T \in PC(B,m)$ является средно-эргодическим [3, Теорема 3.2 (i)].

Определение 1. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ – пространство Банаха-Канторович над $L^0(\Omega)$. Оператор $T \in BL(X)$ обладает свойством Блюма-Хансона, если существует (bo)-предел (bo)-$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} T^{k_i}x$ для каждого $x \in X$ и для каждой строго возрастающей последовательности $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ натуральных чисел.*

Ясно, что любой положительный оператор со свойством Блюма-Хансона является средно-эргодическим (достаточно в Определение 1 взять $k_n = n$).

Следующая теорема есть векторнозначный вариант теоремы Блюма-Хансона [4] для L_1-сжатий, действующих в пространстве Банаха-Канторовича $(L^1(B,m), \|x\|_{1,m})$.

Теорема 1. *Пусть T – сжатие в $(L^1(B,m), \|x\|_{1,m})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Последовательность $(T^n x)_{n\geq 1}$ $\sigma(X, X^*)$-сходится в $(L^1(B,m), \|x\|_{1,m})$ для всех $x \in L^1(B,m)$.*

2. *Последовательность $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} T^{k_i}x\right)_{n\geq 1}$ (bo)-сходится в $(L^1(B,m), \|x\|_{1,m})$ для каждого $x \in L^1(B,m)$ и для всех строго возрастающих последовательностей $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ натуральных чисел.*

Следующий результат касается (L_1, L_∞)-сжатий, действующих в пространстве Банаха-Канторовича $(L^1(B,m), \|x\|_{1,m})$.

Теорема 2. *Пусть $T \in PC(B,m)$, $1 \leq p < \infty$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Последовательность $(T^n x)_{n\geq 1}$ является $\sigma(L^p(B,m), L^p(B,m)^*)$-сходящейся в $(L^p(B,m), \|x\|_{p,m})$ для всех $x \in L^p(B,m)$.*

2. *Последовательность $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} T^{k_i}x\right)_{n\geq 1}$ (bo)-сходится в $(L^p(B,m), \|x\|_{p,m})$ для каждого $x \in L^p(B,m)$ и для всех строго возрастающих последовательностей $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ натуральных чисел.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chilin V., Zakirov B.** *Decomposable L_0-valued measures as measurable bundles,* Positivity, 2010, 14 (3). 395–405.

2. **Кусраев А.Г.** *Мажорируемые операторы.* - М.: Наука, 2003. - 619 с.

3. **Zakirov B.S. and Chilin V.I.** *Ergodic theorems for contractions in Orlich-Kantorovich lattices,* Sib. Math. J., 2009, 50, 1027–1037.

4. **Akcoglu M.A., Sucheston L.** *On operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space* Period. Math. Hungar, 1972, **2**, 235–244.

УДК 511.345

О решении некоторых аддитивных задач типа Варинга–Гольдбаха.

Имамов О.Ш.
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
oybekimamov000@gmail.com

В данной статье представлены некоторые результаты, полученные мной в последние годы совместно с моим научным руководителем, профессором Исмаилом Аллаковым, по ряду аддитивных задач типа Варинга–Гольдбаха.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю, профессору Исмаилу Аллакову, за оказанную помощь и поддержку при получении данных результатов.

Классический результат Hua Loo-Keng'а [1] о диофантовых квадратных уравнениях гласит, что каждое большое целое число, сравнимое с 5 по модулю 24, представимо в виде суммы 5 простых квадратов. Впоследствии Yonghui Wang [2] доказал, что для простых чисел, принадлежащих арифметической прогрессии

$$\begin{cases} b = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2, \\ p_i \equiv l_i \,(\mathrm{mod}\, D)\,,\ i = 1, \ldots, 5. \end{cases} \tag{1}$$

диофантово уравнение имеет решение при условиях $D \leq N^{\delta}$, $b \equiv 5\,(\mathrm{mod}24)$. Для числа решений уравнения (1), обозначаемого через $r(N)$, впервые была получена следующая оценка [3].

Теорема 1. Если N- достаточно большое число и $Q = N^{21\delta}$, существует эффективная положительная константа δ для $D \leq N^{\delta}$ справедлива оценка

$$r(N) \geq N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{2}{5}} (\ln N)^{-5}.$$

Расширенным видом уравнения (1) является уравнение

$$\begin{cases} b = a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^2 + a_4 p_4^2 + a_5 p_5^2 \\ p_j \equiv l_j (\mathrm{mod} D),\ \ 1 \leq j \leq 5 \end{cases} \tag{2}$$

Для числа решений уравнения (2), обозначаемого через $r(N)$, нами получена следующая оценка [4],[5].

Теорема 2. Пусть $P := N^{\delta}$, где δ достаточно малое положительное число.Тогда существует эффективно вычисляемая положительная постоянная $c > 0$ такая , что для всех достаточно больших $N \geq B$ справедлива следующая оценка:

$$r(N) \gg \frac{N^{\frac{3}{2}} D}{\varphi^5(D) P^{\frac{5}{39}} |a_1 \cdots a_5|^{\frac{9}{2}} \ln^5 N}.$$

Здесь $a_1,\ \ldots\ , a_5$ целые числа, удовлетворяющие условиям $a_1 \cdots a_5 \neq 0$ и $(a_1, ..., a_5) = 1$ а также $B := \max\{3, D, |a_1|, ..., |a_5|\}$.

Известно, что после доказательства теоремы Ж. Л. Лагранжа, о представлении заданного целого числа в виде суммы квадратов четырех целых чисел первым, кто обратил внимание на задачу представления данного целого числа в виде суммы квадратов четырех простых чисел $p_1, ..., p_4$ был Л. К.Хуа.

$$n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \tag{3}$$

Пусть N-достаточно большое натуральное число и $U(N) = \{n \mid 1 < n \leq N, n \equiv 4(\mathrm{mod}\ 24), n \neq p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2\}$, $E(N) = cardU(N)$. Л. К.Хуа доказал, что $E(N) \ll N\log^{-A}N$, где $A > 0-$ некоторая постоянная, $\ll -$ символ Виноградова. В 2000 году J. Y. Liu и M. C. Liu [3] доказал, что если $N \geq 2$ va $U(N)$ множество положительных целых чисел $n \equiv 4(mod24)$, $n \leq N$ которое нельзя представит в виде (3). $E(N) = cardU(N)$ тогда справедлива оценка $E(N) \ll N^{\theta}$, где $\theta > 13/15$. Эта оценка была улучшена следующим образом, и для числа представлений $R(n)$ получена следующая оценка снизу [6].

Теорема 3. Если $N-$ достаточно большое число тогда,

$$E(N) \ll N^{13/15+C(N)}, \quad \text{где} \quad C(N) = \frac{c_1}{\ln\ln N}$$

для $n \notin U(n)$

$$r(n) = \frac{\pi^2}{16}\mathfrak{S}(n)n + O\left(NL^{-1}\right).$$

Для числа представление заданного $N/2 < n \leq N$, $n \equiv 4(mod24)$ справедлива оценка

$$R(n) > c_2\frac{n}{\ln^4 n}\left(1 - c_3\frac{1}{\ln n}\right)$$

Мы исследуем существования решений уравнения (3) в простых числах из арифметической прогрессии. Для удобства введем следующие обозначения:

$$U(N,D) = \left\{\bar{b} \in \mathbb{N}^4 : 1 \leq b_i \leq d,\ (b_i, D) = 1,\ \ b_1^2 + \cdots + b_4^2 \equiv n\,(\mathrm{mod}\sigma(D)D)\right\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\ D)$, $i = 1, ..., 4$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_4) \in U(N, D)$. Здесь $\sigma(D) = 1, 4, 2$ соответственно означает $2 \nmid D$, $2 \| D$ и $4|D$. Пусть $S_D(n) -$ количество решений уравнения (3) в простых числах $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\ D)$, $i = 1, ..., 4$; а $E_D(n) -$ количество n $(2 < n \leq N)$, которые не представимо в виде суммы четырёх квадратов простых чисел из арифметической прогрессии $p_i \equiv b_i(\mathrm{mod}\ D)$, $i = 1, ..., 4$. Тогда имеют место следующие теоремы [7].

Теорема 4. Если $n \equiv 4\,(\mathrm{mod}24)$, $2 \leq D \leq N^{\delta}$, тогда справедлива оценка

$$E_{Dm}(N) \ll N(Q^{15/14}\,D)^{-1}.$$

Метод, используемый в доказательстве теоремы, позволяет получить оценку для $S_d(n)$ при $N/50 < n \leq N$.

Теорема 5. Для всех n $(N/50 < n \leq N)$, удовлетворяющие условию $n \equiv 4\,(\mathrm{mod}24)$, за исключением не более чем $N\left(Q^{15/14}\,D\right)^{-1}$ значений, справедлива оценка

$$S_D(n) \gg n^{1-7\delta}(D^{1/2}\log^4 n)^{-1}.$$

Рассмотрим уравнение

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3^2 = b, \tag{4}$$

где a_1, a_2, a_3, b -целые числа, а p_1, p_2, p_3 простые числа.

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_i \neq 0$ при $i = 1, 2, 3$ и $EKUB(a_1, a_2, a_3) = 1$. Пусть $B := \max\{2, |a_1|, |a_2|, |a_3|\}$. Тогда для решения уравнения (4) в простых числах p_i из арифметической прогрессии ($p_i \equiv l_i(\mathrm{mod}D)$,$i = 1, 2, 3$, $D \leq N^{\delta}$) справедлива следующая теорема [8].

Теорема 6. Если a_1, a_2, a_3, b удовлетворяют вышеуказанным условиям. Тогда существует эффективное вычисляемое постоянное число $A > 0$ такое, что справедливы следующие утверждения:

a) если все a_1, a_2, a_3 положительные и $b \geq B^A$, то уравнение (1.1) имеет решение в простых числах p_1, p_2, p_3 из арифметической прогрессии $p_i \equiv l_i (\mathrm{mod} D)$,$i = 1, 2, 3$, $D \leq N^\delta$;

b) если не все a_1, a_2, a_3 имеют одинаковой знак, то уравнение (1.1) имеет решение в простых числах p_1, p_2, p_3 из арифметической прогрессии $p_i \equiv l_i (\mathrm{mod} D)$,$i = 1, 2, 3$, $D \leq N^\delta$, которые не превосходит $3|b| + B^A$.

Теорема 7. Если N достаточно велико, то количество решений уравнения (1.1) в простых числах $NB^{-1} < p_1, p_2, p_3 \leq N$, $p_i \equiv l_i (\mathrm{mod} D)$, $i = 1, 2, 3$, $D \leq N^\delta$ не меньше чем

$$c_1 N^{3/2} \Big(BQ^{83/420} D \ln^3 N \Big)^{-1},$$

где c_1 -положительная постоянная, $Q = N^{21\delta}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hua Loo-Ken.** *Some results in the additive prime number theory* // Quart. J. Math.Oxford.1938, pp. 68-80.

2. **Yonghui Wang** *Numbers representable by five prime squares with primes in an arithmetic progression.* // Acta Arithmetica. 1999, Vol.90,№3, pp.217–244.

3. **Имамов О.Ш.** *О количестве представлений натурального числа в виде суммы пяти квадратов простых чисел из арифметической прогрессии.*// Научный вестник НамГУ, № 4. с. 78-83. (2024).

4. **Аллаков И., Имамов О.Ш.** *О числах, представимых в виде суммы пяти квадратов простых чисел, из арифметической прогрессии.* //Научный вестник СамГУ, № 3. с. 113-119. (2024).

5. **Allakov I., Imamov O.** *A lower estimate for the quantity of a natural number represented as a sum of five squared prime numbers from an arithmetic progression.* // Bull. Inst. Math. V 7, № 4, pp. 86-93. (2024).

6. **Imamov O.** *О решении одного уравнения в простых числах .* // Samarkand University Scientific Bulletin, № 1, pp. 106-110. (2025).

7. **Аллаков И., Имамов О.Ш.** *О представлении чисел в виде суммы квадратов четырёх простых из арифметической прогрессии.* Материалы международной научной конференции “Современные проблемы математики и ее приложения“, посвящённой 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича и 75-летию доктора физико-математических наук, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А.Джураева НАНТ, профессора Джангибекова Гулходжи. Душанбе, 30-31 мая 2025 г.

8. **Аллаков И., Имамов О.Ш.** *О представлении чисел в виде суммы двух простых чисел и квадрата третьего простого числа из арифметической прогрессии.* Zamonaviy matematikaning dolzarb muammolari va uning tatbiqlari. Akademik T.A.Sarimsoqov tavalludining 110 yilligiga bag‘ishlangan xorijiy olimlar ishtirokidagi respublika miqyosidagi ilmiy anjuman tezislari to‘plami. Toshkent 10-11-sentyabr, 2025 yil.

УДК 524.11

Оценка коротких сумм значений характеров от квадратичного многочлена с простыми числами

Каримзода Дониёр Джалил

Институт математики им.А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана, г.Душанбе, Таджикистан; khdj.91@mail.ru

Метод И. М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами вместе с методом Хассе А. Вейля оценок полных тригонометрических сумм позволяет изучать распределение значений неглавного характера по простому модулю q от многочленов $f(x)$, когда x принимает последовательные значения простых чисел. На возможность такого изучения указано в [1], стр. 305, и осуществлено это в [2], где получены оценки достаточно общих сумм, нетривиальные уже при числе слагаемых порядка $q^{1+\varepsilon}$. А.А. Карацуба [3] изучает суммы символов Лежандра по простым числам при условии $f(x) = (x-a)(x-b)$, $a \not\equiv b(\mod q)$, и числе слагаемых порядка $q^{0,75+\varepsilon}$. Он доказаль следующего теорему:

Теорема. *Пусть ω — произвольное число из интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Тогда при любом $N > q^{0,75+\omega}$ для суммы S_N,*

$$S_N = \sum_{p \le N} \left(\frac{f(p)}{q}\right)$$

справедлива оценка

$$S_N \ll \pi(N) q^{-0,01\omega^2} \tag{1}$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ω. Одной из важнейших задач является обобщение эти теоремы на произвольные неглавные характеры, а также на суммы, в которых суммирование ведется по числам с одним и тем же количеством простых сомножителей, по простым числам из арифметической прогрессии.

Хокиев Д.Дж. [4] исследует короткие суммы значений характеров на специальной последовательности натуральных чисел и получает нетривиальную оценку коротких сумм значений примитивного характера Дирихле χ_q на последовательности сдвинутых чисел $n - \eta$, при условии, что $x - y < n \le x$, $(n, q) = 1$, $n \equiv \lambda (\mod d)$. Он доказал теорему:

Теорема. *Пусть D — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порожденный характером χ, q_1 — произведение простых чисел, делящих D, но не делящих числа q, $d \backslash q_1$, $(\eta, q) = (\lambda, d) = (d, q) = 1$, $y < x$, $x < q$, тогда*

$$S = \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ (n,q)=1,\, n\equiv\lambda \pmod d}} \chi_q(n-\eta) \le 2^{\omega(q)} \sqrt{q} \ln q. \tag{2}$$

Основным результатом данной работы является обобщение теоремы А.А. Карацубы на произвольные неглавные характеры, а также на суммы, в которых суммирование ведётся по числам с фиксированным числом простых сомножителей и по простым числам.

Теорема. *Пусть $f(n)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами, $y < x$, l — целое число число*

$$S = \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ (n,q)=1}} \chi_q(f(n)), \qquad \tau(f,l) = \sum_{1\le n\le q} \chi_q(f(n)) e\left(\frac{ln}{q}\right).$$

Тогда имеет место оценка

$$|S| \leq \max_{1\leq l\leq q} |\tau(f,l)| \left(\frac{y+1}{q} + 2^{\omega(q)}\right) \ln q. \tag{3}$$

Литература

1. Виноградов И. М. Избранные труды — М: Изд-во АН СССР, 1952 г.
2. Перельмутер Г.И.. Оценкаодной суммы с простыми числами, Докл. АН СССР,т.144, №1 (1962),48-51.
3. Карацуба А.А. Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, том 42, выпуск 2, 315-324.
4. Хокиев Д.Дж. Оценка короткой суммы значений характеров Дирихле по составном модулю на последовательности сдвинутых чисел, Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2017., Т. 60., №1-2.С.5-11

УДК 519.852.2

Алгоритм построения решения в параллелепипеде системы линейных уравнений с параметром из прямоугольника

Маматов А. Р.
Самаркандский государственный университет имени Ш. Рашидова, Самарканд, Узбекистан; akmm1964@ramblerru

Как отмечается в [1], теория, методы и практические приложения линейного программирования, не остались в прошлом – они развиваются в наши дни, когда к многочисленным приложениям присоединились задачи, связанные с проблемами создания систем искусственного интеллекта и обработки больших объемов данных. Важной частью задачи линейного программирования является задача построения начального плана – неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений или решения системы линейных алгебраических уравнений из параллелепипеда. Общая теория систем линейных равенств приведена в учебниках по алгебре, например в [2], общая теория систем линейных неравенств приведена в [3]. Методы нахождения решений (как правило, одно) систем линейных уравнений из параллелепипеда приведена в [4]. Задача определения непустоты множества решений систем линейных уравнений с параметрами из паралелепипеда рассмотрена в [5].

Рассмотрим множества

$$X = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*\} \text{ и } Y(x) = \{y \mid g_* \leq y \leq g^*, Ax + By = b\},$$

где $x, f_*, f^* \in \mathbb{R}^2, y, g_*, g^* \in \mathbb{R}^l, b \in \mathbb{R}^m, B \in \mathbb{R}^{m\times l}, rankB = m < l, A \in \mathbb{R}^{m\times 2}$.

На множествах X и $Y(x)$ рассмотрим задачу: Требуется, для каждого параметра $x \in X$, при котором $Y(x) \neq \varnothing$ построить $Y(x)$, т.е. решить систему линейных уравнений $Ax+By = b$ в параллелепипеде $g_* \leq y \leq g^*$.

Предложен и обоснован алгоритм решения рассматриваемой задачи. Алгоритм основан на решений не более трех задач линейного программирования и построения конечного числа закрытых выпуклых многогранников, при параметрах из которых системы линейных уравнений имеют решения. Для построения соседней области к некоторой границе некоторого закрытого выпуклого многогранника используется теория двойственности линейного программирования. Приводится иллюстративный пример.

Литература

1. **Ерохин В.И., Тамасян Г.Ш., Степенко Н.А.** *Ускоренный фейеровский процесс поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений*//Тр. Инта математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31, № 3. (Online First)
2. **Ayupov Sh.A., Omirov B.A., Xudoyberdiyev A.X., Haydarov F.H.** *Algebra va sonlar nazariyasi.* Toshkent: 2019. 319 b.
3. **Черников С.Н.** *Линейные неравенства.* М.: Наука, 1968. 488 р.
4. **Габасов Р. и др.** *Методы оптимизации.* Минск: Изд-во "Четыре четверти". 2011. 472 с.
5. **Mamatov A. R.** *Algorithm for Solving the Problem of the First Phase ina Game Problem with Arbitrary Situations*//Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 48, С. 3–20.

Асимптотическая формула для специальных коротких тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах

Рахмонов Д. Д.

Институт математики им.А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана, г.Душанбе, Таджикистан; r.doston@bk.ru

Короткую линейную тригонометрическую сумму с простыми числами вида

$$S_1(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n)$$

впервые начал исследовать И.М. Виноградов [1]. Он, воспользовавшись своим методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами, получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln \mathscr{L}_x)^2))$, $\mathscr{L}_x = \ln x$ при $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при условии $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

К.В. Хазелгров [2] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$ получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}_x^b)$ и асимптотическую формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^b)$ при

$$y \ge x^\theta, \qquad \theta = \frac{63}{64} + \varepsilon,$$

и впервые доказал асимптотическую формулу в тернарной задаче Гольдбаха с почти равными слагаемыми, то есть для числа решений диофантова уравнения вида

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \le H, \qquad H \ge N^\theta.$$

Затем Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [3] показали, что $\theta = \frac{2}{3} + \varepsilon$. В 1991 г. Т. Жан [4], используя метод Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо заменил показатель на $\theta = \frac{5}{8} + \varepsilon$.

В работе [5] изучено поведение суммы $S_1(b\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^c)$ при $y \ge x^{\frac{5}{8}} bh \mathscr{L}_x^{2,25A+81}$ и $b \le \mathscr{L}_x^B$, где B и c — произвольные абсолютные постоянные. Суммы $S_1(b\alpha; x, y)$ возникают при решении обобщения тернарной проблемы Гольдбаха вида

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N, \qquad \left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \le H,$$

в простых числах p_1, p_2 и p_3 с растущими коэффициентами b_i и при условии, что слагаемые почты равны.

Докладчиком этого тезиса, для коротких тригонометрических сумм с простыми числами вида $S_1(b\alpha; x, y)$ доказана асимптотическая формула с остаточным членом в больших дугах вида $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_x^{c_1})$ при $\tau = y^2x^{-1}\mathscr{L}_x^{-c_1}$. Этот результат уточняет вышеуказанный результат работы [5]. Приведем данный результат в виде теоремы:

Теорема. *Пусть $x \geq x_0$, A, B, и c_1 — абсолютные постоянные числа, b — натуральное число, $b \leq \mathscr{L}_x^B$,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq h, \quad h \leq \mathscr{L}_x^{c_1}, \quad \tau = \frac{y^2}{xh}.$$

Тогда при $y \geq x^{\frac{5}{8}}bh\mathscr{L}_x^{1,5A+16,5}$ справедливо равенство

$$S_1(b\alpha; x, y) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b,q)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b,q)}\right)} \frac{\sin \pi b\lambda y}{\pi b\lambda} e\left(b\lambda\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(y\mathscr{L}_x^{-A}\right).$$

Литература

1. Виноградов И.М. Избранные труды — М: Изд-во АН СССР, 1952 г.
2. Haselgrove C. B. Some theorems in the analitic theory of number. — J. London Math. Soc., 1951, v. 26, pp. 273-277.
3. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals. — Chinese Ann. of Math. 1990, v. 2. pp. 138-147.
4. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes. — Acta Math Sinica. New ser., 1991, v. 7, № 3, pp. 135 – 170.
5. Рахмонов З.Х., Аллаков И., Абраев Б.Т. Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми. — Чебышевский сборник, 2023, т. 24, № 4, с. 264-298.

УДК 511.346

Средние значения функций Чебышёва с экспоненциальным весом в коротких интервалах и короткие тригонометрические суммы с простыми числами

Рахмонов Зарулло Хусенович

Институт математики им.А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана, г.Душанбе, Таджикистан; zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmonov@gmail.com

Для характера Дирихле χ по модулю q, фиксированного натурального n и вещественного λ вводим функцию

$$\psi_n(u, \chi, \lambda) = \sum_{m \leq u} \Lambda(m)\chi(m)e(\lambda m^n),$$

которая при $\lambda = 0$ совпадает с обычной функцией Чебышёва, и назовём её функцией Чебышёва с экспоненциальным весом степени n. В предположении справедливости расширенной

гипотезы Римана для средних значений таких функций в коротких интервалах по всем характерам модуля q при $y \geq \sqrt{x}\mathscr{L}^2$, $\mathscr{L} = \ln xq$, имеет место оценка

$$t_n(x;q,y,\lambda) = \sum_{\chi \bmod q} |\psi_n(x,\chi,\lambda) - \psi_n(x-y,\chi,\lambda)| \ll y + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^2. \tag{1}$$

При решении ряда задач теории простых чисел достаточно, чтобы для $t_n(x;q,y,\lambda)$ имелась оценка, близкая к (1). Эта задача при $\lambda = 0$ и $y = x$ превращается в классическую задачу о среднем значении функций Чебышёва вида

$$t(x;q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} |\psi(y,\chi)|,$$

которую впервые исследовал Ю. В. Линник [1] для вывода нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами, а затем А. А. Карацуба [2] для изучения закона распределения чисел вида $p(p_1 + a)$ в коротких арифметических прогрессиях. Воспользовавшись методом большего решета Ю. В. Линника, Г. Монтгомери [3] доказал плотностные теоремы для нулей L-функции Дирихле, с помощью которых показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)\mathscr{L}^{17}. \tag{2}$$

Этот результат уточнил Р. Вон [4]. Он доказал, что

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{\frac{7}{2}}. \tag{3}$$

Дальнейшего улучшения добился автор [5,6,7]. Он доказал, что

$$t(x;q) \ll x\mathscr{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{31} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}^{32}.$$

Автор [8,9,10] воспользовавшись методами работы [5] и теоремой М. Ютилы о четвёртом моменте L-функций Дирихле в критической прямой, доказал, что если $y \geq x^{\frac{3}{5}}$, $q \leq xy^{-1}$, $|\lambda| \leq xy^{-2}$, то имеет место оценка

$$t_1(x;q,y,\lambda) \ll \left(x^{\frac{1}{2}}q + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}q|\lambda|^{\frac{1}{3}}\right)x^{0,5\varepsilon} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{35} + y\mathscr{L}^{35}.$$

В этой работе воспользовавшись методом получения последней оценки, находим равномерную оценку по параметрам оценку средних значений функций Чебышёва с экспоненциальным весом степени n в коротких интервалах по всем характерам Дирихле по модуля q.

Теорема 1. *Пусть $y \geq \sqrt{x}\mathscr{L}^2$, $q \leq x^3y^{-3}$, $|\lambda| \leq \left(x^{n-2}y^2\right)^{-1}$, тогда справедлива оценка*

$$t_n(x;q,y,\lambda) \ll x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\varepsilon}q + x^{\frac{n}{3}+\frac{3}{10}\varepsilon}y^{\frac{1}{2}}q|\lambda|^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{30} + y\mathscr{L}^{30},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n и ε.

Отсюда получим следующую упрощенную оценку.

Следствие 1.1. *Пусть $y \geq \sqrt{x}\mathscr{L}^2$, $q \leq x^3y^{-3}$, $|\lambda| \leq \left(x^{n-2}y^2\right)^{-1}$, тогда справедлива оценка*

$$t_n(x;q,y,\lambda) \ll x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{10}\varepsilon}y^{-\frac{1}{6}}q + x^{\frac{3}{10}}y^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{30} + y\mathscr{L}^{30}.$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n и ε.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Виноградов И.М. [11] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} \Lambda(n) e(\alpha m^n),$$

при $n = 1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Затем С. Б. Хейзелгроув, В. Статулявычус, Ч. Д. Пан и Ч. Б. Пан, Ж. Тао для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \ge x^{\theta_1}$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \le H$, $H = N^{\theta_1}$, соответственно при

$$\theta_1 = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Дж. Лю и Ж. Тао [12,13], изучая сумму $S_n(\alpha; x, y)$, $y \ge x^{\theta_n}$ в случае $n = 2$, условно (в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана) при $\theta_2 = \frac{2}{3}+\varepsilon$ и безусловно при $\theta_2 = \frac{11}{16} + \varepsilon$ доказали, что для любого $A > 0$ существуют константы $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ и справедливо соотношение

$$S_n(\alpha; x, y) = \begin{cases} M_n(\alpha; x, y) + O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right), & q \le \mathscr{L}_x^{c_1},\ |\lambda| \le \dfrac{1}{xy^{n-1}\mathscr{L}_x^{c_2}}; \\ O\left(\dfrac{y}{\mathscr{L}_x^A}\right), & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4}$$

$$M_n(\alpha; x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{q} e\left(-\frac{ah^n}{q}\right) \int_{x-y}^{x} e(\lambda u^n) du, \quad \tau = \frac{y^{2n-1}}{x^{n-1}\mathscr{L}_x^{c_3}},$$

а также получили при $n = 2$ асимптотическую формулу для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^n, \qquad \left|p_j - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad \left|p_3^n + \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{1+\theta_n}{2}}. \tag{5}$$

Затем Г. С. Лю и Х. Х. Лао [14] безусловно доказали, что $\theta_2 = \frac{2}{3} + \varepsilon$.

Дж. Лю и Ж. Тао [15] доказали соотношение (4) в случае $n \ge 3$ при

$$\theta_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}+1} + \varepsilon, & \text{если } 3 \le n \le 5; \\ 1 - \dfrac{1}{n^2+3n+4} + \varepsilon, & \text{если } n \ge 6, \end{cases}$$

и нашли асимптотическую формулу для количества представлений числа N в виде (5). B. Huang и Z. Wang [16] показали, что имеет место

$$\theta_n = \begin{cases} \dfrac{4}{5} + \varepsilon, & \text{если } n = 3; \\ 1 - \dfrac{1}{2n} + \varepsilon, & \text{если } n \geq 4. \end{cases}$$

Наилучший результат в больших дугах принадлежит А. В. Кумчеву [17]. Он доказал: *пусть* $n \geq 1$, $0,7 < \theta \leq 1$, $0 < \rho \leq \min\left(\frac{8\theta-5}{6(n+1)}, \frac{10\theta-7}{15}\right)$, $P = x^{2n\rho}$, α *— вещественное число, а целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$1 \leq q \leq P, \qquad (a,q) = 1, \qquad |q\alpha - a| \leq x^{-n+2-2\theta}P,$$

тогда имеет место оценка

$$S_n(\alpha; x, x^\theta) \ll x^{\theta-\rho+\varepsilon} + \frac{x^{\theta+\varepsilon}}{\sqrt{q(1 + x^{n-2+2\theta}|q\alpha - a|)}}. \tag{6}$$

Б. Хуан [18] в больших так и в малых дугах доказал: *пусть* $n \geq 3$, $0,75 < \theta \leq 1$, $0 < \rho \leq \min\left(\frac{\theta-0,75}{16n(n-1)}, \delta\right)$, $\delta = \delta(n) > 0$, $P = x^{2(n-2)(n-1)n(n+1)\delta}$, α *— вещественное число, а целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$1 \leq q \leq \tau, \qquad (a,q) = 1, \qquad |q\alpha - a| \leq x^{-n+2-2\theta}P,$$

тогда имеет место оценка

$$S_n(\alpha; x, x^\theta) \ll x^{\theta(1-\rho+\varepsilon)} + \frac{x^{\theta+\varepsilon}}{(q + x^{n-2+2\theta}|q\alpha - a|)^{\frac{1}{2n}}}. \tag{7}$$

Из теоремы 1 получим нетривиальные оценки для более коротких тригонометрических сумм с простыми числами вида $S_n(\alpha; x, y)$.

Теорема 2. *Пусть* $\theta \geq 0,6$, α *— вещественное число, а целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$q \leq x^{3-3\theta}, \qquad (a,q) = 1, \qquad |q\alpha - a| \leq x^{-n+2-2\theta}q,$$

тогда для всякого $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$S_n(\alpha; x, x^\theta) \ll \left(x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{n}{3}+0,5\theta}q^{\frac{1}{6}}|q\alpha - a|^{\frac{1}{3}}\right)x^{\frac{1}{3}\varepsilon} + \left(x^{\frac{3}{10}+0,5\theta} + \frac{x^\theta}{q^{0,5}}\right)(\tau(q))^{\frac{\ln n}{\ln 2}}\mathscr{L}^{31}.$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n *и* ε.

Из упрощенной оценки для $t_n(x; q, y, \lambda)$ в следствие 1.1, имеем

Следствие 2.1. *Пусть* $\theta \geq 0,6$, α *— вещественное число, а целые числа* a *и* q *удовлетворяют условиям*

$$q \leq x^{3-3\theta}, \qquad (a,q) = 1, \qquad |q\alpha - a| \leq x^{-n+2-2\theta}q,$$

тогда для всякого $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$S_n(\alpha; x, x^\theta) \ll x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{3}\varepsilon}q^{\frac{1}{2}} + \left(x^{\frac{3}{10}+0,5\theta} + x^\theta q^{-\frac{1}{2}}\right)(\tau(q))^{\frac{\ln n}{\ln 2}}\mathscr{L}^{31}. \tag{8}$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n и ε.

Представляя q в виде $q = x^{æ}$, где $æ = \ln q\mathscr{L}^{-1}$ и воспользовавшись соотношением $\tau(q) \ll q^{\frac{\ln 2}{2\ln n}\varepsilon}$, правую часть (8) представим в виде

$$S_n(\alpha; x, x^\theta) \ll x^\theta \left(x^{-\frac{7}{6}\left(\theta-\frac{3}{5}-\frac{3}{7}\left(æ-\frac{1}{15}\right)-\frac{2}{7}\varepsilon\right)} + x^{-\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{3}{5}-æ\varepsilon-\frac{62\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right)} + x^{-\frac{1}{2}\left(æ-æ\varepsilon-\frac{62\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right)} \right).$$

Следовательно оценка (8) нетривиальна, если, выполняются условия

$$\theta > \max\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{7}\left(æ-\frac{1}{15}\right)+\frac{2}{7}\varepsilon,\quad \frac{3}{5}+æ\varepsilon+\frac{62\ln\mathscr{L}}{\mathscr{L}}\right), \qquad æ > \frac{62\ln\mathscr{L}}{(1-\varepsilon)\mathscr{L}}.$$

Отсюда и из следствие 2.1, а также из неравенства $æ \le 3-3\theta \le 1,2-3,6\varepsilon$, получим следующие утверждения.

Следствие 2.2. *Пусть $x \ge x_0$, $P \ge \mathscr{L}^{\frac{66}{1-\varepsilon}}$, α — веществ иенное число, а целые числа a и q удовлетворяют условиям*

$$P \le q \le \min(x^{\frac{1}{15}}, x^{3-3\theta}), \qquad (a,q)=1, \qquad |q\alpha - a| \le x^{-n+2-2\theta}P,$$

тогда при $\theta > 0,6+\frac{2}{7}\varepsilon$ оценка (8) нетривиальна.

Следствие 2.3. *Пусть $x \ge x_0$, $P > x^{\frac{1}{15}}$, α — вещественное число, а целые числа a и $q = x^{æ}$ удовлетворяют условиям*

$$P \le q \le x^{3-3\theta}, \qquad (a,q)=1, \qquad |q\alpha - a| \le x^{-n+2-2\theta}P,$$

тогда при $\theta > \frac{4}{7}+\frac{3}{7}æ+\frac{2}{7}\varepsilon$ оценка (8) нетривиальна.

Полученные оценки в отличие от оценок (6) и (7) принадлежащих соответственно А. В. Кумчеву и Б. Хуану является нетривиальным для более коротких сумм $S_n(\alpha; x, x^\theta)$, причём относительно параметра q при $q \gg \mathscr{L}_x^{70}$.

Литература

1. **Линник Ю. В.** *Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова* // Математический сборник. 1946. V. 19, № 1. С. 3-8.

2. **Карацуба А. А.** *Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях* // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. Вып. 4. С. 724 — 727.

3. **Монтгомери Г.** *Мультипликативная теория чисел* — М.: изд-во Мир, 1974.

4. **Vaughan R.** *Mean value theorems in prime number theory* // J. London Math. Soc. (2). 10(1975), 153 – 162.математическая. 1989. Т. 52, № 1. С. 211 – 224.

5. **Рахмонов З.Х.** *Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения* // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57, №4. С. 55 – 71.

6. **Рахмонов З.Х.** *Средние значения функции Чебышёва* // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 331. № 3. С. 281 – 282.

7. **Рахмонов З.Х., Нозиров О.О.** *О средних значениях функций Чебышёва и их приложениях* // Чебышёвский сборник. 2021. Т. 22. № 5(81). С. 198 – 222.

8. **Рахмонов З.Х.** *Простые числа и средние значения функций Чебышева*// Автореферат дисс. ... дост. физ.-матем. наук. 1996. Москваю Изд-во Моск. ун-та.

9. **Рахмонов З.Х.** *Средние значения функций Чебышёва в коротких интервалах* // Мат. межд. конф., посв. 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева, МГУ Москва, 14–19 мая 1996 г. 1996. Т. 1. С. 48-53.

10. **Рахмонов З.Х.** *Средние значения функции Чебышева в коротких интервалах* //

Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 1999. Т. 42. № 4. С. 14-18.
11. **Виноградов И.М.** *Оценки некоторых простейших сумм с простыми числами* // Известия АН СССР. Сер. мат. 1939. Т.3. С. 371–398.
12. **Liu J., Zhan T.** *On sums of five almost equal prime squares* // Acta Arithmetica. 1996. V. 77. P. 369-383
13. **Liu J., Zhan T.** *Estimation of exponential sums over primes in short intervals I* // Monatshefte fur Mathematik. 1999. Is. 127.P. 27-41.
14. **Lu G. S., Lao H. X.** *On exponential sums over primes in short intervals* // Monatshefte fur Mathematik. 2007. V. 151. Is. 2. P. 153-164.
15. **Liu J., Zhan T.** *Estimation of exponential sums over primes in short intervals II* // In Analytic Number Theory: Proceedings of a Conference in Honor of Heini Halberstam. Birkhauser. 1996. P 571-606.
16. **Huang B., Wang Z.** *Exponential sums over primes in short intervals* // Journal of NumberTheory. 2015. V. 148. P. 204–219.
17. **Kumchev A. V.** *On Weyl sums over primes in short intervals* // "Arithmetic in Shangrila"—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. Singapore: World Scientific. 2012. V. 9. P. 116–131.
18. **Huang B.** *Exponential sums over primes in short intervals and an application to the Waring–Goldbach problem* // Mathematika. 2016. V. 62. P. 508–523.

Сумма модулей коротких тригонометрических сумм с простыми числами и ее приложение в вопросе равномерного распределения дробных частей $\{\alpha p^n\}$

Рахмонов Фируз Заруллоевич

Институт математики им.А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана, г.Душанбе, Таджикистан; rakhmonov.firuz@gmail.com

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одной из проблем является распределение дробных частей $\{\alpha p\}$. В этом вопросе И. М. Виноградов [1,2] получает оценку тригонометрической суммы значительно более точную, чем в общем случае: *пусть K и x — достаточно большие целые числа, $K \le x$, α — вещественное,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \quad q \ge 1, \qquad |\theta| \le 1, \tag{1}$$

тогда при $q \le x$, будем иметь

$$V_1(K,x) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p \le x} e(\alpha k p) \right| \ll K x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-0,2} \right).$$

Отсюда следует утверждение: *при любом σ с условием $0 < \sigma \le 1$, число $F_\alpha(x,\sigma)$ значений $\{\alpha p\}$, $p \le x$, подчиненных условию $\{\alpha p\} < \sigma$, выразится формулой*

$$F_\alpha(x,\sigma) = \sigma\pi(x) + R_\sigma(x), \quad R_\sigma(x) \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-0,2} \right).$$

В частности, если α — иррациональное число с ограниченными неполными частными, то можно выбрать q таким, чтобы оно было порядка $\sqrt{x}$. В этом случае в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которых пробегает простые числа из интервала малой длины, то есть *для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количества членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x-y<p\le x$ и $\{\alpha p\}<\sigma$, имея в виду, что $F_\alpha(x,y,\sigma)=F_\alpha(x,\sigma)-F_\alpha(x-y,\sigma)$, справедлива асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma)=\sigma(\pi(x)-\pi(x-y))+O\left(x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}\right),$$

являющаяся нетривиальной при $y\gg x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$.

Методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова [1,2], в сочетании с методами работ [3,4] в работе [5] и других работах докладчика доказано: *пусть K, x, y и q – достаточно большие целые числа, $K\le y$, A — абсолютная постоянная, $\mathfrak{L}=\ln x$, α — вещественное и имеет вид (1). Тогда при $y\gg x^{\frac{2}{3}}\mathfrak{L}^{4A+16}$ и $\mathfrak{L}^{4A+20}\le q\le Ky^2x^{-1}\mathfrak{L}^{-4A-20}$ справедлива оценка*

$$V_1(K,x,y)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp)\right|\ll\frac{Ky}{\mathfrak{L}^A}.$$

При $n\ge 2$ вопрос о распределении дробных частей $\{\alpha p^n\}$, аргумент которых пробегает простые числа p из короткого интервала $[x-y,x]$, оставался открытым.

Основным результатом этой работы является теорема 1 о оценке сумм модулей коротких тригонометрических сумм с простыми числами.

Теорема 1. *Пусть K, x, y, q – достаточно большие целые числа, $K\le y<x$, n — фиксированное натурально число, α — вещественное,*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\qquad (a,q)=1,\quad q\ge 1,\qquad |\theta|\le 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$V_n(K,x,y)=\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{x-y<p\le x}e(\alpha kp^n)\right|\ll Ky\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{q}{Ky^n}+\frac{1}{K^{2^{n-1}}}\right)^{2^{-n-1}}\mathfrak{L}^{\frac{n^2}{2^{n+1}}}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом Г. Вейля в соединении с идеями, отраженных в публикациях докладчика. В этих работах при выводе асимптотической формулы в обобщении проблем Варинга и Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми теорема Хуа Ло-кена о среднем значении тригонометрической суммы

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\le x}e(\alpha m^n),$$

обобщается для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m\le x}e(\alpha m^n),$$

и получена нетривиальная оценка сумм $T(\alpha;x,y)$ в малых дугах.

Теперь определим область значений параметров K, q и y при которых полученная оценка в теореме 1 является нетривиальной.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть*

$$K \gg \mathfrak{L}^{4A+\frac{n^2}{2^{n-1}}}, \qquad \mathfrak{L}^{2^{n+1}A+n^2} \ll q \ll Ky^2\mathfrak{L}^{-2^{n+1}A-n^2}, \qquad y \gg \mathfrak{L}^{2^{n+1}A+n^2},$$

где $A \geq 2$ — абсолютная фиксированная постоянная. Тогда справедлива оценка

$$V_n(K,x,y) \ll Ky\mathfrak{L}^{-A}.$$

Из следствия 1, модифицированным методом «стаканчиков И. М. Виноградова», который разработали Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков, следует утверждение:

Следствие 2. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geq 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad \mathfrak{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3\mathfrak{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда при $y \gg \mathfrak{L}^{2^{n+1}A+n^2}$ для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ — количества членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x-y < p \leq x$ и $\{\alpha p^n\} < \sigma$, имеет место асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathfrak{L}^A}\right),$$

где $\pi(x)$ — количество простых чисел не превосходящих числа x.

Из следствия 2 для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ — количества членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x-y < p \leq x$ и $\mu \leq \{\alpha p^n\} < \nu$, причём $0 \leq \mu < \nu \leq 1$, воспользовавшись соотношением

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu) = F_\alpha(x,y,\nu) - F_\alpha(x,y,\mu),$$

получим следующее утверждение:

Следствие 3. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geq 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad \mathfrak{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3\mathfrak{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда при $y \gg \mathfrak{L}^{2^{n+1}A+n^2}$ для $F_\alpha(x,y,\mu,\nu)$ — количества членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x-y < p \leq x$ и $\mu \leq \{\alpha p\} < \nu$, причём $0 \leq \mu < \nu \leq 1$, имеет место асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\mu,\nu) = (\nu-\mu)(\pi(x) - \pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathfrak{L}^A}\right).$$

Из следствия 3 для отклонения

$$D_\alpha(x,y) = \sup_{0\leq\mu<\nu\leq 1}\left|\frac{F_\alpha(x,y,\mu,\nu)}{\pi(x-y)-\pi(x)} - (\nu-\mu)\right|$$

членов последовательности $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x-y < p \leq x$, получаем следующее утверждение:

Следствие 4. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geq 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad \mathfrak{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3\mathfrak{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда при $y \gg \mathfrak{L}^{2^{n+1}A+n^2}$ для отклонения $D_\alpha(x,y)$ членов последовательности $\{\alpha p^n\}$, таких, что $x - y < p \leq x$, справедлива следующая оценка

$$D_\alpha(x,y) \ll \frac{y\mathfrak{L}^{-A}}{\pi(x) - \pi(x-y)}.$$

Из следствия 4 и теоремы Хис-Брауна о правильном порядке количества простых чисел в интервале малой длины $(x-y, x]$ при $y \geq x^{\frac{7}{12}}$ получаем следующий критерий равномерной распределённости по модулю равному единице для последовательности $\{\alpha p^n\}$ при условии, что аргумент p принимает значения из интервала малой длины $(x-y, x]$.

Следствие 5. *Пусть x — достаточно большое целое число, $A \geq 2$ — абсолютная фиксированная постоянная, α — вещественное,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1, \qquad \mathfrak{L}^{2^{n+1}(A+2)+n^2} \ll q \ll y^3\mathfrak{L}^{-2^{n+1}(A+2)-n^2}.$$

Тогда последовательность $\{\alpha p^n\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ при $y \gg x^{\frac{7}{12}}$ является равномерно распределённой по модулю равному единице.

Литература

1. Виноградов И. М. Избранные труды — М: Изд-во АН СССР, 1952 г.
2. Виноградов И. М., Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77. С. 4 – 30.
3. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.
4. Рахмонов Ф З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. №3. С. 56 – 60.
5. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.

УДК 514.174.4

Нахождение элементов выпуклой оболочки множества точек n-мерного пространства

Сеттарова Э.С.
Самаркандский государственный уриверситет имени Шарофа Рашидова, город Самарканд, Узбекистан.
e-mail: settarova.elvir@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача нахождения элементов выпуклой оболочки множества точек n-мерного пространства, возникающая при решении нелинейных

уравнений методом «многогранника Ньютона». Представлен доработанный алгоритм вычисления нормальных конусов граней многогранника Ньютона на основе метода Моцкина-Бургера для решения систем однородных линейных неравенств. Приведены примеры практической реализации алгоритма и его программная реализация на языке Java.

Ключевые слова: выпуклая оболочка, многогранник Ньютона, нормальный конус, система однородных неравенств, алгоритм Моцкина-Бургера.

Введение

Многие задачи алгебры и дифференциальных уравнений, такие как задачи робототехники, гидродинамики и небесной механики, сводятся к решению нелинейных уравнений и их систем. Одним из эффективных методов их решения является метод «многогранника Ньютона», основанный на построении выпуклой оболочки по степеням мономов многочлена. Центральное место в этом методе занимает задача нахождения нормальных конусов граней многогранника Ньютона.

Постановка задачи

Рассмотрим многочлен вида:

$$F(X) = \sum F_Q X^Q, \quad Q \in S,$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ и $X^Q = x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$, $S \subset R^n$ - носитель многочлена.

С носителем S связаны его выпуклая оболочка Γ (многогранник Ньютона) и её грани Γ_i^d в пространстве R^n, а также их нормальные конусы N_i^d в сопряженном пространстве R_*^n.

Для получения нормального конуса относительно точки Q' из условий $(P, Q_z - Q') \leq 0$ $(Q_z \in S/Q')$ получаем систему однородных линейных неравенств:

$$l_k(X) = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \leq 0, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Алгоритм Моцкина-Бургера

Для решения систем однородных неравенств применяется алгоритм Моцкина-Бургера. Подробное описание алгоритма:

Вход: n - размерность пространства, $L = \{l_1(x), \ldots, l_m(x)\}$ - множество левых частей неравенств.

Выход: $U = \{u_1, \ldots, u_t\}$ - базис линейного подпространства конуса решений, $V = \{v_1, \ldots, v_s\}$ - образующие заострённого конуса решений.

1. Инициализация: $U_{current} = \{(1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1)\}$; $V_{current} = \{\varnothing\}$; $L_{current} = \{\varnothing\}$; $i = 1$

2. Для каждого неравенства $l_i(x)$ из L:

   - Если существует $u \in U_{current}$ такой, что $l(u) \neq 0$, то:
     - Обновляем базис: $U_{current} = \{u_i l(u) - u l(u_i),\ u_i \in U_{current},\ u \neq u_i\}$
     - Добавляем фундаментальное решение: $b = \begin{cases} u, & \text{если } l(u) < 0 \\ -u, & \text{если } l(u) > 0 \end{cases}$
     - Обновляем фундаментальную систему: $V_{current} = \{b,\ -v_i l(b) + b l(v_i),\ v_i \in V_{current}\}$
   - Иначе:
     - Разделяем $V_{current}$ на три части: V^-, V^0, V^+ по знаку $l(v)$
     - Строим новые образующие для пар векторов из V^- и V^+

– Обновляем $V_{current} = V^0 \cup V^- \cup V^*$

• Добавляем обработанное неравенство в $L_{current}$

3. Возвращаем результаты: $U = U_{current}$, $V = V_{current}$

Пример применения

Рассмотрим носитель:

$$S : \{Q_1 = (1;1;1),\ Q_2 = (3;0;0),\ Q_3 = (0;3;0),\ Q_4 = (2;1;0),\ Q_5 = (0;6;6),\ Q_6 = (1;2;2)\}.$$

Для нахождения нормального конуса к точке Q_1 получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} l_1(P) = 2p_1 - p_2 - p_3 \le 0, \\ l_2(P) = -p_1 + 2p_2 - p_3 \le 0, \\ l_3(P) = p_1 - p_3 \le 0, \\ l_4(P) = -p_1 + 5p_2 + 5p_3 \le 0, \\ l_5(P) = p_2 + p_3 \le 0. \end{cases}$$

Применяя алгоритм Моцкина-Бургера, получаем фундаментальное решение:

$$V_1 = (-1;-1;-1),\ V_2 = (0;-1;1),\ V_3 = (-5;-2;1).$$

Программная реализация и результаты

На основе представленного алгоритма создана компьютерная программа на языке Java, которая:

• Решает системы однородных линейных неравенств

• Строит таблицу соответствия между точками носителя и нормальными векторами

• Находит все грани выпуклой оболочки различной размерности

Программа предоставляет наглядное представление результатов для двумерного и трёхмерного случаев.

Заключение

Разработанный алгоритм и его программная реализация позволяют эффективно находить элементы выпуклой оболочки множества точек n-мерного пространства и соответствующие нормальные конусы. Это имеет важное значение для применения метода многогранника Ньютона при решении нелинейных уравнений в различных областях науки и техники.

LITERATURE

1. **Черников С.Н.** *Линейные неравенства.* М.: Наука, 1968.
2. **Солеев А.С., Сеттарова Э.С.** *Алгоритм Моцкина-Бургера нахождения решений системы однородных неравенств.*Труды конференции «Проблемы современной математики», Карши, 2011. С. 231-234.
3. **Солеев А.С., Арансон А.** *Вычисление многогранника и нормальных конусов его граней.* Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В.Келдышева РАН, Москва, 1994.
4. **Брюно А.Д.** *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* М.: Наука. Физматлит, 1998.

УДК 511.331

Об оценке специальных кратных тригонометрических сумм и их применении в задачах аналитической теории чисел

Хайруллохзода Ш. А.
Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан;
shamsullo@rambler.ru

Нули дзета-функции Римана, которые находятся на коротких интервалах критической прямой, представляют собой важную и сложную задачу в аналитической теории чисел. Дзета-функция Римана, аналитически продолжённая на всю комплексную плоскость, за исключением единственной особой точки $s = 1$, послужила основой для множества значимых результатов в этой области.

При анализе числа нулей дзета-функции Римана на критической прямой ключевым этапом является оценка специальных тригонометрических сумм, которые имеют вид

$$W = \left| \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)}e^{-\left(\frac{H_1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2} \right|,$$

где $T \geq T_0 > 0$, $B(\lambda)$ – произвольные комплексные числа с условием $|B(\lambda)| \leq B$, $H_1 = H+h$, $P = \sqrt{T/2\pi}$, $0 < X < P$, $0 < H < \sqrt[3]{T}$, $0 < \varepsilon < 0.001$, $h = \mathbb{L}^{-1}$, $A \geq 10$, $\mathbb{L} = \ln T$,

$$a(\lambda) = \sum_{\lambda=n\nu_2/\nu_1} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_1},$$

$\nu_1, \nu_2 \leq X$, $|\beta(\nu)| \geq 1$.

Такую тригонометрическую сумму ранее оценил А.А. Карацуба [1]. Он доказал, что при $X = T^{0.01\varepsilon}$, $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 0.001$, $0 < \varepsilon_1 < 0.001$, имеет место оценка

$$W \ll B_0 T^{-\varepsilon}, \quad \text{где} \quad B_0 = \varepsilon_1^{-2}\mathbb{L}^{-2} + \varepsilon_1^{-1}A\mathbb{L}^{-2}.$$

В данной работе с использованием метода экспоненциальных пар [2] и идей, представленных в работах [3]–[4], для специальных тригонометрических сумм W была получена новая нетривиальная оценка.

Теорема. *Пусть $X = T^{0.01\varepsilon}$, $H = T^{\frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}+\varepsilon}$, (κ, λ) – произвольная экспоненциальная пара, тогда для тригонометрической суммы W имеет место следующая оценка:*

$$W \ll BT^{-0.9\varepsilon}.$$

Величина $\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}$ была минимизирована бельгийскими математиками J. Bourgain и N. Watt в 2015 году [5]. Они продемонстрировали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \theta(\kappa, \lambda) = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}} \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \leq \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3\cdot 4816} \approx 0.314576,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

Применяя этот результат, получаем следующее.

Следствие. Пусть ε – произвольное малое положительное число не превосходящее 0.001. Тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$ имеет место оценка

$$W \ll BT^{-0.9\varepsilon}.$$

Литература

1. **Карацуба А.А.** *О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой*// Изв. АН СССР. Серия математическая. 1984. Т. 48, № 3. С. 569–584.
2. **Graham S.W., Kolesnik G.** *Vander Corput's Method of Exponential sums.* Cambridge University Press, 1991.
3. **Хайруллоев Ш.А.** *О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения* // Известия АН РТ. Серия физ.-мат. наук. 2018. № 4(173). С. 7–25.
4. **Хайруллоев Ш.А.** *О равномерных по параметрам оценках специальных тригонометрических сумм* // Доклады НАН Таджикистана. 2023. Т. 66. № 9–10. С. 487–493.
5. **Bourgain J., Watt N.** *Decoupling for perturbed cones and mean square of $\zeta(s)$.* http://arxiv.org/abs/1505.04161v1, 2015.

Линейные изометрии в L_p-пространствах Банаха-Канторовича над кольцом измеримых функций

Чилин В.И.[1], Закирова Г.Б.[2]

[1,2] Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
vladimirchil@gmail.com; zg1090@list.ru

Пусть B произвольная полная булева алгебра, $Q(B)$ стоуновский компакт, соответствующий B, и пусть $C_\infty(Q(B))$ алгебра всех непрерывных функций $x : Q(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$.

Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с σ-конечной мерой, $L^0(\Omega)$ алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) и пусть $B(\Omega)$ полная булева алгебр всех идемпотентов из $L^0(\Omega)$.

Пусть $m : B \to L^0(\Omega)$ – строго положительная $L^0(\Omega)$-значная мера на B, обладающая свойством Магарам, т.е. для любых $e \in B,\ f \in L^0(\Omega),\ 0 \le f \le m(e)$, существует такое $q \in B,\ q \le e$, что $m(q) = f$. В этом случае [1], существует единственный инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$ такой, что $\nabla(m) = \varphi(B(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. Кроме того, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с подалгеброй $C_\infty(Q(\nabla(m)))$ в алгебре $C_\infty(Q(B))$.

В настоящей работе рассматривается интеграл от элементов K-пространства, определенный в работе [2]. В качестве расширенного K-пространства берется алгебра $C_\infty(Q(B))$. Рассмотрим в $C_\infty(Q(B))$ векторную подрешетку $S(B)$ всех простых элементов $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, где $\alpha_i \in \mathbb{R},\ e_i \in B,\ e_i \cdot e_j = \mathbf{0},\ i, j = 1, \dots, n$. Если $x \in S(B)$, то полагаем по определению

$$I_m(x) := \int x dm := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(e_i).$$

Как было показано в работе [2], интеграл I_m продолжается на пространство m-интегрируемых элементов $\mathcal{L}^1(B, m)$. Отождествив эквивалентные элементы из $\mathcal{L}^1(B, m)$, получим K_σ-пространство $L^1(B, m)$. Для каждого $x \in L^1(B, m)$ (запись $x \in L^1(B, m)$ означает, что рассматривается класс эквивалентности с представителем x) формула

$$\|x\|_{1,m} := \int |x| dm$$

определяет $L^0(\Omega)$-значную норму. Поскольку, $m : B \to L^0(\Omega)$ – мера Магарам, то пара $(L^1(B, m), \|x\|_{1,m})$ является пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ (см. [2, 6.1.10]).

Для каждого $p \geq 1$ положим $L^p(B,m) = \{x \in C_\infty(Q(B)) : |x|^p \in L^1(B,m)\}$, $\|x\|_{p,m} := \left[\int |x|^p dm\right]^{\frac{1}{p}}$, $x \in L^p(B,m)$. Известно, что для меры Магарам m пара $(L^p(B,m), \|x\|_{p,m})$ также является пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ [3].

Пусть $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, и $U : L^p(B,m) \to L^p(B,m)$ – линейная изометрия, т.е. U является линейным отображением и $\|U(x)\|_{p,m} = \|x\|_{p,m}$ для всех $x \in L^p(B,m)$. Если для любых $x, y \in L^p(B,m)$, $x \cdot y = \mathbf{0}$, тогда $U(x) \cdot U(y) = \mathbf{0}$.

Линейный оператор $T : C_\infty(Q(B)) \to C_\infty(Q(B))$ называется *гомоморфизмом*, если $T(x \cdot y) = T(x) \cdot T(y)$ для всех $x, y \in C_\infty(Q(B))$. Если $\mathbf{0} \leq x \in C_\infty(Q(B))$, тогда $T(x) = T(\sqrt{x}) \cdot T(\sqrt{x}) \geq \mathbf{0}$, т.е. гомоморфизм $T : C_\infty(Q(B)) \to C_\infty(Q(B))$ является положительным.

Положительный линейный оператор $T : C_\infty(Q(B)) \to C_\infty(Q(B))$ называется *нормальным*, если для любой возрастающей сети $\{x_\alpha\} \subset C_\infty(Q(B))$ из $\mathbf{0} \leq x_\alpha \uparrow x \in C_\infty(Q(B))$ следует, что $T(\sup\limits_\alpha x_\alpha) = \sup\limits_\alpha T(x_\alpha)$.

Следующая теорема является векторнозначной версией теоремы Ламперти [4] для пространства Банаха-Канторовича $(L^p(B,m), \|\cdot\|_{p,m})$.

Теорема. *Пусть $U : L^p(B,m) \to L^p(B,m)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, линейная изометрия. Тогда существует инъективный нормальный гомоморфизм $T : C_\infty(Q(B)) \to C_\infty(Q(B))$ и элемент $y \in L^p(B,m)$ такой, что $U(x) = y \cdot T(x)$ для всех $x \in L^p(B,m)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chilin V., Zakirov B.** *Decomposable L_0-valued measures as measurable bundles,* Positivity, 2010, 14 (3). 395–405.
2. **Кусраев А.Г.** *Мажорируемые операторы.* - М.: Наука, 2003. - 619 с.
3. **Кусраев А.Г.** *Векторная двойственность и ее приложения.* - Новосибирск: Наука, 1985. - 256 с.
4. **Lamperti J.** *On the isometries of some function spaces,* Pacific J. Math. 1958, 8 (3). 459–466.

УДК 511.5

Приложения последовательности Сомоса к элиптическим кривым

Эргашев В.Э.[1], Буриев Т.Э. [2]
Самаркандский государственный уриверситет имени Шарофа Рашидова, город Самарканд, Узбекистан.
e-mail: vafokulyusuf@gmail.com, tolibjonb@yahoo.com

Аннотация. В работе исследуются свойства последовательности Сомоса четвертого порядка и ее связь с эллиптическими кривыми. Показано, что последовательность Фибоначчи является частным случаем последовательности Сомоса. Введена замена переменных, позволяющая понизить порядок рекуррентного соотношения и выявлен инвариант последовательности. Установлено, что точки с координатами, определяемыми последовательностью, лежат на эллиптической кривой, которая может быть приведена к каноническому виду Вейерштрасса. Исследованы условия невырожденности полученной кривой.

Ключевые слова: последовательность Сомоса, эллиптические кривые, рекуррентные соотношения, инварианты, форма Вейерштрасса.

Введение

Последовательности Сомоса представляют особый интерес в теории чисел и алгебраической геометрии благодаря своим необычным свойствам и связям с эллиптическими кривыми. В данной работе рассматривается последовательность Сомоса четвертого порядка,

задаваемая рекуррентным соотношением:

$$S_{n+2}S_{n-2} = \alpha S_{n+1}S_{n-1} + \beta S_n^2,$$

где α и β- произвольные действительные числа.

Основные результаты

Показано, что последовательность Фибоначчи, задаваемая начальными условиями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и рекуррентным соотношением $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, является частным случаем последовательности Сомоса, так как ее члены удовлетворяют соотношению:

$$F_{n+2}F_{n-2} = -F_{n+1}F_{n-1} + 2F_n^2.$$

Для понижения порядка рекуррентного соотношения введена замена переменных:

$$f_n = \frac{S_{n-1}S_{n+1}}{S_n^2},$$

что позволяет преобразовать исходное соотношение к виду:

$$f_{n+1}f_n^2 f_{n-1} = \alpha f_n + \beta.$$

Доказана теорема о существовании инварианта:

$$T_n = f_n f_{n-1} + \alpha(\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n-1}}) + \frac{\beta}{f_n f_{n-1}},$$

который не зависит от n.

Связь с эллиптическими кривыми

Установлено, что точки с координатами $(X, Y) = (f_{n-1}, f_n)$ лежат на кривой, задаваемой уравнением:

$$T = XY + \alpha(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}) + \frac{\beta}{XY}.$$

С помощью замены переменных $x = X$, $y = XY$ уравнение преобразуется к виду:

$$x^2 y - Txy + (\alpha + \beta)x + \alpha y = 0,$$

что представляет собой кривую третьего порядка.

Показано, что данная кривая является эллиптической и может быть приведена к кано ническому виду Вейерштрасса:

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Установлено условие невырожденности кривой:$4a^3 + 27b^2 \neq 0$.

Заключение

Исследование демонстрирует глубокую связь между последовательностями Сомоса и эллип тическими кривыми. Использование групповой структуры эллиптических кривых открыва ет новые возможности для изучения свойств последовательностей Сомоса и их обобщений.

Литература

1. **Ю.Соловьев.** *Арифметика эллиптических кривых.* - Журнал “Квант”, 1987, № 7.
2. **А.В.Устинов.** *Элементарный подход к изучению последовательностей Сомоса.* Труды МИАН, т.305, 2019, с.330-343.
3. **M.Somos.** *M.Somos.*
4. **А.В.Устинов.** *О последовательностях Сомоса-4 и Сомоса-5.* Математические заметки, Т.110, вып.3, с.478-480.

2 – SHO'BA. MATEMATIK TAHLIL MASALALARI VA ULARNING TATBIQLARI

СЕКЦИЯ 2. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Uchinchi turdagi matritsaviy sharda chegaraviy morera teoremasi

Aminov H.A.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston milliy Universiteti.
e-mail: hojiakbars10eaminov@gmail.com

Nagel va Rudinning [1] quyidagi natijasi mavjud: agar f funksiya $\mathbb{C}^n$ dagi birlik shar chegarasida uzluksiz bo'lsa va har qanday (golomorf) avtomorfizm (ψ) lar uchun

$$\int_0^{2\pi} f(\psi(e^{i\varphi},0,\dots,0))e^{i\varphi}d\varphi = 0$$

shart bajarilsa, u holda f funksiya shar ichiga golomorfik ravishda kengaytiriladi. Klassik sohalar, birinchi turdagi matritsaviy shar va umumlashtirilgan yarim tekislik uchun Morera teoremasining chegaraviy analoglari [2-4] ishlarida olingan.

2^0. $Z = (Z_1,\dots,Z_n)$ kompleks sonlar maydoni $\mathbb{C}$ ustida tartiblangan m tartibli kvadrat matritsalardan Z_j lardan tuzilgan vektor bo'lsin. Z ni $\mathbb{C}^{m^2n}$ fazoning elementi deb hisoblash mumkin. Biz bu vektorlar to'plamida quyidagicha matritali (skalyar) ko'paytmani kiritamiz:

$$\langle Z,W\rangle = Z_1W_1^* + \cdots + Z_nW_n^*,$$

bu yerda W_j^* - W_j matritsani qo'shmasining transponerlangani. Quyidagi to'plam

$$B_{m,n}^{(1)} = \{(Z_1,\dots,Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n\,[m\times m] : I - \langle Z,Z\rangle > 0\},$$

birinchi turdagi matritsaviy shar deb ataladi; bu yerda $\langle Z,Z\rangle = Z_1Z_1^* + Z_2Z_2^* + \cdots + Z_nZ_n^*$ - "skalyar"kopaytma, I - $[m\times m]$ olchamli birlik matritsa, $Z_\nu^* = \overline{Z'}_\nu$ -Z_ν matritsaning qo'shmasining transponerlangani, $\nu = 1,2,\dots,n$, [5]. Bu yerda $I - \langle Z,Z\rangle > 0$ sharti Hermit matritsa $I - \langle Z,Z\rangle$ musbat aniqlangan, ya'ni uning barcha xos qiymatlari musbat ekanligini anglatadi.

3^0. Biz $B_{m,n}^{(3)}$ (uchinchi turdagi) matritsaviy sharni ko'rib chiqamiz ([6] ga qarang):

$$B_{m,n}^{(3)} = \{(Z_1,\dots,Z_n) = Z \in \mathbb{C}^n\,[m\times m] : I + \langle Z,Z\rangle > 0,\quad Z'_\nu = -Z_\nu\,,\ \nu = 1,\dots,n\}\,.$$

$B_{m,n}^{(3)}$ matritsaviy sharning skeleti (Shilov chegarasi) $X_{m,n}^{(3)}$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$X_{m,n}^{(3)} = \{Z \in \mathbb{C}^n\,[m\times m] : I + \langle Z,Z\rangle = 0,\quad Z'_\nu = -Z_\nu,\ \nu = 1,\dots,n\}\,.$$

Biz $X_{m,n}^{(3)}$ dagi Λ^0 nuqtani ($\Lambda^0 = (\Lambda_1^0,\dots,\Lambda_n^0)$) fiksrlaymiz va $B_{m,n}^{(3)}$ sohasiga birlik disk Δ ning quyidagi joylashishini ko'rib chiqamiz:

$$\left\{W \in \mathbb{C}^{m^2n} :\ W_j = t\Lambda_j^0,\ j = 1,\dots,n,\ |t| < 1\right\}.$$

Δ diskning T chegarasi ushbu joylashish orqali $X^{(3)}_{m,n}$ da yotgan aylana ichiga tasvirlanadi. Agar ψ $B^{(3)}_{m,n}$ ning ixtiyoriy (golomorf) avtomorfizmi bo'lsa, u holda (1) ko'rinishdagi to'plam avtomorfizm ta'sirida $X^{(3)}_{m,n}$ da chegaraga ega bo'lgan ma'lum analitik diskga o'tadi.

Teorema 1. Agar $f \in C(X^{(3)}_{m,n})$ funksiya $B^{(3)}_{m,n}$ sharining barcha ψ avtomorfizmlari uchun quyidagi tenglikni qanoatlantirsa:

$$\int_T f(\psi(t\Lambda^0))dt = 0$$

u holda f funksiya $B^{(3)}_{m,n}$ da $C(\bar{B}^{(3)}_{m,n})$ klassiga mansub F funksiyasiga golomorfik ravishda kengaytiriladi. **Lemma 1:** ([5]). O'lchov

$$d\sigma = h(U)dtd\sigma^+(U),\ U \in X^+,$$

bu yerda $h(U)$ silliq musbat funksiya, t ga bog'liq emas.

Lemma 1 shuni ko'rsatadiki, $d\sigma(\psi_A(W)) = P(A,W)d\sigma((W)$, bu yerda $P(A,W)$ - $B^{(3)}_{m,n}$ sohasining invariant Puasson yadrosi.

Shu sababli,

$$\int_{X^{(3)}_{m,n}} f(W)\psi^{A,l}_{ks}(W)P(A,W)d\sigma((W)) = 0$$

$B^{(3)}_{m,n}$ dan olingan barcha A nuqtalar uchun va barcha $k,s = 1,\dots,m,\ l = 1,\dots,n$.

Teorema 2. Agar $f \in C(X^{(3)}_{m,n})$ funksiya va (3) tenglama $B^{(3)}_{m,n}$ sohasining A nuqtani 0 ga aylantiradigan barcha $\psi_{B^{(3)}_{m,n}}$ avtomorfizmlari va barcha $k,s = 1,\dots,m,\ l = 1,\dots,n$ lar uchun bajarilsa, u holda bu funksiya $F \in \sigma(B^{(3)}_{m,n})$ funksiyaning radial chegaraviy qiymatidir.

Teorema 3.$f \in C(X^{(3)}_{m,n})$ funksiya berilgan bo'lsin va (2) shart bosh nuqtani $V \subset B^{(3)}_{m,n}$ ochiq to'plamning nuqtasiga aylantiradigan barcha ψ avtomorfizmlari uchun bajarilsin. U holda f funksiya $B^{(3)}_{m,n}$ sohasida $F \in \sigma(\bar{B}^{(3)}_{m,n})$ funksiyasiga golomorfik ravishda kengaytiriladi.

4^0. Δ_ψ analitik disk quyidagicha bo'lsin:

$$\Delta_\psi = Z : Z = \psi(t\Lambda^0), |t| < 1,$$

bu yerda Λ^0_r - $X^{(3)}_{m,n}$ skeletonining fiksirlangan nuqtasi, ψ esa $B^{(3)}_{m,n}$ sohasining avtomorfizmi. U holda analitik diskning T_ψ chegarasi $X^{(3)}_{m,n}$ ustida yotadi, chunki avtomorfizm skeleton nuqtalarini skeleton nuqtalariga aylantiradi. Morera teoremalaridan analitik disklar bo'yicha bir o'lchovli golomorfik kengayish xususiyatiga ega funksiyalar haqida xulosa olish aniq ko'rinadi.

Xulosa Agar $f \in C(X^{(3)}_{m,n})$ funksiya barcha ψ avtomorfizmlari (yoki bosh nuqtani $V \subset B^{(3)}_{m,n}$ ning biror ochiq to'plamiga aylantiradigan barcha ψ avtomorfizmlari) uchun Δ_ψ analitik disklarida t bo'yicha) golomorfik ravishda kengaytirilishi mumkin bo'lsa, u holda f funksiya $B^{(3)}_{m,n}$ da golomorfik ravishda kengaytiriladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati

1. **A.Nagel, W.Rudin.** *Moebius-invariant function spaces on balls and spheres, Duke Math.*.J., 43(1976), no. 4, 841-865.

2. **S.Kosbergenov, A.M.Kytmanov, S.G.Myslivets.** *On a boundary Morera theorem for classical domains* Siberian Math.J., 40(1999), no. 3, 506-514.

3. **G.Khudayberganov, B.T.Kurbanov.** *The boundary Morera theorem for generalized upper half-plane* Uzbek Mat. Zh. (2002), no. 1, 78-83 (rus tilida).
4. **S.Kosbergenov.** *On a multidimensional boundary Morera theorem for the matrix ball* Russian Math. (Iz. VUZ), 45(2001), no. 4, 26-30.
5. **G.Khudayberganov, A.M.Kytmanov, B.A. Shaimikulov** *Complex analysis in the matrix domains.*Sib. Federal Univ., Krasnoyarsk, 2011 (rus tilida).
6. **G.Khudayberganov, B.B.Khidirov, U.S.Rakhmonov.** *Automorphisms of matrix balls* Doklady NUUz., (2010), no. 3, 205-210 (rus tilida).
7. **U.S.Rakhmonov.** *Poisson kernel matrix ball for the third type.*Uzbekskiy Mat. Zh., (2012), no. 3, 123-125 (rus tilida).

Ikkinchi tur matritsaviy polikrugda golomorf davom ettirish masalasi

Bozorov J. T.[1], **To'rayev T. A.**[2], **Bo'riyeva I.** [3]
[1,2,3]Termez State University, Termez, Uzbekistan;
[1]jorabek.bozorov.89@mail.ru, [2] turayev.tura.96@, , [3] irodaboriyeva994@gmail.com

Ikkinchi tur klassik sohani qaraylik,[1,2]

$$D_2 = \left\{ Z \in \mathrm{C}\,[m \times m]\,; Z\bar{Z} < I^{(m)} \right\}$$

Bunda Z-matritsalar $[m \times m]$o'lchamli simmetrik matritsalar,$\bar{Z}$ esa Z matritsaning qo'shmasi ushbu matritsaning har bir elementi kompleks sondan iborat$I^{(m)}$ – $[m \times m]$ o'lchamli birlik matritsa.
Bu sohaning chegarasi

$$\partial D_2 = \left\{ Z \in \mathrm{C}\,[m \times m]\,; \det(I - Z\bar{Z}) = 0, I - Z\bar{Z} \geq 0 \right\}$$

Bu sohaning ostovi deb n-tartibli barcha simmetrik unitar matritsalar to'plamiga aytiladi ya'ni

$$\Gamma = \left\{ Z \in \mathrm{C}\,[m \times m]\,; Z\bar{Z} = I \right\}$$

D_2 sohaning n tasining dekart ko'paytmasini $T_{2,n}$ deb belgilaymiz.

$$T_{2,n} = D_{2,r}^n = \left\{ Z_j \in \mathrm{C}\,[m \times m]\, Z_j\bar{Z_j} < r^2 I \right\} \quad j = \overline{1,n}$$

uning ostovi[1,2]

$$S(T_{2,n}) = S(D_{2,r}^n) = \left\{ Z_j \in \mathrm{C}\,[m \times m]\, Z_j\bar{Z_j} = r^2 I \right\} \quad j = \overline{1,n}$$

Tarif 1. Agar $f(z)$ funksiya $T_{2,n}$ sohada golomorf bo'lib,

$$\sup_{0<r<1} \int_{S(T_{2,n})} \left| f(r\xi)^2 d\mu < \infty \right|$$

bo'lsa u holda $f(z)$ funksiya Hardi sinfiga[4] tegishli deyiladi va
$f(z) \in H^2(T_{2,n})$ kabi belgilanadi .Bunda $d\mu - S(T_{2,n})$ dagi Xaara o'lchovi. [2]

Endi nm^2 o‘zgaruvchili funksiya qaraymiz.

$$F(z) = F(z_1, z_2, ...z_n) \in H^2(S(T_{2,n}), d\mu$$

Bunda $d\mu(\xi) = d\mu_1 \cdot d\mu_2.....d\mu_n$ lar $S(T_{2,n})$ dagi Xaara o‘lchovi,$\nu = \overline{1,n}$
Malumki ,agar $F(z) \in H^2(S(T_{2,n}), d\mu)$ bo‘lsa u holda ixtiyoriy $z \in T_{2,n}$ uchun

$$F(z) = \int_{S(T_{2,n})} \frac{f(\xi)d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^{\frac{m+1}{2}}(\xi_j - z_j)}$$

o‘rinli bo‘ladi.
Bu ishda $T_{2,n}$ soha ostavi $S(T_{2,n})$ dan soha ichiga golomorf davom ettirish masalasi o‘rganilgan ya’ni $T_{2,n}$ sohada Xardi sinfiga tegishli bo‘lgan va $S(T_{2,n})$ ostovda qiymati avvaldan berilgan kvadrati bilan integrallanuvchi$f$ funksiya bilan ustma ust tushuvchi funksiyaning mavjudligi masalasi qaralgan .
Buning uchun Boxner-Xua Lo-kentipidagi quyidagi integralni qaraymiz.

$$\int_{S(T_{2,n})} \frac{f(\xi)d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^{\frac{m+1}{2}}(\xi_j - Z_j)} \tag{1}$$

Agar (1) integralda

$$Z \in D_\beta = \left\{ Z; (-1)^{\beta_j}(I - Z_j\bar{Z_j}) > 0 \right\} \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, ...\beta_n) \quad \beta_j = \overline{0,1} \quad |\beta| = \beta_1 + ...\beta_n.$$

bo‘lsa, u holda (1) integral qiymatini F_β bilan belgilaymiz.
Kartan teoremasi [1] ga ko‘ra $T_{2,n}$ sohada $H^2(S, d\mu)$ fazoda to‘la bir jinsli golomorf ortaganal polinomlar sistemasi mavjud $\left\{\varphi_\alpha^k(z)\right\}$ .Bu sistemani $L^2(S, d\mu)$ kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosida to‘la ortogonal sistemagacha kengaytiramiz va ushbu sistema yordamida F_β funksiyalarni qatorga yoyamiz.

$$F_\beta(z) = (-1)^{m|\beta|} \sum_{\alpha,k} a_{\alpha,\beta}^{(k)}, \varphi_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) \tag{2}$$

Yuqorida L^2 fazodagacha to‘ldirilgan sistemada (2) yoyilmada qatnashmagan sistemani $\{\phi\}$ orqali belgilab olamiz.
Yuqorida keltirilganlarga ko‘ra quyidagi sakrash haqidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.
1-Teorema
Agar $f(\xi) \in L^2(S, d\mu)$ funksiya $S(T_{2,n})$ ostavda $\{\phi\}$ sistemaga ortoganal bo‘lsa u holda $F_\beta(z) \in H^2(D_\beta)$ funksiyalar S ostovning deyarli hamma joyida radial limit qiymatga ega va

$$F_{(0,0,.....0)}(z)|_{S(T_{2,n})} + \sum_{\beta} \left[(-1)^{m[\beta)} F_\beta(z)|_{S(T_{2,n})}\right] = f(\xi)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.
Endi asosiy masalaga javob beradigan teoremani keltiramiz.
2-teorema.
Aytaylik $f(\xi) \in L^2(S, d\mu)$ bo‘lsin S ostovda $f(\xi)$ bilan ustma ust tushadigan
$F(z) \in H^2(D)$funksiya mavjud bo‘lishi uchun $f(\xi)$ funksiya $\{\phi\}$ sistemaga ortoganal va $F_\beta(z)$ funksiyalar $D_\beta, |\beta > 0|$ sohalarda nol bo‘lishi zarur va yetarli.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Хуа Ло-Кен.** *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* М., Изд. иност. лит., 1959.
2. **Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А.** *Анализ в матричных областях. Монография.* Красноярск, Ташкент. 2017.
3. **Махкамов Э.М.** *Формула Вейля в матричном полиэдре* Вестник Национального университета Узбекистана. Ташкент 2013.
4. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», част 2. М., 1976

Ikkinchi tur matritsaviy poliyedrda Veyl integral formulasi

Bozorov J. T.[1], **To'rayev T. A.**[2], **Bobonazarova M. O.**[3]
[1,2,3]Termez State University, Termez, Uzbekistan;
[1]jorabek.bozorov.89@mail.ru, [2] turayev.tura.96@, , [3] bobonazarova02@bk.ru

Bu ishda ikkinchi tur matritsaviy maxsus analitik poliyedr uchun Veyl integral formulasi olingan.

Ikkinchi tur klassik sohani qaraylik [1,2]:

$$\mathcal{D}_2 = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : Z\overline{Z} < I^{(m)}\},$$

bu yerda Z - matritsalar $[m \times m]$ o'lchamli simmetrik matritsalar, $\overline{Z}$ esa Z matritsaning qo'shmasi. Ushbu matritsaning har bir elementi kompleks sonlardan iborat, $I^{(m)}$ esa $[m \times m]$ o'lchamli birlik matritsa.

Bu sohaning ostovi [1,2] deb n-tartibli barcha simmetrik unitar matritsalar [1] to'plamiga aytiladi, ya'ni

$$\Gamma = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : Z\overline{Z} = I\}.$$

r-radiusli $\mathcal{D}_2$ sohalarning n tasining Dekart ko'paytmasini $T_{2,n}$ deb belgilaymiz.

$$T_{2,n} = \mathcal{D}_{2,r}^n = \left\{Z_j \in \mathbb{C}[m \times m] : Z_j\overline{Z}_j < r^2 I\right\}, j = \overline{1,n}$$

Uning ostovi:

$$S(T_{2,n}) = S(\mathcal{D}_{2,r}^n) = \left\{Z_j \in \mathbb{C}[m \times m] : Z_j\overline{Z}_j < r^2 I\right\}, j = \overline{1,n}$$

Ta'rif 1. Agar $f(Z)$ funksiya $T_{2,n}$ sohada golomorf bo'lib,

$$\sup_{0<r<1} \int_{S(T_{2,n})} |f(r\xi)|^2 \, d\mu < \infty,$$

bo'lsa, u holda $f(Z)$ funksiya Hardi sinfiga tegishli deyiladi va

$$f(Z) \in H^2(T_{2,n})$$

kabi belgilanadi. Bunda $d\mu$ - $S(T_{2,n})$ dagi Xaara o'lchovi [2]. Endi nm^2-o'zgaruvchili funksiya qaraymiz:

$$F(Z) = F(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \in H^2(S(T_{2,n}), d\mu).$$

bunda $d\mu(\xi) = d\mu_1 d\mu_2 \ldots d\mu_n$, $d\mu_\nu$ lar $S(T_{2,n})$ dagi Xaara o'lchovlari, $\nu = \overline{1,n}$

Ma'lumki, agar $F(Z) \in H^2(S(T_{2,n}), d\mu)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $Z \in T_{2,n}$ uchun

$$F(Z) = \int_{S(T_{2,n})} \frac{F(\xi)\, d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^{\frac{m+1}{2}}(\xi_j - Z_j)}.$$

$a \in \mathbb{C}^n[m \times m]$ nuqtaning biror ochiq atrofini $\mathbf{U}_a$ bilan belgilaylik.

$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n[m \times m] \to \mathbb{C}^n[m \times m]$ o'tkazadigan $\mathbf{U}_a$ dagi golomorf akslantirish bo'lsin, bunda $f_j (j = \overline{1,n})$ $[m \times m]$ o'lchamli simmetrik matritsa, a nuqta f funksiyaning yakkalangan noli. $\mathbf{U}_a$ atrofda yotadigan f funksiyaning nollarini o'zida saqlaydigan siklni quyidagicha belgilaymiz:

$$\Gamma_{f,\varepsilon} = \{Z \in \mathbf{U}_a : f_j(Z) f_j(\overline{Z}) = \varepsilon^2 I,\ j = \overline{1,n}\}.$$

$\mathbb{C}^n[m \times m]$ fazodagi ikkinchi tur matritsaviy poliyedrni aniqlaymiz.

Aytaylik, $G \subset \mathbb{C}^n[m \times m]$ qandaydir soha va unda

$$f : \mathbb{C}^n[m \times m] \longrightarrow \mathbb{C}^n[m \times m]$$

golomorf akslantirish berilgan bo'lsin.

r-radiusli matritsali polikrug $T_{2,n}$ ni qaraymiz va uning proobrazini

$$f^{-1}(T_{2,n}) = \left\{z : f_j(z)\, \overline{f_j(z)} < r^2 I,\ j = \overline{1,n}\right\}$$

kabi belgilaymiz.

Ta'rif 2. Agar $f^{-1}(T_{2,n}) \Subset G$ sohada kompakt yotsa, u holda $f^{-1}(T_{2,n})$ to'plam f akslantirishga bog'liq ikkinchi tur matritsali poliyedrik to'plam deyiladi.

Ta'rif 3. $f^{-1}(T_{2,n})$ matritsali poliyedrik to'plamning bog'lamli komponentasiga 2-tur matritsaviy poliyedr deyiladi.

Matritsaviy poliyedrni $\Pi_{f,r}$ bilan, uning ostovini

$$\Gamma_{f,r} = \left\{\xi : f_j(\xi)\, \overline{f_j(\xi)} = t^2 I,\ j = \overline{1,n}\right\}$$

bilan belgilaymiz.

$\mathbf{U}$ soha $\Pi_{f,r}$ ning qandaydir atrofi bo'lsin. Xefer teoremasiga ko'ra $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ dekart ko'paytmada shunday $P_\nu^k(\xi, z)$ funksiyalar mavjudki, barcha $(\xi, z) \in (\mathbf{U} \times \mathbf{U})$ lar uchun quyidagi yoyilma o'rinli

$$f_k(\xi) - f_k(z) = \sum_{l=1}^{nm^2} (\xi_l - z_l)\, P_l^k(\xi, z), k = \overline{1, nm^2}.$$

$||P_l^k||$ matritsaning determinantini $H(\xi, Z)$ orqali belgilaymiz.

Teorema. Agar h funksiya $\overline{\Pi}_{f,r}$ da golomorf bo'lsa, u holda ixtiyoriy $Z \in \Pi_{f,r}$ uchun

$$h(Z) = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(\xi) H(\xi, z)\, d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^{\frac{m+1}{2}}(f_j(\xi) - f_j(z))}. \quad (1)$$

integral formula o'rinli.

$\mathbb{C}^n[m \times m]$ fazoda (1) formulada $n = 1$ bo'lgan holini Mahkamov E.[3], $m = 1$ bo'lgandagisini Six [4] ishlarida ko'rishimiz mumkin. $n = m = 1$ bo'lgandagi holida esa (1) formuladan Koshining integral formulasi kelib chiqadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Хуа Ло-Кен.** *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* М., Изд. иност. лит., 1959.
2. **Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А.** *Анализ в матричных областях. Монография.* Красноярск, Ташкент. 2017.
3. **Махкамов Э.М.** *Формула Вейля в матричном полиэдре* Вестник Национального университета Узбекистана. Ташкент 2013.
4. **Цих А.К.** *Многомерные вычеты и их применения.* Новосибирск: Наука, 1988.

Applications of the Lobachevsky metric in the H - upper half-plane

Eshboltaev S.[1]
[1]**National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;**
eshboltayevsarvar@gmail.com

Entry:In this thesis, we provide examples of the Lobachevsky metric, defined in the H-upper half-plane, and the calculation of distances between points using this metric.

Let H denote the upper half-plane of the complex space $\mathbb{C}$:

$$H = \{z \in C | Im(z) > 0\}$$

Definition [1] For the upper half-plane, the Lobachevsky metric is expressed by the equality $ds = \frac{|dz|}{Imz}$. In this case, $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ is the differential expression of the ordinary Euclidean distance, and $Im(z) = y$ is the imaginary part of Z .

Property 1.[1] If $f : D \to D$ is a holomorphic mapping, then it is invariant in the Lobachevsky metric and $ds(f(z)) = ds(z)$ is equal.
If $z_1 = x_1 + iy_1 \in H$ and $z_2 = x_2 + iy_2 \in H$ are two points, the distance between them is calculated as follows:

$$d(z_1, z_2) = ln|\frac{|z_1 - \overline{z_2}| + |z_! - z_2|}{|z_1 - \overline{z_2}| - |z_! - z_2|}| \tag{1}$$

Now let's look at some examples using these formulas:

Example 1. Find the distance between points $z_1 = i$ and $z_2 = 2i$. Solution. According to formula (1)

$$d(z_1, z_2) = ln|\frac{|i - \overline{2i}| + |i - 2i|}{|i - \overline{2i}| - |i - 2i|}| = ln2$$

So, it is $d(i, 2i) = ln2 \approx 0,693$. For information, we can say that $d_{Evklid}(z_!, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ according to the expression. $d_{Evklid}(i, 2i) = 1$.

The Euclidean distance between parallel lines remained constant.

Property 2.[1] In the H-upper half-plane, the distance between two parallel lines increases as it approaches the boundary.

Example 2. Let us have parallel lines $l_1 = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) = 0\} \cap H$ and $l_2 = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) = 1\} \cap H$. Compare the distance between these parallel lines for the case of $Im(z) = 1$ and $Im(z) = 10$.

Solution. We are asked to compare the distances between points $z_1 = i \in l_1$, $z_2 = 1 + i \in l_2$ of parallel lines l_1 and l_1 and between the points $z_1^* = 10i \in l_1$, $z_2^* = 1 + 10i \in l_2$ according to formula(1)

$$d(i,1+i)=ln|\frac{|i-\overline{1+i}|+|i-(1+i)|}{|i-\overline{1+i}|-|i-(1+i)|}|=ln|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}|\approx 0,962$$

and

$$d(10i,1+10i)=ln|\frac{|10i-\overline{1+10i}|+|10i-(1+10i)|}{|10i-\overline{1+10i}|-|10i-(1+10i)|}|=ln|\frac{1+\sqrt{401}}{1-\sqrt{401}}|\approx 0,099.$$

So it's $d(i,1+i)>d(10i,1+10i)$.

The following properties are our main result.

REFERENCES

1.James W. Anderson, Hyperbolic Geometry, BA, PhD School of Mathematics, University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, UK, 1964.

2.G.Xudoyberganov, B.A.Shoimqulov, J.Sh.Abdullayev. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi -Toshkent: -, 2023.

On dynamics of a separable quadratic stochastic operators

Eshkabilov Y.Kh.[1], Boboyarova Z.D.[2]

Professor of Karshi State University , Karshi, Uzbekistan;
yusup62@mail.ru1
Karshi State University,Karshi, Uzbekistan;
boyxonguliz@gmail.com2

Let $E=\{1,...,m\}$ be a finite set and the set of all probability distribution on E

$$S^{m-1}=\left\{\mathbf{x}=(x_1,...,x_m)\in R^m : x_i\geq 0,\ \ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\right\} \tag{1}$$

be the $(m-1)$-dimensional simplex. A QSO is a mapping defined as $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$ of the simplex into itself, of the form $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}'\in S^{m-1}$, where

$$x'_k=\sum_{i,j=1}^{m}P_{ij,k}x_ix_j,\quad k\in E, \tag{2}$$

and the coefficients $P_{ij,k}$ satisfy

$$P_{ij,k}=P_{ji,k}\geq 0,\quad \sum_{k=1}^{m}P_{ij,k}=1\quad \text{for all}\quad i,j,k\in E. \tag{3}$$

The trajectory (orbit) $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n\geq 0}$, of V for an initial value $\mathbf{x}^{(0)}\in S^{m-1}$ is defined by

$$\mathbf{x}^{(n+1)}=V\left(\mathbf{x}^{(n)}\right)=V^{(n+1)}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right),\qquad n=0,1,2,...$$

Separable QSOs were introduced as follows: let $A=(a_{ik})_{i,k=1}^{m}$, $B=(b_{jk})_{j,k=1}^{m}$ be the matrices with the real entries. Consider the QSO (2), (3) with additional condition

$$p_{ij,k}=a_{ik}b_{jk},\quad \forall i,j,k\in E, \tag{4}$$

where $a_{ik}, b_{jk} \in \mathbb{R}$ entries of matrices A and B such that the conditions (3) are satisfied for the coefficients (4). Then the QSO V corresponding to the coefficients (4) has the form

$$x'_k = (V(\mathbf{x}))_k = (A(\mathbf{x}))_k \cdot (B(\mathbf{x}))_k, \quad \forall k \in E, \tag{5}$$

where $(A(\mathbf{x}))_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}x_i$, $(B(\mathbf{x}))_k = \sum_{j=1}^{m} b_{jk}x_j$.

Definition The operator (5) is called a separable QSO.

Let us consider the following matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1+a & 1 \\ 1-a & 1 & 1+c \\ 1 & 1-c & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

where $a, c \in [-1, 1]$.

Then corresponding SQSO $W : S^2 \to S^2$ is:

$$W : \begin{cases} x'_1 = x_1 (1 - ax_2), \\ x'_2 = x_2 (1 + ax_1 - cx_3), \\ x'_3 = x_3 (1 + cx_2). \end{cases} \tag{7}$$

Let a face of the simplex S^2 be the set $\Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_i = 0, \; i \notin \alpha \subset \{1, 2, 3\}\}$. Let the set $\operatorname{int} S^2 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1x_2x_3 > 0\}$ and let the set $\partial S^2 = S^2 \setminus \operatorname{int} S^2$ be the interior and the boundary of the simplex S^2, respectively. Let $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ be the vertexes of the two-dimensional simplex.

Theorem 1. *For the SCSO W (7), the following assertions true*:

(i) *The faces $\Gamma_{\{1,2\}}$, $\Gamma_{\{1,3\}}$, $\Gamma_{\{2,3\}}$ of the simplex S^2 are invariant sets;*

(ii) $\operatorname{Fix}(W) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$;

Acknowledgements. The work is supported by the applied Project "Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators"No. AL-9224093956 of the Agency for Innovative Development under the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan.

Reference

1 **Rozikov U. A.** *An introduction to chaotic dynamical systems.* in Studies in Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO, 2003.

2 **Rozikov U. A. and Zada A.** *On dynamics of l-Volterra quadratic stochastic operators.* Int. J. Biomath, 3, 2010, pp. 143-159.

3 **Rozikov U. A. Nazir S.** *Separable Quadratic Stochastic Operators.* Lobachevskii J. Math 31(3), 2010, pp. 215-221.

УДК 517.9

Analysis of $G_4^{(2)}$-periodic ground states for the Chui-Weeks model

Hakimova M. A.
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan hakimovamuslimaxon@gmail.com

The Cayley tree Γ^k (see [1]) of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, from each vertex of which exactly $k+1$ edges issue. Let $\Gamma^k = (V, L)$, where V is the set of vertices of Γ^k, L is the set of edges of Γ^k. It is known (see [1]) that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$, $i = 1, ..., k+1$ of the second order (i.e. $a_i^2 = e$, $a_i^{-1} = a_i$) with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$.

In this work, we consider the three-state Chui–Weeks model on the Cayley tree of order four. For this model, all $G_4^{(2)}$-periodic ground states are described, where

$$G_4^{(2)} = \{x \in G_4 :| x | \text{ is even}\},$$

where $| x |$ means length of the word x.

We consider model where the spin takes values in the set $\Phi = \{0, 1, 2\}$.

The Chui-Weeks model (see [2]) is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} | \sigma(x) - \sigma(y) | + \alpha \sum_{x \in V} \delta_{\sigma(x),0}, \tag{1}$$

where $J, \alpha \in \mathbb{R}$, α is an external field and $\sigma \in \Omega$.

All $G_4^{(2)}$-periodic configurations have the following form:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0, \text{ if } x \in G_4^{(2)}, \\ \sigma_1, \text{ if } x \in G_4 \setminus G_4^{(2)}, \end{cases}$$

where $\sigma_0, \sigma_1 \in \Phi$.

The following theorem describes all $G_4^{(2)}$-periodic ground states for the three-state Chui-Weeks model.

Theorem 1. For the Chui-Weeks model on the Cayley tree of order four, the following assertions hold

I. i) if $(J, \alpha) \in \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : -2\alpha \leq 30J \leq 0\}$, then $G_4^{(2)}$-periodic configurations

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x \in G_4^{(2)}, \\ 2, \text{ if } x \in G_4 \setminus G_4^{(2)}, \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} 2, \text{ if } x \in G_4^{(2)}, \\ 1, \text{ if } x \in G_4 \setminus G_4^{(2)} \end{cases}$$

are $G_k^{(2)}$-periodic ground states;

ii) if $(J, \alpha) \in \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \leq 0, \alpha = 0\}$, then $G_4^{(2)}$-periodic configurations

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, \text{ if } x \in G_4^{(2)}, \\ 2, \text{ if } x \in G_4 \setminus G_4^{(2)}, \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} 2, \text{ if } x \in G_4^{(2)}, \\ 0, \text{ if } x \in G_4 \setminus G_4^{(2)} \end{cases}$$

are $G_4^{(2)}$-periodic ground states.

II. All $G_4^{(2)}$-periodic ground states, except for points i) and ii) above, are translation-invariant.

REFERENCE

1. **Rozikov U. A.** *Gibbs measures on Cayley trees.* World Scientific: Singapore. -2013. 398 p.
2. **Rahmatullaev M. M., Rasulova M. A., Hakimova M. A.** *Periodic ground states for the CHui-Weeks model on the Cayley tree of order two.* Acta NUUz: Exact sciences. -2024. 2/2.1, pp. 104–110.

UDC 517.98

Convergence of orbits of a non-Volterra quadratic operator

Jamilov U.U.[1], Makhmudov Y.B.[2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
jamilovu@yandex.ru
[2]University of Exact and Social Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
makhmudovyokub2001@gmail.com

Let

$$S^{m-1}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m_+ : \sum_{i=1}^m x_i=1\right\}$$

be the $(m-1)$-dimensional simplex. A map V of S^{m-1} into itself is called a quadratic stochastic operator (QSO) if

$$(V\mathbf{x})_k=\sum_{i,j=1}^m p_{ij,k}x_ix_j,$$

for any $\mathbf{x}\in S^{m-1}$ and for all $k=1,\dots,m$, where

$$p_{ij,k}=p_{ji,k}\geq 0 \ \text{ for all } i,j,k=1,\dots,m \ \text{ and } \ \sum_{k=1}^m p_{ij,k}=1,\ i,j=1,\dots,m.$$

Assume that $\left\{\mathbf{x}^{(n)}\right\}_{n=0,1,2,\dots}\subset S^{m-1}$ is the orbit (trajectory) of the initial point $\mathbf{x}^{(0)}\in S^{m-1}$, where $\mathbf{x}^{(n+1)}=V\left(\mathbf{x}^{(n)}\right)$ for all $n=0,1,2,\dots$ Let $\omega_V\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ be the set of limit points of the orbit $\left\{\mathbf{x}^{(n)}\right\}_{n=0,1,2,\dots}$. Since S^{m-1} is a compact set, and $\left\{\mathbf{x}^{(n)}\right\}_{n=0,1,2,\dots}\subset S^{m-1}$ it follows that $\omega_V\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\neq\emptyset$.

A point $\mathbf{x}\in S^{m-1}$ is called a fixed point of V if $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}$. Denote the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}(V)$. We let a face of S^{m-1} be the set $\Gamma_\alpha=\left\{\mathbf{x}\in S^{m-1}: x_k=0,\ k\notin\alpha\right\}$, where $\alpha\subset\{1,\dots,m\}$; let $\mathbf{e}_i=(\delta_{1,i},\delta_{2,i},\dots,\delta_{m,i})\in S^{m-1}$, $i\in\{1,\dots,m\}$, denote the vertices of the simplex S^{m-1}, where $\delta_{i,j}$ is the Kronecker delta. The asymptotic behavior of the orbits of arbitrary QSO defined on the one-dimensional simplex was fully studied by Lyubich [2]. However, in the general case, the problem is still open even on the two-dimensional simplex.

The QSO V is called Volterra, if $p_{ij,k}=0$ for any $k\notin\{i,j\}$. The asymptotical behavior of orbits for Volterra QSOs was deeply studied [3].

Let $DV(\mathbf{x}^*)=\left(\partial V_i/\partial x_j\right)(\mathbf{x}^*)$ be the Jacobian of V at the point $\mathbf{x}^*$. A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called hyperbolic if its Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ has no eigenvalues on the unit circle. A hyperbolic fixed point

$\mathbf{x}^*$ is called: (i) *attracting* if all the eigenvalues of the Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ are in the unite ball; (ii) *repelling* if all the eigenvalues of the Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ are outside the unite ball; (iii) a *saddle* otherwise [1].

Consider a non-Volterra QSO defined on the two-dimensional simplex which has the form

$$V_\alpha : \begin{cases} x_1' = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 - \alpha x_1 x_2 - \alpha x_1 x_3, \\ x_2' = (2+\alpha) x_1 x_2, \\ x_3' = (2+\alpha) x_1 x_3, \end{cases} \tag{1}$$

where $\alpha \in [-2, 0]$.

For $\alpha \in (-1, 0]$ denote

$$S_\alpha = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in S^2 : \ x_1 = \frac{1}{2+\alpha} \right\}.$$

In the following theorem we give description fixed points and their types.

Proposition 1. For the operator V_α the following statements are hold:

i) the faces $\Gamma_{\{1,2\}}$ and $\Gamma_{\{1,3\}}$ are invariant sets with respect to operator V_α;

ii)
$$Fix(V_\alpha) = \begin{cases} \{\mathbf{e}_1\}, & \text{if } \ \alpha \in [-2, -1], \\ \{\mathbf{e}_1\} \cup S_\alpha, & \text{if } \ \alpha \in (-1, 0]; \end{cases}$$

iii) the point $\mathbf{x} \in S_\alpha$ is a non-hyperbolic and the vertex

$$\mathbf{e}_1 \ \text{ has the type a (an) } \begin{cases} \text{attracting}, & \text{if } \ \alpha \in [-2, -1), \\ \text{non-hyperbolic}, & \text{if } \ \alpha = -1, \\ \text{repelling}, & \text{if } \ \alpha \in (-1, 0]. \end{cases}$$

The following theorem describes the orbit of any point $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$.

Theorem 1. For the operator V_α the following statements are hold:

i) if $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{2,3\}}$ then for any $\alpha \in [-2, 0]$ we have $V_\alpha\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \mathbf{e}_1$;

ii) if $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,2\}} \setminus \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ then we have

$$\lim_{n\to\infty} V_\alpha^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{cases} (1,0,0), & \text{if } \ \alpha \in [-2, -1], \\ \left(\frac{1}{2+\alpha}, \frac{1+\alpha}{2+\alpha}, 0\right), & \text{if } \ \alpha \in (-1, 0]; \end{cases}$$

iii) if $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,3\}} \setminus \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ then we have

$$\lim_{n\to\infty} V_\alpha^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{cases} (1,0,0), & \text{if } \ \alpha \in [-2, -1], \\ \left(\frac{1}{2+\alpha}, 0, \frac{1+\alpha}{2+\alpha}\right), & \text{if } \ \alpha \in (-1, 0]; \end{cases}$$

iv) if $\mathbf{x}^{(0)} \in \operatorname{int} S^2 \setminus Fix(V_\alpha)$, then we have

$$\lim_{n\to\infty} V_\alpha^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{cases} (1,0,0), & \text{if } \ \alpha \in [-2, -1], \\ \left(\dfrac{1}{2+\alpha}, \dfrac{(1+\alpha)x_2^{(0)}}{(2+\alpha)\left(x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right)}, \dfrac{(1+\alpha)x_3^{(0)}}{(2+\alpha)\left(x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right)}\right), & \text{if } \ \alpha \in (-1, 0]. \end{cases}$$

Literature

1. **Devaney R.L.** *An introduction to chaotic dynamical systems*, Studies in Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO, 2003, reprint of the second (1989) edition.
2. **Lyubich, Y.I.** *Mathematical structures in population genetics*, Springer Vergar, Berlin, 1992.
3. **Ganikhodzhaev R.N.** *Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments.* Sb. Math. 76(2), 1993, pp.489-506.

УДК 517.98

On the iteration of a cubic map defined by a non-stochastic matrix on a two-dimensional simplex.

Jumayev J.N.[1], To‘rayev A.U.[2], Nuraliyev A.Sh.[3]
[1,2,3]Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
jahongirjumayev@mail.ru; axmadtorayev952@gmail.com; nuraliyevalisher260@gmail.com

Let us give basic definition. In general, a cubic operator $V : x \in \mathbb{R}^m \to x' = V(x) \in \mathbb{R}^m$ corresponding to a matrix $\mathbb{P} = \{P_{ijk,l}\}_{i,j,k,l=1}^m$ is defined by:

$$V : x'_l = \sum_{i,j,k=1}^{m} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Without loss of generality we assume

$$P_{iij,l} = P_{iji,l} = P_{jii,l}, \quad i,j,l = 1, \ldots, m, \quad i \neq j,$$
$$P_{ijk,l} = P_{ikj,l} = P_{jik,l} = P_{jki,l} = P_{kij,l} = P_{kji,l}, \quad i,j,k,l = 1, \ldots, m, \quad i \neq j \neq k.$$

As a result, the operator (1), takes the form:

$$V : x'_l = \sum_{i=1}^{m} P_{iii,l} x_i^3 + 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m} \left(P_{iij,l} x_i^2 x_j + P_{ijj,l} x_i x_j^2 \right) + 6 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{m} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, l = 1, ..., m. \tag{2}$$

Let m be a natural number and let $E_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ be a finite set. Then the set of all probability distributions on the E_m is

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : \ x_i \geq 0, \ \forall i, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

which is called $m-1$ -dimensional simplex.

A point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a *periodic* point of W if there exists an n so that $W^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. The smallest positive integer n satisfying the above is called the prime period or least period of the point $\mathbf{x}$. A period-one point is called a *fixed* point of W. Denote by $\mathrm{Fix}(W)$ the set of all fixed points of the operator W, i.e. $\mathrm{Fix}(W) = \left\{ \mathbf{x} \in S^2 : W(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \right\}$.

Definition. A cubic operator is called a cubic stochastic operator (CSO) if it preserves simplex.

The following theorem gives conditions for coefficients of V to preserve the simplex S^{m-1}.

Theorem. For a cubic operator V (given by (1), to preserve the simplex S^{m-1} it is sufficient that:

i) $\sum\limits_{l=1}^{m} P_{ijk,l} = 1, \quad i,j,k = 1,2,\ \ldots,m;$

ii) $0 \le P_{iii,l} \le 1, \quad i,l = 1,2,\ \ldots,m;$

ii) $-\frac{2}{3(m-1)} \sqrt[3]{P_{iii,l}^2 P_{jjj,l}} \le P_{iij,l}, \quad i \ne j, \quad i,j,l = 1,2,\ \ldots,m;$

iv) $\frac{2}{(m-1)(m-2)} \sqrt[3]{P_{iii,l} P_{jjj,l} P_{kkk,l}} \le P_{ijk,l}, \quad i \ne j \ne k, \quad i,j,k,l = 1,2,\ \ldots,m.$

Consider the following example of CSO on the two-dimensional simplex S^2:

$$V: \begin{cases} x' = x^3 + y^3 + z^3 - ax^2y - ax^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz, \\ y' = (3+a)\,x^2y, \\ z' = (3+a)\,x^2z, \end{cases} \tag{3}$$

where $a \in [0,4]$. Note that $P_{112,1} = P_{113,1} = -a/3$.

In case $y = z = 0$ we get the fixed point $e_1 = (1,0,0)$. For $y + z \ne 0$ we get $x = \frac{1}{\sqrt{3+a}}$. Consequently, the following is a family of fixed points

$$p_y = \left(\frac{1}{\sqrt{3+a}}, y, 1 - \frac{1}{\sqrt{3+a}} - y \right), \quad \text{where} \quad y \in \left[0, 1 - \frac{1}{\sqrt{3+a}} \right].$$

Recall that a set M is called invariant with respect to an operator V if $V(M) \subset M$.

It is easy to see that the following sets are invariant with respect to (3):

$$M_0 = \left\{ (x,y,z) \in S^2 : y = 0 \right\}, \quad M_1 = \left\{ (x,y,z) \in S^2 : z = 0 \right\},$$

$$M_\omega = \left\{ (x,y,z) \in S^2 : y = \omega z \right\}, \quad \omega \in [0, +\infty).$$

For trajectory of the operator (3) on the invariant set M_0 we have

$$\lim_{n\to\infty} V^n \left(x^{(0)}, 0, z^{(0)} \right) = \begin{cases} e_1, & if\ z^{(0)} \in \{0,1\}, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3+a}}, 0, 1 - \frac{1}{\sqrt{3+a}} \right), & if\ z^{(0)} \in (0,1). \end{cases}$$

And for trajectory of the operator (3) on the invariant set M_1 we have

$$\lim_{n\to\infty} V^n \left(x^{(0)}, y^{(0)}, 0 \right) = \begin{cases} e_1, & if\ y^{(0)} \in \{0,1\}, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3+a}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3+a}}, 0 \right), & if\ y^{(0)} \in (0,1). \end{cases}$$

And for trajectory of the operator (3) on the invariant set M_ω we have

$$\lim_{n\to\infty} V^n \left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)} \right) = \begin{cases} e_1, & if\ z^{(0)} \in \{0,1\}, \\ p_{y^{(0)}}, & if\ z^{(0)} \in (0,1). \end{cases}$$

Summarizing above-mentioned results about trajectories of operator (3), we obtain the following:

Theorem. For any initial point $\lambda = \left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)} \right) \in S^2 \backslash Fix(V)$ the following equality holds

$$\lim_{n\to\infty} V^n \left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)} \right) = \begin{cases} e_1, & if\ x^{(0)} = 0, \\ p_{y^{(0)}}, & if\ x^{(0)} \ne 0. \end{cases}$$

Acknowledgements. The work is supported by the applied Project "Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators"No. AL-9224093956 of the Agency for Innovative Development under the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan.

References

1. Rozikov U.A., Population dynamics: algebraic and probabilistic approach, *World Sci. Publ*, (2020), (Singapore).
2. Rozikov U.A., Xudayarov S.S., Quadratic non-stochastic operators: Examples of splitted chaos, *Annals of Functional Analysis* **13**(2022), no. 1, 17.
3. A.T. Sarymsakov, Behaviour of trajevtories and ergodic properties of the quadratic stochastic operators, *PhD thesis* (1982), (Tashkent).
4. Jumayev J.N., Criterion for the preservation of the one-dimensional simplex by a cubic operator, *Uzbek Mathematical Journal,* 2024, Volume 68, Issue 4, pp.85-95, DOI: 10.29229/uzmj.2024-4-9.

УДК 517.984.46

Ko‘p o‘lchamli diskret Shredinger operatorining muhim spektrining yuqorisida joylashgan xos qiymatlari cheksizligi haqida

Kulturayev D.J.
Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston; davron_2189@mail.ru

Spektrni o‘rganish Shredinger operatorlar nazariyasining asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Aytaylik $u(x)$ - funksiya $\Omega_\nu = [0,1]^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ to‘plamda haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya bo‘lsin. K - $L_2(\Omega_\nu)$ fazoda $k(x,s) \in L_2(\Omega_\nu^2)$ simmetrik yadroli Fredgolm kompakt integral operator bo‘lsin. Kvant mexanikasi va statistik fizikaning bir qancha masalalari [1-2] $L_2(\Omega_\nu)$ fazoda quyidagi formula orqali aniqlangan H operatorning diskret spektrini o‘rganishga keltiriladi

$$H = H_0 + K \tag{1}$$

bu yerda

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \quad (Kf)(x) = \int\limits_{\Omega_\nu} k(x,s)f(s)d\mu(s).$$

Bunda $\mu(\cdot)$ - $\mathbb{R}^\nu$ to‘plamda Lebeg o‘lchovini bildiradi, integral esa Lebeg ma’nosida tushuniladi. (1) ko‘rinishdagi operator Fridrixs modeli deb ataladi. Kompakt qo‘zg‘alish haqidagi Veyl teoremasiga ko‘ra H operatorning $\sigma_{ess}(H)$ muhim spektri $u(x)$ funksiyaning qiymatlar to‘plamidan iborat, ya’ni $\sigma_{ess}(H) = [u_{min}, u_{max}]$, bu yerda $u_{min} = \min\limits_{x\in\Omega_\nu} u(x)$, $u_{max} = \max\limits_{x\in\Omega_\nu} u(x)$.

Minimaks va maksimina prinsipidan [3] foydalanib, agar K integral operatorning yadrosi ajraluvchi bo‘lsa, u holda (1) Fridrixs modelining diskret spektri chekli bo‘lishi isbotlangan. Bundan kelib chiqadiki (1) Fridrixs modelining diskret spektri cheksiz bo‘lishi uchun K integral operatorning yadrosi ajralmagan bo‘lishi zarur.

$l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu)$ ($\nu \in \mathbb{N}$) fazoda panjarasimon ikki zarrachali gamiltonianni quyidagicha aniqlaymiz

$$\widetilde{Q}(\varepsilon) = Q_0 + \varepsilon Q^{'}, \ \varepsilon > 0, \tag{2}$$

bu yerda funksiyalar o‘ramasi bilan berilgan Q_0 kinetik energiyaning umumiy ko‘rinishi quyidagicha berilgan:

$$(Q_0\phi)(m,n) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^\nu} v_0(m-k, n-l)\phi(k,l),$$

$Q^{'}$ potensiyal energiya esa quyidagicha berilgan

$$(Q^{'}\phi)(m,n) = v_1(m,n)\phi(m,n).$$

$v_0(m,n)$ kinetik energiya quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin

$$v_0(m,n)=\begin{cases} 2\nu, & \text{agar } m=n=0,\\ 1, & \text{agar } m=0,\ |n|=1,\\ 0, & \text{boshqa qiymatlar uchun } n,m\in\mathbb{Z}^\nu,\end{cases}$$

bu yerda $|m|=|m_1|+|m_2|+...+|m_\nu|,\ m=(m_1,m_2,...,m_\nu)\in\mathbb{Z}^\nu$.

Potensial funksiyani quyidagicha aniqlaymiz

$$v_1(m,n)=\begin{cases} \alpha_0, & \text{agar } m=n=0,\\ \alpha_p, & \text{agar } m\in\{\pm pe_j\},\ n=0,\ p\in\mathbb{N},\\ \beta_q, & \text{agar } m=0,\ n\in\{\pm qe_j\},\ q\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{boshqa qiymatlar uchun } n,m\in\mathbb{Z}^\nu,\end{cases}$$

bu yerda $\alpha_0>0,\ \alpha_p>0,\ \beta_q>0,\ p,q\in\mathbb{N},\ \sum\limits_{p\in\mathbb{N}}\alpha_p^2<\infty,\ \sum\limits_{q\in\mathbb{N}}\beta_q^2<\infty,\quad e_j=(\underbrace{0,0,...,1}_{j},0,0,...,0)\in\mathbb{Z}^\nu$.

Aytaylik, $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$ bo‘lsin. $\mathcal{F}:l_2(\mathbb{Z}^\nu\times\mathbb{Z}^\nu)\to L_2(\mathbb{T}^\nu\times\mathbb{T}^\nu)$ - Fure almashtirishi bo‘lib, $\mathbb{Z}^\nu\times\mathbb{Z}^\nu$ panjarada aniqlangan $\phi(m,n)$ funsiyani $\mathbb{T}^\nu\times\mathbb{T}^\nu$ to‘plamda aniqlangan $f(x,y)$ funksiyaga akslantirsin, ya’ni

$$\mathcal{F}:\phi(m,n)\to f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^\nu}\sum_{p^{(1)},q^{(1)}\in\mathbb{Z}^\nu}\phi(p^{(1)},q^{(1)})exp(i[(p^{(1)},x)+(q^{(1)},y)]).$$

Lemma. *$\widetilde{Q}(\varepsilon)$ (2) operatorning $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ Fure almashtirilishi $L_2(\mathbb{T}^\nu\times\mathbb{T}^\nu)$ fazoda quyidagi formula orqali aniqlanadi*

$$\widetilde{H}_2(\varepsilon)f(x,y)=H_0^{(2)}f(x,y)+\varepsilon K_2f(x,y), \tag{3}$$

bunda

$$H_0^{(2)}f(x,y)=u_0^{(2)}(x,y)f(x,y),\quad K_2f(x,y)=\int\limits_{\mathbb{T}^\nu}\int\limits_{\mathbb{T}^\nu}k_2(x,y;s,t)f(s,t)dsdt$$

va $u_0^{(2)}(x,y)=2\left(\nu+\sum\limits_{k=1}^{\nu}cosy_k\right)$, $k_2(x,y;s,t)$ - ajralmagan yadro, ya’ni

$$k_2(x,y;s,t)=\lambda_0\varphi_0(x,y)+\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_p^{(1)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_p^{(1)}(x_i)\varphi_p^{(1)}(s_i)+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_p^{(1)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_p^{(2)}(x_i)\varphi_p^{(2)}(s_i)+\sum_{q=1}^{\infty}\lambda_q^{(2)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_q^{(1)}(y_i)\varphi_q^{(1)}(t_i)+\sum_{q=1}^{\infty}\lambda_q^{(2)}\sum_{i=1}^{\nu}\varphi_q^{(2)}(y_i)\varphi_q^{(2)}(t_i),$$

bu yerda

$$\lambda_0=(2\pi)^\nu\alpha_0,\ \lambda_p^{(1)}=(2\pi)^{2\nu}\alpha_p,\ \lambda_q^{(2)}=(2\pi)^{2\nu}\beta_q;$$

$$\varphi_0(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^\nu},\quad \varphi_p^{(1)}(x_i)=\frac{cospx_i}{\sqrt{2^{2\nu-1}\pi^\nu}},\ \varphi_p^{(2)}(x_i)=\frac{sinpx_i}{\sqrt{2^{2\nu-1}\pi^\nu}},i=1,2,...,\nu.$$

Lemmaga ko‘ra $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ (3) diskret Shredinger operatori ajralmagan yadroli Fridrixs modelidagi operator bo‘ladi. $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ operatorning muhim spektri uchun $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2(\varepsilon)) = [0, 4\nu]$ tenglik o‘rinli.

Teorema. *Aytaylik $\nu = 1, 2$ bo‘lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $\widetilde{H}_2(\varepsilon)$ diskret Shredinger operatori o‘zining muhim spektrining yuqori chegarasining yuqorisida cheksiz sondagi musbat xos qiymatlarga ega bo‘ladi.*

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YHATI

1. **Фаддеев Л.Д.** *О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра.* // В. кн.: Труды МИ АН. СССР, Т.73, М.: Наука, 1964. С. 292-313.
2. **Минлос Р.А.,Синай Я.Г.** *Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа.* // ТМФ. 1970. Т.2. №2. С. 230-243.
3. **Эшкабилов Ю.Х.** *О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса.* // Мат.труды.. 2011. Т. 14. №1. С. 195–211.

Umumlashgan matritsaviy poliedrda Bishop integral formulasining bir ko‘rinishi

Maxkamov E. M.[1],To‘rayev T. A.[2]
[1] O‘zbekiston milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston,
erkin_mahkamov@83
[2] Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston.
turayev.tura.96@

Elementlari kompleks sonlardan iborat, $[n \times n]-$tartibli kososimmetrik matritsalar bo‘lgan fazoni $\tilde{\mathrm{C}}\,[n \times n\,]$ kabi belgilaymiz.

Ushbu

$$D_3 = \left\{ Z \in \tilde{\mathrm{C}}\,[n \times n\,] : I^{(n)} + Z\bar{Z} > 0 \right\}$$

sohaga uchinchi tur klassik soha deb aytiladi. Bunda $I^{(n)} - n$ tartibli birlik matritsa, $\bar{Z}-$ matritsa esa Z matritsaning kompleks qo‘shma matritsasi hisoblanadi (eslatma, yuqoridagi sohada $H > 0$ Ermit matritsasining musbat aniqlanganligini bildiradi, ya’ni, barcha xos sonlari musbat aniqlangan) ([1-3]).

Uchinchi tur klassik sohaning chegarasi va ostovi mos ravishda quyidagicha aniqlanadi [2]:

$$\partial D_3 = \left\{ Z \in \tilde{\mathrm{C}}\,[n \times n] : det\left(I^{(\,n)} + Z\overline{Z}\,\right) \;=\; 0,\; I^{(\,n)} + Z\overline{Z} \geq 0 \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ Z \in \tilde{\mathrm{C}}\,[n \times n] :\; I^{(\,n)} + Z\overline{Z} = 0 \right\}.$$

Bu D_3 sohada golomorf va uning yopig‘ida uzluksiz har qanday $h\,(Z)$, ya’ni, $h\,(Z) \in \mathcal{O}\,(D_3) \bigcap C\left(\overline{D_3}\right)$ funksiya uchun (juft n larda) ushbu

$$h(Z) = c_n \int_{\Gamma} \frac{h\,(X)\,dX}{\det^{\frac{n-1}{2}}(X - Z)}$$

Xua Lo-ken integral formulasi o‘rinli bo‘ladi ([2],95-sah.). Bu yerda $dX = \overset{n}{\underset{\substack{i=1,j=2 \\ i<j}}{\wedge}} dx_{ij}$, integrallash tartibini va c_n o‘zgarmas

$$c_n \int_{I^{(n)} + X\overline{X} = 0} \frac{dX}{\det^{\frac{n-1}{2}}(X)} = 1$$

shart bo‘yicha aniqlanadi.

Biror $G \subset \mathrm{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sohada golomorf bo‘lgan $f = \left(f_1, \ldots, f_{\frac{n(n-1)}{2}}\right) : G \to \mathrm{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ akslantirishni qaraymiz.

1-ta‘rif. Agar $f : G \to \tilde{\mathrm{C}}\,[n \times n]$ golomorf akslantirish yordamida aniqlangan

$$f^{-1}\left(D_{3,\,r}\right) = \left\{Z \in G :\, r^2 I^{(n)} + f(Z)\overline{f(Z)} > 0,\, r > 0\right\}$$

to‘plam G sohada kompakt yotsa, ya’ni, $f^{-1}\left(D_{3,\,r}\right) \subset\!\subset G$ bo‘lsa, u holda $f^{-1}\left(D_{3,\,r}\right)$ to‘plamga matritsaviy poliedrik to‘plam deyiladi.

Shuni alohida ta’kidlash lozimki, bu to‘plam har doim ham bog‘lamli bo‘lavermaydi.

2-ta‘rif. Matritsaviy poliedrik to‘plamning bog‘lamli komponentasini matritsaviy poliedrik soha yoki qisqacha matritsaviy poliedr deb atamiz va uni $\Omega_{f,r}$ kabi belgilaymiz.

Matritsaviy poliedrning ostovi

$$\Gamma_{f,r} = \left\{Z \in G :\, r^2 I^{(n)} + f(Z)\overline{f(Z)} = 0,\, r > 0\right\},$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

Aytaylik $f = \left(f_1, \ldots, f_{\frac{n(n-1)}{2}}\right) : D \to G$ akslantirish $D \subset \mathrm{C}_Z^n$ sohani $G \subset \mathrm{C}_W^n$ sohaga akslantiruvchi golomorf akslantirish bo‘lsin. Agar har bir $W \in G$ nuqtalar uchun $f(Z) = W$ tenglama D sohada karrali ildizlarining tartibi bilan qo‘shib hisoblaganda bir xil sondagi yechimlarga ega bo‘lsa, u holda $f\,(Z)$ akslantirish ***chekli turdagi akslantirish*** deb ataladi (bu yerda nollar soni karrasi bilan olingan).

Aytaylik, $f : D \to G$ akslantirish $D \subset \mathrm{C}_Z^n$ sohani $G \subset \mathrm{C}_W^n$ sohaga akslantiruvchi chekli turdagi golomorf akslantirish bo‘lsin va $H(Z) = \frac{\varphi(Z)}{\psi(Z)}$ funksiya D sohada meromorf bo‘lsin.

3-ta’rif: f akslantirishga nisbatan $H(z)$ meromorf funksiyaning izi deb ushbu

$$[TrH](W) = \sum_{\nu} H(Z^{(\nu)}(W)), W \in G \backslash f(\psi = 0),$$

funksiyaga aytiladi, bu yerda yig‘indi $f(Z) = W$ tenglamaning ildizlari (karralisining tartibi ham e’tiborga olingan) bo‘yicha olinadi.

Bu ishda matritsaviy poliedrda maxsus ko‘rinishdagi meromorf funksiyalar uchun Bishop integral formulasining bir ko‘rinishi olingan.

Teorema: Agar $h\,(Z) \in \mathcal{O}\,(\Omega_{f,r}) \bigcap C\left(\overline{\Omega}_{f,r}\right)$ bo‘lib, $Z \in \Omega_{f,r}$ nuqtalarda yakobian $J_f\,(Z) \neq 0$ bo‘lsa, u holda h/J_f meromorf funksiya uchun ushbu

$$\frac{h\,(Z)}{J_f\,(Z)} = c_n \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(X)\Psi(Z,X) \overset{n}{\underset{\substack{i=1,j=2\\ i<j}}{\wedge}} dx_{ij}}{\Psi(Z,Z)\det{}^{\frac{n-1}{2}}\left(f(X) - f(Z)\right)}$$

integral formula o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $\Psi(Z,X) \not\equiv 0$ va $\overline{\Omega}_{f,r} \times \overline{\Omega}_{f,r}$ to‘plamda golomorf bo‘lgan vazn funksiya.

UDC 517.98

Regularity of a non-Volterra operator

Mukhitdinov R.T.[1], Jamilov U.U.[2]
[1]Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan;
muxitdinov-ramazon@rambler.ru
[2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
jamilovu@yandex.ru

Let

$$S^{m-1}=\left\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m:\ x_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\right\}$$

be the $(m-1)$-dimensional simplex. A map V from S^{m-1} into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(V\mathbf{x})_k=\sum_{i,j=1}^{m}p_{ij,k}x_ix_j \tag{1}$$

for any $\mathbf{x}\in S^{m-1}$ and for all $k=1,\dots,m$, where

$$p_{ij,k}\geq 0,\quad p_{ij,k}=p_{ji,k}\ \text{ for all }\ i,j,k,\ \ \sum_{k=1}^{m}p_{ij,k}=1. \tag{2}$$

Assume $\left\{V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ is the orbit (trajectory) of the initial point $\mathbf{x}^{(0)}\in S^{m-1}$, where $\mathbf{x}^{(n+1)}=V(\mathbf{x}^{(n)})$ for all $n=0,1,2,\dots$

One of the main problems in mathematical biology is investigation of the asymptotical behaviour of the orbits for a given QSO, defined by (1) with conditions (2).

The following notations will be used in below. We let a face of the simplex S^{m-1} be the set $\Gamma_\alpha=\{\mathbf{x}\in S^{m-1}:x_i=0,\quad i\notin\alpha\}$, for all $\alpha\subset\{1,\dots,m\}$. Let $\mathbf{e}_i=(\delta_{1i},\delta_{2i},\dots,\delta_{mi})\in S^{m-1}$, $i=1,\dots,m$, denote the vertices of the simplex S^{m-1}, where δ_{ij} is the Kronecker delta.

A point $\mathbf{x}^*\in S^{m-1}$ is called a *fixed point* of a QSO V if $V(\mathbf{x}^*)=\mathbf{x}^*$. The set of all fixed points we denote by $\mathrm{Fix}\,(V)$.

Hence, the fixed points of a QSO describe limit or long run behavior of the orbits for any initial point. The limit behavior of orbits and fixed points play an important role in many applied problems (see, e.g. [1, 2]).

Definiton 1. A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called hyperbolic if its Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ has no eigenvalues on the unit circle.

Definiton 2. A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:

i) attracting if all the eigenvalues of the Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ are less than 1 in absolute value;

ii) repelling if all the eigenvalues of the Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ are greater than 1 in absolute value;

iii) a saddle otherwise.

Consider the following non-Volterra QSO defined on the two-dimensional simplex

$$V_\tau:\begin{cases}x_1'=x_1^2+\left(\dfrac{1}{2}-\tau\right)x_3^2+(1-2\tau)x_1x_2,\\ x_2'=x_2^2+\left(\dfrac{1}{2}+\tau\right)x_3^2+(1+2\tau)x_1x_2,\\ x_3'=2x_1x_3+2x_2x_3,\end{cases} \tag{3}$$

where $\tau \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Theorem 1. Let $\tau = 0$. Then for the the QSO (3) the following statements are hold:

i) $\mathrm{Fix}\,(V_0) = \{(1/4, 1/4, 1/2)\} \cup \Gamma_{\{1,2\}}$, where $\Gamma_{\{1,2\}} = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_3 = 0\}$;

ii) the fixed point $(1/4, 1/4, 1/2)$ is an attracting point and arbitrary fixed point $\mathbf{x} \in \Gamma_{\{1,2\}}$ is a non-hyperbolic point;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} V_0^n\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) = (1/4, 1/4, 1/2)$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \backslash \Gamma_{\{1,2\}}$.

Theorem 2. Let $\tau \neq 0$. Then for the the QSO (3) the following statements are hold:

i) $\mathrm{Fix}\,(V_\tau) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{x}^*\}$, where $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \frac{1}{2}\right)$

$$x_1^* = \frac{1 + 2\tau - \sqrt{1 + 12\tau^2}}{8\tau} \quad \text{and} \quad x_2^* = \frac{2\tau - 1 + \sqrt{1 + 12\tau^2}}{8\tau};$$

ii)

$$\text{The vertex } \mathbf{e}_2 \text{ is } \begin{cases} \text{saddle}, & \text{if } \tau > 0, \\ \text{repelling}, & \text{if } \tau < 0; \end{cases}$$

$$\text{The vertex } \mathbf{e}_1 \text{ is } \begin{cases} \text{saddle}, & \text{if } \tau \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{4}\right), \\ \text{non-hyperbolic}, & \text{if } \tau = \frac{\sqrt{3}-1}{4}, \\ \text{repelling}, & \text{if } \tau \in \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \frac{1}{2}\right]; \end{cases}$$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} V_\tau^n\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) = \mathbf{x}^*$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \backslash \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Literature

1. **Devaney R.L.** *An introduction to chaotic dynamical systems*, Studies in Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO, 2003, reprint of the second (1989) edition.

2. **Zhamilov U.U.** and **Rozikov U.A.** *On the dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on a two-dimensional simplex*. Sbornik: Mathematics, 200(2009) pp. 1339–1351.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М., изд. иност. лит., 1959.

2. Айзенберг Л.А. Формула Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. “Наука”, Новосибирск, 1990, 248 с.

3. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Монография. Красноярск, Ташкент, 2017, с. 293.

УДК 517.98

Dynamics of a predator-prey system with equal dominance.

Norov A.Z.[1], Khamrayev A.Yu.[2], Najimov O.I.[3]
[1,2,3]Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
norov.asliddin@mail.ru, khamrayev-ay@yandex.ru, otabeknajimov8@gmail.com;

From the analysis of experimental data, Hoffmann [1] proposed that for the phage-bacteria interaction the equations be modified such that a power law applies to the LV equations. The modified LV equations are therefore:

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(\alpha - \beta y^p\right), \\ \dot{y} = y^p\left(-\gamma + \delta x\right). \end{cases} \tag{1}$$

We will assume the inequality $p > 1$.

A discrete analogy of the generalized LV equations (1) model for $p = 2$ can be considered as follows

$$\begin{cases} x' = (1+\alpha)\, x - \beta x y^2, \\ y' = y - \gamma y^2 + \delta x y^2. \end{cases} \tag{2}$$

One of the simplest cases of the discrete generalized LV model (2) is the following evolution operator $V : S^1 \to S^1$ of the population on the one dimensional simplex

$$S^1 = \left\{(x,y) \in R^2 : \;\; x, y \geq 0, \;\; x + y = 1\right\}$$

$$V_a : \begin{cases} x' = x - axy^2 \\ y' = y + axy^2 \end{cases}$$

where $a \in [-1, 1]$.

To ensure that both species will have equal domination we define an evolution operator, $V_{a,b} : z = (x,y) \in S^1 \to z' = (x', y') \in S^1$ by

$$V_{a,b} : \begin{cases} V_a(z), \;\; if \;\; x \leq 1/2 \\ V_b(z), \;\; if \;\; x > 1/2 \end{cases} \tag{3}$$

We note that the probabilities $P_{ijk,l}$ mentioned in are independent on $x \in S^{m-1}$, but for operator (3) we have $P_{111,1} = 1 - P_{111,2} = P_{222,2} = 1 - P_{222,1} = 1$, $\quad P_{112,1} = 1 - P_{112,2} = 2/3$ and the remaining coefficients depend on the points $z = (x,y)$ of the simplex S^1:

$$P_{122,1} = 1 - P_{122,2} = \begin{cases} \frac{1-a}{3}, \;\; if \;\; x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1+b}{3}, \;\; if \;\; x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Using the equality $x + y = 1$, this operator can be reduced to the function $f_{a,b} : [0,1] \to [0,1]$ defined by

$$f_{a,b} = \begin{cases} x\left(1 - a(1-x)^2\right), \;\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ x\left(1 + b(1-x)^2\right), \;\; \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \tag{4}$$

where $a, b \in [-1, 1]$. It is clear that, the function is a piecewise-continuous, that's, it is discontinuous at the point $x = \frac{1}{2}$ when $(a,b) \neq (0,0)$ and, is smooth at each semi interval. Note

that in the case $a = b = 0$ the function is trivial, because $f_{a,b} = x$, $x \in [0,1]$. Therefore, below we do not consider this case. In case $a = -b \neq 0$, we have $f(x) = f_{a,-a} = x\left(1 - a(1-x)^2\right)$, $x \in [0,1]$. The fixed points of this function are 0 and 1. It is easy to see that 1) The point 0 is attracting for f, if $a \in (0,1]$; repelling if $a \in [-1,0)$. 2) The point 1 is non-hyperbolic.

Moreover, using monotonicity of f one can show that for any initial point $[x^{(0)} \in (0,1)$ the following limits hold

$$\lim_{n\to\infty} f^n\left(x^{(0)}\right) = \begin{cases} 1, & if \ \ a \in [-1,0)\,, \\ 0, & if \ \ a \in (0,1]\,. \end{cases}$$

Thus value 0 is a critical point where the character of the dynamical system changes. Therefore, we consider the following possible cases:

(1) $a = 0,\ b \neq 0$; (2) $a \neq 0,\ b = 0$; (3) $a \neq 0,\ b \neq 0$.

The case $a \neq 0,\ b \neq 0$**.** In this case the function is

$$f_{a,b} = \begin{cases} x\left(1 - a(1-x)^2\right), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ x\left(1 + b(1-x)^2\right), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \tag{5}$$

Theorem. For the dynamical system generated by (5) the following assertions hold:

1. The set of fixed points is $Fix(f) = \{0,1\}$;
2. If $a \in [-1,0)$, $b \in (0,1]$ then $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} f^n\left(x^{(0)}\right) = 1$, for any $x^{(0)} \in (0,1]$;
3. If $a \in (0,1]$, $b \in [-1,0)$ then $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} f^n\left(x^{(0)}\right) = 0$, for any $x^{(0)} \in [0,1)$;
4. If $a, b \in (0,1]$ then $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} f^n\left(x^{(0)}\right) = \begin{cases} 0, & if \ \ x^{(0)} \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1, & if \ \ x^{(0)} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$

Acknowledgements. The work is supported by the applied Project "Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators"No. AL-9224093956 of the Agency for Innovative Development under the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan.

References

1. Rozikov U.A., Population dynamics: algebraic and probabilistic approach, *World Sci. Publ*, (2020), (Singapore).
2. Hoffmann K H, Rodriguez-Brito B, Breitbart M, Bangor D, Angly F, Felts B, Nulton J, Rohwer F and Salamon P 2006 The Structure of Marine Phage Populations.
3. Hofbauer J and Sigmund K 1992 The Theory of Evolution and Dynamical Systems (Cambridge: Cambridge University Press).
4. Gavin C., Pokrovskii A., Prentice M., Sobolev V. Jour. of Phys: Conf. Ser, 55 (2006) 80-93.

LOTKA-VOLTERRA MAPPING TRAJECTORY ROUTES

Nurboyev I.A.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
ilhombeknurboyev01@gmail.com

In this part of the paper, we will consider one of the most interesting representatives of the Lotka–Volterra mapping, which preserves the four-dimensional simplex $V : S^4 \to S^4$. Let the skew-symmetric matrix have the form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -b & c \\ 0 & 0 & -d & e & -f \\ -a & d & 0 & 0 & 0 \\ b & -e & 0 & 0 & 0 \\ -c & f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where $0 < a, b, c, d, e, f \leq 1$. Then, the corresponding mapping $V : S^4 \to S^4$ has the form

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1(1 + ax_3 - bx_4 + cx_5), \\ x_2' = x_2(1 - dx_3 + ex_4 - fx_5), \\ x_3' = x_3(1 - ax_1 + dx_2), \\ x_4' = x_4(1 + bx_1 - ex_2), \\ x_5' = x_5(1 - cx_1 + fx_2). \end{cases}$$

Next, we introduce the following notation: vertices of the simplex S^4 through $e_1, \ldots, e_5$, $\Gamma_{12} = \mathrm{co}\{e_1, e_2\}$ is edge, $\Gamma_{345} = \mathrm{co}\{e_3, e_4, e_5\}$ is a face of the simplex, as well as

$$\delta_1 = ce - bf, \quad \delta_2 = cd - af, \quad \delta_3 = bd - ae, \quad \Delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Consider the case when $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$. Note that $\mathrm{Fix}(V) = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{345}$. Taking into account the positivity of the expressions δ_1, δ_2, and δ_3, we mark the points on the edges of their disposition

$$M_1 = \left(\frac{d}{a+d}, \frac{a}{a+d}, 0, 0, 0\right), \quad M_2 = \left(\frac{e}{b+e}, \frac{b}{b+e}, 0, 0, 0\right), \quad M_3 = \left(\frac{f}{c+f}, \frac{c}{c+f}, 0, 0, 0\right),$$

$$M_4 = \left(0, 0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0\right), \quad M_5 = \left(0, 0, \frac{d}{d+e}, \frac{e}{d+e}, 0\right), \quad M_6 = \left(0, 0, 0, \frac{c}{b+c}, \frac{b}{b+c}\right),$$

$$M_7 = \left(0, 0, 0, \frac{f}{e+f}, \frac{e}{e+f}\right), \quad M_8 = \left(0, 0, \frac{\delta_1}{\Delta}, \frac{\delta_2}{\Delta}, \frac{\delta_3}{\Delta}\right),$$

with the help of which we determine the increase or decrease of a given coordinate under the action of the operator V. Since $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ we obtain a picture of the partition of the faces Γ_{12} and Γ_{345}, shown in Fig. 1. Considering $a\delta_1 - b\delta_2 + c\delta_3 = 0$ and $-d\delta_1 + e\delta_2 - f\delta_3 = 0$, we obtain solutions to the inequalities

$$P = \{x \in S^4 : Ax \geq 0\} = \mathrm{co}\{M_6, M_7, M_8\}, \quad Q = \{x \in S^4 : Ax \leq 0\} = \mathrm{co}\{M_4, M_5, M_8\}.$$

Theorem 1. Under the condition $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$, any trajectory converges, and if $x^{(0)} \in \mathrm{ri}\, S^4$, i.e., $x^{(0)}$ is an interior point of a simplex. Then, we have $\alpha(x^{(0)}) \subset P, \omega(x^{(0)}) \subset Q$.

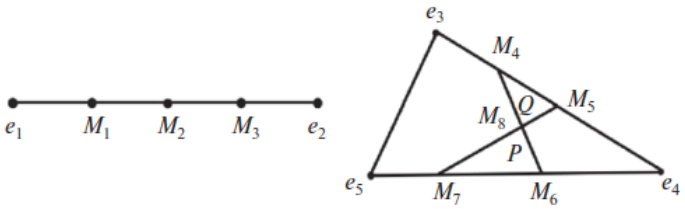


Fig. 1. The partition of the faces Γ_{12} and Γ_{345} of the S^4 simplex.

Рис. 1: The partition of the faces Γ_{12} and Γ_{345} of the S^4 simplex

Proof. Note that $\operatorname{ri} S^4 \cap \operatorname{Fix}(V) = \emptyset$. Let $x \in \operatorname{ri} S^4$ and $p \in \operatorname{ri} P$. Then, $p = (0, 0, p_3, p_4, p_5)$, where

$$p_3 = \frac{\delta_1\lambda_3}{\Delta}, \quad p_4 = \frac{c\lambda_1}{b+c} + \frac{f\lambda_2}{e+f} + \frac{\delta_2\lambda_3}{\Delta}, \quad p_5 = \frac{b\lambda_1}{b+c} + \frac{e\lambda_2}{e+f} + \frac{\delta_3\lambda_3}{\Delta},$$

and also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ and $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Consider the function on S^4

$$\varphi_p(x) = x_3^{p_3} x_4^{p_4} x_5^{p_5}, \tag{1}$$

which reaches its maximum only at the point $x = p$. Using Young's [1] inequalities, we obtain

$$\begin{aligned}\varphi_p(Vx) &= \varphi_p(x)(1 - ax_1 + dx_2)^{p_3}(1 + bx_1 - ex_2)^{p_4}(1 - cx_1 + fx_2)^{p_5} \\ &\le \varphi_p(x)[1 - (ap_3 - bp_4 + cp_5)x_1 - (-dp_3 + ep_4 - fp_5)x_2].\end{aligned}$$

Substituting the values p_3, p_4, and p_5, we find

$$ap_3 - bp_4 + cp_5 = \frac{\delta_1\lambda_2}{e+f}, \quad -dp_3 + ep_4 - fp_5 = \frac{\delta_1\lambda_1}{b+c}.$$

Consequently,

$$\varphi_p(Vx) \le \varphi_p(x)\left(1 - \frac{\delta_1\lambda_2}{e+f}x_1 - \frac{\delta_1\lambda_1}{b+c}x_2\right) < \varphi_p(x),$$

as $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Since $V : S^4 \to S^4$ is a homeomorphism, then (1) can be rewritten as

$$\varphi_p(V^{-1}x) > \varphi_p(x). \tag{2}$$

for any $x \in \operatorname{ri} S^4$, Consequently, the sets $\{x \in S^4 : \varphi_p(x) \ge t\}$, where $0 < t \le \varphi_p(p)$ are invariant under the mapping V^{-1}, and the sequence $\varphi_p(V^{(-n)})$, $n = 1, 2, \ldots$ increases monotonically for any $x^{(0)} \in \operatorname{ri} S^4$. Therefore, any negative trajectory converges and $\alpha(x^{(0)}) \subset \operatorname{ri} P$.

LITERATURE

1. A. W. Marshall, I. Olkin, and B. C. Arnold, Inequalities: Theory of Majorization and its Applications (Springer, New York, 2011).
2. D. B. Eshmamatova, R. N. Ganikhodzhaev, and M. A. Tadzieva, "Dynamics of Lotka-Volterra quadratic mappings with degenerate skew-symmetric matrix,"Uzbek Math. J. 66, 85-97 (2022).

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integralning uzluksizlik sharti

Qurbanova R. Sh.[1], **Aliqulov E. O.**[2]

[1]Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
08rano11@gmail.com
[2]Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
eshpulat-05@mail.ru

$A(z)$-analitik funksiyalar. Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{J}$ sohada

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $A(z)$ antianalitik funksiya mavjud bo'lsin, bunda $|A(z)| \leq c < 1$ barcha $z \in D$ uchun bajariladi. Agar har qanday $z \in D$ uchun

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

tenglik bajarilsa, u holda $F(z)$ funksiya D sohada $A(z)$-analitik deyiladi. Klassik $A(z)$-analitik funksiyalar sinfi D sohada $O_A(D)$ orqali belgilanadi. Antianalitik funksiya cheksiz silliq bo'lganligi sababli $O_A(D) \subset C^\infty(D)$ bo'ladi.

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integralning uzluksizlik sharti. $A(z)$-analitik funksiyalarning chegaraviy qiymatlaridan shunday xulosa qilish mumkinki, deyarli barcha chegaraviy $\zeta \in \partial L(a,r)$ nuqtalarda burchakli chegaraviy qiymatlar mavjud bo'ladi. Ular uchun $A(z)$-analitik funksiyalar Koshi tipidagi integrali mavjud bo'ladi. [1-3] Xususan,

$$\int\limits_{\partial L(a,r)} (f^*(\zeta) - f(z))K(\zeta, z)(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}),$$

maxsus integral aniqlanadi va

$$F(z) = f(z) + \int\limits_{\partial L(a,r)} (f^*(\zeta) - f(z))K(\zeta, z)(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}).$$

o'rinli bo'ladi.

Agar qo'shimcha shart sifatida

$$\Phi(\xi) = \int\limits_{\partial L(a,r)} |(f^*(\zeta) - f(z))K(\zeta, \xi)(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta})|$$

maxsus integral mavjud va $|\psi(a,\xi)| = \rho$, $0 < \rho < r$ da chegaralangan bo'lsa, $F(z)$ tenglik $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integralning umumiy holatiga ham tatbiq etiladi. U holda quyidagi natija o'rinli bo'ladi:

Teorema Agar $f^*(\zeta)$ funksiya $\partial L(a,r)$ da

$$\varphi(\xi) = \int\limits_{\partial L(a,r)} (f^*(\zeta) - f(\xi))K(\zeta, \xi)(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta})$$

maxsus integrali mavjud va u $\partial L(a,r)$ da uzluksiz hamda chegaralangan bo'lsa, $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integral $L(a,r)$ da uzluksiz funksiyani ifodalaydi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. **Привалов И.И.** *Граничные свойства аналитических функций.* Москва: Гостехиздат, 1950.
2. **Жабборов Н.М.** *Аналитическое продолжение интегралов типа Коши для $A(z)$-аналитических функций.Журнал Известия ВУЗов, Казанского федеральноого университета*, 2025.
3. **Жабборов Н.М.** *Аналог интегралной формулы Коши для аналитических функций. Узб. мат. журн.*, 2014.

УДК 517.98

New Non-Translation-Invariant Gibbs Measures for the Ising Model on a Cayley Tree of Order Three

Rahmatullaev M. M.[1,2], Burxonova Z. A.[2]

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
mrahmatullaev@rambler.ru

[2] Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
zulxumorburxonova4@gmail.com

Let $\tau^k = (V, L), k \geq 1$, be the Cayley tree of order k, i.e. an infinite graph such that every vertex of which is incident to exactly $k+1$ edges. Here V is the set of all vertices, L is the set of all edges of the tree τ^k. It is known that τ^k can be represented as a group G_k, which is the free product of $k+1$ cyclic groups of the second order [1], [2].

For an arbitrary point $x^0 \in V$ we set

$$W_n = \{x \in V | d(x^0, x) = n\}, V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m,$$

$$L_n = \{\langle x, y\rangle \in L | x, y \in V_n\},$$

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n$$

where $d(x, y)$ is the distance between the vertices x and y on the Cayley tree, i.e. the number of edges in the shortest path joining the vertices x and y.

Let $\Phi = \{-1, 1\}$ and let $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ be a configuration, i.e. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. Let $A \subset V$. We let Ω_A denote the space of configurations defined on the set A and taking values in Φ.

We consider the Hamiltonian of the Ising model:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

where $J \in R$, $\sigma(x) \in \Phi$ and $\langle x, y\rangle$ are nearest neighbors.

We are going to describe new Gibbs measures of the Ising model on the semi-infinite Cayley tree of order $k = 3$. We define the set of quantities $h = \{h_x, x \in V\}$ as follows:

(B) If $h_x = h_1$, then we put h_2 on all direct successors of x.

If $h_x = h_2$, then we put h_3 and 0 on an arbitrary vertex and the other two vertices of direct successors of x, respectively.

If $h_x = h_3$, then we put h_1 and 0 on an arbitrary vertex and the other two vertices of direct successors of x, respectively.

If $h_x = 0$, then we put 0 on all direct successors of x.

The set of the boundary conditions $\{0, h_1, h_2, h_3\}$ defined by the rule **(B)** for $k = 3$ must satisfy the equation:

$$\begin{cases} h_1 = 3f(h_2, \theta), \\ h_2 = f(h_3, \theta), \\ h_3 = f(h_1, \theta). \end{cases} \tag{2}$$

It is clear that $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ is a solution of (2). Using the formula

$$f(x, \theta) = \arctan h(\theta \tanh x) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\theta)e^{2h} + (1-\theta)}{(1-\theta)e^{2h} + (1+\theta)},$$

and introducing the notations $\alpha = \frac{1-\theta}{1+\theta}$, $z_i = e^{2h_i}$, $i = 1, 2, 3$. From equation (2), we can obtain the following system of equations:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{z_2+\alpha}{\alpha z_2+1}\right)^3, \\ z_2 = \frac{z_3+\alpha}{\alpha z_3+1}, \\ z_3 = \frac{z_1+\alpha}{\alpha z_1+1}. \end{cases} \tag{3}$$

By analyzing system of equation (3), we get the following:

Theorem 1. The following results concerning the Gibbs measures for the Ising model on the Cayley tree are established: Let $k = 3$.

- if $\theta \in \left(\frac{1-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{3+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}; 1\right)$, then there exist three Gibbs measures μ_0, μ_1 and μ_2, but two of them are non-translation-invariant;
- if $\theta \in \left(-1; \frac{1-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{3+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}\right]$, then a unique translation-invariant Gibbs measure exists μ_0.

Remark 1. The translation-invariant measure corresponding to $(z_1, z_2, z_3) = (1, 1, 1)$ found in Theorem 1 was studied in [2],[3],[4]. The non-translation-invariant measures mentioned in the of Theorem 1 are new Gibbs measures.

References

1. **Bleher P.M., Ganikhodjaev N.N.**, *On pure phases of the Ising model on the Bethe lattice* Theor. Probab. Appl..1990. 35. 216–227.

2. **Rozikov U.A.**, *Gibbs measures on Cayley trees*. Singapore: World Scientific, 2013.

3. **Rozikov U.A., Rahmatullaev M.M.**, *Description of weakly periodic Gibbs measures for the Ising model on a cayley tree*, Theor. Math. Phys. 2008. 156. 1218–1227.

4. **Georgii H.O.**, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, de Gryuter, Berlin. 1998.

УДК 517.9

The four-state Potts-SOS model on the Cayley tree: Translation-invariant ground states

Rasulova M. A.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
m_rasulova_a@rambler.ru

The Cayley tree Γ^k (see [1]) of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, from each vertex of which exactly $k+1$ edges issue.

In this work, we consider the four-state Potts-SOS model on the Cayley tree of order two. For this model, all translation-invariant ground states are described.

The Potts-SOS model (see [2]) is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = -J_P \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_S \sum_{\langle x,y\rangle \in L} |\, \sigma(x) - \sigma(y)\,|,$$

where $J_P, J_S \in \mathbb{R}$ are nonzero coupling constants and $\sigma \in \Phi^V$.

We denote the following set: $A = \{(J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2 : J_S \leq J_P,\ 3J_S \leq J_P\}$.

We have the following theorem:

Theorem 1. For the four-state Potts-SOS model on the Cayley tree of order two, the following assertions hold

I. If $(J_P, J_S) \in A$, then there exist exactly four translation-invariant ground states, which have the form $\sigma(x) = j$ for all $x \in V, j \in \Phi$.

II. If $(J_P, J_S) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, then there are no translation-invariant ground states.

REFERENCES

1. **Rozikov U. A.** *Gibbs Measures in Biology and Physics: The Potts Model.* World Scientific: Singapore. -2023. 368 p.

2. **Rahmatullaev M. M., Rasulova M. A.** *Ground States and Gibbs Measures for the Potts-SOS Model with an External Field on the Cayley Tree.* Lobachevskii Journal of Mathematics. -2024. Vol. 45, No. 1, pp. 518–531.

Positional function of robotics mechanisms and its asymptotic solution near the singularities

Soleev A.[1], Soleeva N.[2]
[1,2] Department Mathematics, Samarkand State University 140104 University boulevards 15, Samarkand, Uzbekistan
[1,2] asoleev@yandex.ru

The singularities of positional functions of robotics are divided in two types [1]. The first type comprises singularities as function of the control coordinates. The second type are the singularities near which the coordinates of position and control do not form a n-dimensional manifold, where n is the number of the degrees of freedom. On the examples of concrete rotating mechanism we demonstrated that the singularities of the second type take place only in the exceptional mechanisms, whose parameters satisfy certain conditions [1].

Various mechanisms used in robotics are described by system of algebraic equations of the form

$$f_i\,(X, Y) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m, \tag{1}$$

where X are the position coordinates of the mechanism, Y are the control coordinates and the f_i are polynomials. Here the number of equations m coincides with the number of position coordinates X and the number n is called the number of degrees of freedom of the mechanism. The many-valued vector function $X\,(Y)$ is called the positional function of the mechanism. Assume that the point $\left(X^0,\, Y^0\right)$ satisfies the system of equations (1). We are interested in the behavior of the positional function in the vicinity of that point. We consider the Jacobian of the system (1) $J\,(X,\, Y)$. When $J\left(X^0,\, Y^0\right) = 0$ the point $\left(X^0,\, Y^0\right)$ singular one and it corresponds to the singular position of the mechanism. In the vicinity of a singular point, the positional function $X\,(Y)$ is not a single-valued analytic function of the controlling coordinates Y. We had completely studied the mechanisms with with complicated singular points with the help of Newton polyhedrons method [2]. In the given work we considered concrete rotating mechanism which investigated in case of complicated singular points

REFERENCES

1. **Bruno, A.D., Soleev, A.** *SClassification of singularities of the position's function of mechanisms. J. Machinery Manufacture and Reliability №1, 1994.102-108.*
2. **Soleev A., Soleeva N.** *Power geometry and algebraic equations. AIP Conference Proceedings, 1557, 85. 2013*

UDC 517.988.2

Convergence analysis of a modified proximal point algorithm for a nearly asymptotically quasi-nonexpansive mapping

Sulaymonova S.S.
Academic lyceum of Bukhara Medical Institute, Bukhara, Uzbekistan;
sulaymonovasitora91@gmail.com

Let $\mathcal{C}$ be a nonempty closed convex subset of complete CAT(0) space and $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ be a mapping. Let $x_1 \in \mathcal{T}$ be arbitrary and the sequence generated iteratively by

$$\begin{aligned} c_n &= \mathcal{T}^n((1-\rho_n)x_n \oplus \rho_n \mathcal{T}^n x_n), \\ b_n &= \mathcal{T}^n(\mathcal{T}^n c_n), \\ a_n &= \mathcal{T}^n(\mathcal{T}^n b_n), \\ x_{n+1} &= \mathcal{T}^n a_n, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Let $(\mathcal{X}, d)$ be a metric space and $f : \mathcal{X} \to (\infty, \infty]$ be a proper and convex function. One of the major problems in optimization is to find $x \in \mathcal{X}$ such that

$$f(x) = \min_{y \in \mathcal{X}} f(y). \tag{2}$$

The set of minimizers of f is denoted by $\arg\min_{y \in \mathcal{X}} f(y)$.
We provide the following modified proximal point approach for nearly asympotically quasi-nonexpansive mappings in CAT(0) spaces utilising the iteration process defined by Asifa et al. :

$$x_1 \in \mathcal{C}$$

$$v_n = \arg\min_{c\in\mathcal{C}} \big(\mathcal{L}(c) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(c, x_n)\big),$$
$$u_n = \arg\min_{b\in\mathcal{C}} \big(\mathcal{G}(b) + \frac{1}{2\varphi_n} d^2(b, v_n)\big),$$
$$c_n = ((1-\rho_n)x_n \oplus \rho_n \mathcal{T}^n u_n),$$
$$b_n = \mathcal{T}^n(\mathcal{T}^n c_n),$$
$$a_n = \mathcal{T}^n(\mathcal{T}^n b_n),$$
$$x_{n+1} = \mathcal{T}^n a_n, \quad n \geq 1. \tag{3}$$

The proposed problem is illustrate convergence outcomes of the proposed process under several moderate conditions based on previous work.

REFERENCES

1.**A. Tassaddiq, W. Ahmed, S. Zaman, A. Raza, U. Islam and K. Nantomah** *A Modified Iterative Approach for Fixed Point Problem in Hadamard Spaces.* Journal of Function Spaces, 2024(2024) 10

2.**B. Martinet.** *Régularisation d'inéuations variationnelles par approximations successives.* Rev. Fr. Inform. Rech. Oper. 4 (1970)154-158,

UDC 519.853.3

Modified proximal point algorithm for dealing with fixed point problems and convex minimization problems in CAT(0) Space

Sulaymonova S.S.,
Academic lyceum of Bukhara Medical Institute, Bukhara, Uzbekistan;
sulaymonovasitora91@gmail.com

Lemma. Assume that a complete CAT(0) space $\mathcal{Z}$ has a nonempty closed and convex subset $\mathcal{D}$. The single-valued nonexpansive mappings are denoted by $\mathfrak{T}_i : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$; the multi-valued nonexpansive mappings are denoted by $\mathcal{S}_i : \mathcal{D} \to CB(\mathcal{D})$ for $i = 1:3$ and $\mathfrak{G}, h : \mathcal{D} \to (-\infty, \infty]$ are two proper convex and lower semi-continuous functions. Suppose that

$$\Omega = \mathfrak{U}(\mathfrak{T}_1) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{T}_2) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{T}_3) \cap \mathfrak{U}(\mathcal{S}_1) \cap \mathfrak{U}(\mathcal{S}_2) \cap \mathfrak{U}(\mathcal{S}_3) \cap \arg\min_{y\in\mathcal{D}} \mathfrak{G}(y) \cap \arg\min_{\zeta\in\mathcal{D}} h(\zeta) \neq \emptyset$$

and $\mathcal{S}_i q = \{q\}$, $i = 1:3$ for $q \in \Omega$. For $u_1 \in \mathcal{D}$, let the sequence $\{u_k\}$ is generated in the following manner:

$$\begin{cases} s_k = \arg\min\limits_{y\in\mathcal{D}} [\mathfrak{G}(y) + \frac{1}{2\lambda_k} d^2(y, u_k)], \\ v_k = \arg\min\limits_{\zeta\in\mathcal{D}} [h(\zeta) + \frac{1}{2\sigma_k} d^2(\zeta, s_k)], \\ \varphi_k = \varrho_k u_k \oplus \varsigma_k v_k' \oplus \gamma_k v_k'', \\ \Psi_k = \psi_k u_k \oplus \kappa_k v_k''' \oplus \phi_k \mathfrak{T}_1 u_k, \\ u_{k+1} = \delta_k u_k \oplus \eta_k \mathfrak{T}_2 u_k \oplus \xi_k \mathfrak{T}_3 \Psi_k, \quad for \quad all \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

where $\{\varrho_k\}$, $\{\varsigma_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{\psi_k\}$, $\{\kappa_k\}$, $\{\phi_k\}$, $\{\delta_k\}$, $\{\eta_k\}$ and $\{\xi_k\}$ are sequences in $(0, 1)$ such that

$$0 < a \leq \{\varrho_k\}, \{\varsigma_k\}, \{\gamma_k\}, \{\psi_k\}, \{\kappa_k\}, \{\phi_k\}, \{\delta_k\}, \{\eta_k\}, \{\xi_k\} \leq b < 1,$$

$$\varrho_k + \varsigma_k + \gamma_k = 1, \psi_k + \kappa_k + \phi_k = 1, \delta_k + \eta_k + \xi_k = 1, \tag{2}$$

for all $k \in \mathbb{N}$ and $\{\lambda_k\}$ is a sequence such that $\lambda_k \geq \lambda > 0$ for all $k \in \mathbb{N}$ and some λ. Then, the subsequent claims are true:

(i) $\lim_{k\to\infty} d(u_k, q)$ exists for all $q \in \Omega$;

(ii) $\lim_{k\to\infty} d(u_k, s_k) = 0$; $\lim_{k\to\infty} d(s_k, v_k) = 0$;

(iii) $\lim_{k\to\infty} dist(u_k, \mathcal{S}_i u_k) = 0, i = 1, 2, 3$;

(iv) $\lim_{k\to\infty} d(u_k, \mathfrak{T}_i u_k) = 0, i = 1, 2, 3$;

(v) $\lim_{k\to\infty} d(u_k, J_\lambda u_k) = 0$, $\lim_{k\to\infty} d(u_k, J_\sigma u_k) = 0$.

Theorem. *assume that a complete CAT(0) space $\mathcal{Z}$ has a nonempty closed and convex subset $\mathcal{D}$. The single-valued nonexpansive mappings are denoted by $\mathfrak{T}_i : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$; the multi-valued nonexpansive mappings are denoted by $\mathcal{S}_i : \mathcal{D} \to CB(\mathcal{D})$ for $i = 1 : 3$ and $\mathfrak{G}, h : \mathcal{D} \to (-\infty, \infty]$ are two proper convex and lower semi-continuous functions. Consider that*

$$\Omega = \mathfrak{U}(\mathfrak{T}_1) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{T}_2) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{T}_3) \cap \mathfrak{U}(\mathcal{S}_1) \cap \mathfrak{U}(\mathcal{S}_2) \cap \mathfrak{U}(\mathcal{S}_3) \cap \arg\min_{y\in\mathcal{D}} \mathfrak{G}(y) \cap \arg\min_{\zeta\in\mathcal{D}} h(\zeta) \neq \emptyset$$

and $\mathcal{S}_i q = \{q\}$, $i = 1 : 3$ for $q \in \Omega$. For $u_1 \in \mathcal{D}$, let the sequence $\{u_k\}$ is generated by (1), where $\{\varrho_k\}$, $\{\varsigma_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{\psi_k\}$, $\{\kappa_k\}$, $\{\phi_k\}$, $\{\delta_k\}$, $\{\eta_k\}$ and $\{\xi_k\}$ are sequences in $(0, 1)$ such that it satisfies (2) and $\{\lambda_k\}$ is a sequence such that $\lambda_k \geq \lambda > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$ and some λ. In turn, the sequence $\{u_k\}$ Δ-converges to a point in Ω.

REFERENCES

1.**B. Martinet.** *Régularisation d'inéuations variationnelles par approximations successives.* Rev. Fr. Inform. Rech. Oper. 4 (1970)154-158,

2.**R.T. Rockafellar.** *Monotone operators and the proximal point algorithm.* SIAM J. Control Optim., 14: 877-898, 1977.

Smooth boundary points of the matrix ball

Shaimkulov B. A.[1], Rasulova M. K.[2]

[1] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; shoimkba@rambler.ru [2] Mathematics Institute named after V.I.Romanovskiy of Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; maftunakomiljonovnaa@gmail.com

This work presents a proposition that plays an important role in proving the boundary Schwarz lemma for the matrix ball and characterizes properties related to smooth boundary points.

Let $\mathbb{C}^n[m \times m]$ be the set of all $Z = (Z_1, \dots Z_n)$ vectors, consist of $Z_q(q = 1, 2, ..., n) \in \mathbb{C}[m \times m]$ matrices of orders m. For any $Z, W \in \mathbb{C}^n[m \times m]$, the inner product defined as

$$\langle Z, W\rangle = Z_1 W_1^* + ... + Z_n W_n^*$$

where W^* is transpose complex conjugate of W and for any $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{C}[m, m]$, the inner product is given by

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} a_{ij} \bar{b}_{ij},$$

where A $= (a_{ij})_{m\times m}$ and B $= (b_{ij})_{m\times m}$. The matrix ball of type $\mathcal{I}$, denoted by $B_{m,n}$, is defined as

$$B_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - \langle Z, Z\rangle > 0\} \tag{1}$$

where I is the unit square matrix of order m, and the inequality sign means that the left-hand side is positive definite[1].

Now, let us introduce the following notation

$$L_Z = \sum_{q=1}^{n} Z_q Z_q^*, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n[m \times m]$$

It is easy to verify that L_Z is self-adjoint, and using this, we can rewrite (**??**) as follows

$$B_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I - L_Z > 0\}.$$

For simplicity, we write $\mathbb{C}^{1\times mn}$ as $\mathbb{C}^{mn}$. Let $B^{mn} \subset \mathbb{C}^{mn}$ be the open unit ball under the Euclidean metric. The Minkowski functional

$$\rho(Z) = \max\{\| \alpha Z \| : \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn}) \in \partial B^{mn}\}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n[m \times m],$$

where ∂B^m is the boundary of B^m. We know that $\rho(Z)$ is a Banach norm of $\mathbb{C}^n[m \times m]$, $(\rho(Z))^2$ is the largest eigenvalue of L_Z [3], and

$$B_{m,n} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \rho(Z) < 1\}.$$

In particular, $B_{m,1}$ is just the classical domain of type $\mathcal{I}$ and $B_{1,1}$ is just the open unit disk D.

For all unitary matrices $U_1, \ldots, U_n$ and $V_1, \ldots, V_n$ of order m, it is easy to see that

$$Z \in B_{m,n} \Leftrightarrow Z_{UV} = (U_1 Z_1 V_1, \ldots, U_n Z_n V_n) \in B_{m,n} \text{ and}$$
$$Z \in \partial B_{m,n} \Leftrightarrow Z_{UV} = (U_1 Z_1 V_1, \ldots, U_n Z_n V_n) \in \partial B_{m,n}.$$

Smooth boundary points of $B_{m,n}$. We know that $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ and $L_{\mathring{Z}} \in \mathbb{C}[m \times m]$ have the following decompositions[2], i.e.,

$$Z_q = U_q \begin{pmatrix} \sigma_1^{(q)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{(q)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_m^{(q)} \end{pmatrix} V_q^*$$

$$L_{\mathring{Z}} = U \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_m \end{pmatrix} U^*$$

where $q = 1, \ldots n$, $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_m \geq 0$, $U = (u_{ij})_{m\times m}$,$U_q = (u_{ij}^{(q)})_{m\times m}$ and $V_q = (v_{ij})_{m\times m}$ are a unitary square matrices of order m. We give the properties of the smooth boundary points of $B_{m,n}$.

Proposition. *Let $\overset{\circ}{Z}$ be a boundary point of $B_{m,n}$ Then $\overset{\circ}{Z}$ is a smooth boundary point if and only if $1 = r_1 > r_2 \geq \cdots \geq r_m \geq 0$. Moreover, its gradient admits the componentwise representation*

$$(\nabla\rho(\overset{\circ}{Z}))_q = \sigma_1^{(q)} U_q \begin{pmatrix} l_q & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} V_q^*$$

where $l_q = \frac{1}{2}\sigma_1^{(q)} \sum_{t=1}^{m} \overline{u}_{t1} u_{t1}^{(q)}$. This gradient constitutes the outward normal vector to $\partial B_{m,n}$ at $\overset{\circ}{Z}$ with $\sum_{q=1}^{n} \left(\overset{\circ}{Z}_q, (\nabla\rho(\overset{\circ}{Z}))_q\right) = 1$.

Literature

1. **Khudayberganov G. Kytmanov A. Shaimkulov B.** *Complex Analysis in Matrix Domains.* Krasnoyarsk,Siberian Federal University,2011-299 p
2. **Hua L K.** *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains.* Providence:Amer.Math Soc,1963
3. **Liu T S, Tang X M.** *A boundary Schwarz lemma on the classical domain of type I.* Sci China Math,2017.60 p.

MSC 28C10, 47H06

Representation of the set of idempotent probability measures $I(X)$ by balls on the idempotent space $\mathbb{R}^n_{\max}$.

Tagaymurotov A. O.
Tashkent University of Architecture and Civil Engineering, Tashkent, Uzbekistan;
tagaymurotov93@gmail.com

Idempotent mathematics emerged as one of the most dynamically developing branches of modern mathematics. Its rationale lies in replacing traditional arithmetic operations with idempotent analogs, leading to new structures, methods, and applications in various fields of analysis, algebra, optimization, and probability theory. In particular, mathematicians [1], [2] have contributed to the significant development of idempotent analysis and idempotent probability measures.

In this thesis, we focus on the space of idempotent probability measures that can be viewed as a subset of $\mathbb{R}^n_{\max}$. Our main goal is to establish its representation in terms of the combination of closed balls in the idempotent space.

Let $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ equip with two new operations $\oplus$ and $\odot$, which are defined as $x \oplus y = \max\{x, y\}$, $x \odot y = x + y$, $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$. Then $\mathbf{0} := -\infty$ is the zero of $\mathbb{R}_{\max}$ according to $\oplus$, and $\mathbf{1} := 0$ the unit of $\mathbb{R}_{\max}$ according to $\odot$.

For every $x, y \in \mathbb{R}^n_{\max}$ we put $x \oplus y = (\max\{x_i, y_i\})_{i\in[n]}$ where $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ and for an arbitrary $t \in \mathbb{R}_{\max}$, let $t \odot x = \{t + x_1, t + x_2, \dots, t + x_n\}$.

By ordered set, we will mean throughout the paper a set equipped with a partial order. Let partially order defined following way:

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \oplus b = b.$$

In [3] conceptions such as max-plus absolute value, max-plus norm, max-plus distance, max-plus ball in the sense $\mathbb{R}_{\max}$ and $\mathbb{R}^n_{\max}$ had included.

For $x \in \mathbb{R}^n_{\max}$ we put

$$x^+ = x \oplus 0, \qquad x \neq 0,$$
$$x^- = (-x) \oplus 0, \qquad x \neq 0.$$

If $x = \mathbf{0}$, then $x^+ = x^- = 0$.

A number $|t|_\oplus = t^+ \oplus t^-$ is said to be a max-plus absolute value of $t \in \mathbb{R}_{\max}$. We suggested a max-plus plus norm of x in $\mathbb{R}^n_{\max}$ as a number $\|x\|_\oplus = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}(x_i^+ \oplus x_i^-)$.

We defined a max-plus distance between x and $y \in \mathbb{R}^n_{\max}$ as following

$$d_\oplus(x,y) = \left(\bigoplus_{i=1}^n \left((x_i \odot (-y_i))^+\right)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \left((x_i \odot (-y_i))^-\right)\right).$$

A set

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n_{max} : d_\oplus(x,y) \leq r\}$$

is said to be a max-plus ball at the center x with the radius r.

Clearly, for such balls the following equality holds:

$$B(x,r) \oplus B(x,r) = B(x,r)$$

This equality follows from the idempotency of addition $\oplus$.

Let X be a set consisting of n different points, and equipped with the discrete topology. The following set

$$I(X) = \left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mu_i \odot \delta_{x_i} : \ \mu_i \leq 0,\, i = 1,\, \ldots,\, n;\ \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mu_i = 0 \right\}.$$

called the set of all idempotent probability measures on X.

It is well known the set $\mathbb{R}^n_{\max}$ is an idempotent space over the semiring $\mathbb{R}_{\max}$.

For $r > 0$ and any $x \in \mathbb{R}^n_{\max}$ satisfying $||x||_\oplus \leq r$, we consider the ball

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n_{\max} : d_\oplus(x,y) \leq r\}.$$

This ball is partitioned into the following subsets

$$B^+(x,r) = \Big\{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B(x,r) : y_i > 0,\, i = 1,2,\ldots n\Big\},$$

$$B^- = B(x,r) \setminus B^+(x,r) = \Big\{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B(x,r) : y_i \leq 0,\, i = 1,2,\ldots n\Big\}.$$

We define the mapping

$$Pr_i \colon \mathbb{R}^n_{max} \to \mathbb{R}^n_{max}$$

for every $x = (x_k) \in \mathbb{R}^n_{max}$ by the rule

$$Pr_i(x) = (x_1,\, \ldots,\, x_{i-1},\, 0,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_n). \tag{1}$$

It is clear that this mapping projects the $\mathbb{R}^n_{\max}$ space onto the hyperplane $x_i = 0$.

Lets denote the image of reflection of B^- relative to the plane (1) by A_i, that is

$$A_i(x,\, r) = Pr_i(B^-) = \Big\{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B(x,r) : y_i = 0, y_j \leq 0,\, j \in [n] \setminus \{i\}\Big\}.$$

Theorem. For a n-point set X the set $I(X)$ admits the following representation in the idempotent space $\mathbb{R}^n_{\max}$

$$I(X) = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \underset{x \in \mathbb{R}^n_{\max}}{\cup} A_i(x,\, r)$$

REFERENCES

1. **Zaitov A. A.** *On a metric on the space of idempotent probability measures, Applied General Topology **21** (1), (2020) 35–51.*
2. **Litvinov G. L., Maslov V. P.,Shpiz G. B.** *Idempotent functional analysis: An algebraic approach, Matematicheskie Zametki **69** (5), 758–797 (2001).*
3. **Tagaymurotov A. O.** *Representation of a Max-Plus-Gauge of the Set of Idempotent Probability Measures by the Guage of the Set of Probability Measures, AIP Conf. Proc. 3004, 020012 (2024).*

УДК 517.984

THREE ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL. FIRST DOUBLET STATE

Tashpulatov S. M.[1]

[1] Institute of Nuclear Physics of the Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru

We consider the energy operator of three-electron systems in the Impurity Hubbard model and describe the structure of the essential spectra and discrete spectrum of the system for first doublet states in the lattice. The Hamiltonian of the system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} +$$

$$+(B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \quad (1)$$

Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site, B (B_0) is the transfer integral between (between electron and impurities) neighboring sites (we assume that $B > 0$ for convenience), $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, ..., \nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, γ is the spin index, $\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. The simplicity and sufficiency of Hubbard Hamiltonian have made the Hubbard model very popular and effective for describing strongly correlated electron systems in which the Coulomb repulsion parameter U is greater or on the order of the width of the zone $\widetilde{W}$. For a simple cubic lattice $\widetilde{W} = 2zA$, for $z-$ the number of nearest neighbors lattice site. The Hubbard model is the fundamental working model in the theory of strongly correlated electron systems. Among the real objects, it describes best the narrow-band transition metals and their compounds. For this class of materials, the Hubbard model is an effective model for describing their magnetic and electrical properties and relations between them. Hamiltonian (1) commutes with all components of the total spin operator $S = (S^+, S^-, S^z)$, and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depends on S. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathcal{H}_{as}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The first doublet state corresponds to the free motion of three electrons and their interactions over the lattice with the basic functions ${}^1d^{1/2}_{p,q,r\in Z^\nu} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^1\mathcal{H}^d_{1/2}$, corresponding to the first doublet state is the set of all vectors of the form ${}^1\psi^d_{1/2} = \sum_{p,q,r\in Z^\nu} f(p,q,r)\,{}^1d^{1/2}_{p,q,r\in Z^\nu}, f \in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^3)$. We denote by ${}^1H^d_{1/2}$ the restriction

of operator H to the subspace ${}^1\mathcal{H}^d_{1/2}$. We let $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$ and $\varepsilon_3 = U_0 - U$. In the impurity Hubbard model, the spectral properties of the considered energy operator of three-electron systems are closely related to those of its one-electron impurity subsystems. We let $\mathcal{H}_1$ denote the space of one-electron states of the operator H. We let H_1 denote the restriction of H to the space $\mathcal{H}_1$.

The exchange of the spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ in the case $\nu = 1, 2, 3$ given in work [1] in Theorem 9. Therefore, we will not give this theorem here. Consequently, the spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ is consists from continuous spectrum and at most two eigenvalues. Now, using the obtained results, and tensor products of Hilbert spaces and tensor products of operators in the Hilbert spaces, we describe the structure of the essential spectrum and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$.

Theorem 1. *Let $\nu = 1$ and $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$. Then*

A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of the union of five segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [2A - 4B + z, 2A + 4B + z] \cup [A - 2B + 2z, A + 2B + 2z] \cup [A - 2B + z_3, A + 2B + z_3] \cup [A - 2B + z_4, A + 2B + z_4]$ and the discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of three eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z, z + z_3, z + z_4\}$, where $z = A + \varepsilon_1$, z_3 and z_4 are same concrete numbers.

B). If $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 > 0$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of the union of five segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [2A - 4B + z, 2A + 4B + z] \cup [A - 2B + 2z, A + 2B + 2z] \cup [A - 2B + z_3, A + 2B + z_3] \cup [A - 2B + z_4, A + 2B + z_4]$ and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of three eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z, z + z_3, z + z_4\}$, where $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$).

C). If $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ or $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$, then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of the union of eight segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [2A - 4B + z_1, 2A + 4B + z_1] \cup [2A - 4B + z_2, 2A + 4B + z_2] \cup [A - 2B + 2z_1, A + 2B + 2z_1] \cup [A - 2B + 2z_2, A + 2B + z_2] \cup [A - 2B + z_4, A + 2B + z_4] \cup [A - 2B + z_3, A + 2B + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_2, A + 2B + z_1 + z_2]$, and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of eight eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, 3z_2, 2z_1 + z_2, z_1 + 2z_2, z_1 + z_3, z_2 + z_3, z_1 + z_4, z_2 + 2z_4\}$, where $z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$ and $z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$.

D). If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of the union of five segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [2A - 4B + z, 2A + 4B + z] \cup [A - 2B + 2z, A + 2B + 2z] \cup [A - 2B + z_3, A + 2B + z_3] \cup [A - 2B + z_4, A + 2B + z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of three eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z, z + z_3, z + z_4\}$, where $z = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$ (respectively, $z = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$).

E). If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of the union of five segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [2A - 4B + z, 2A + 4B + z] \cup [A - 2B + 2z, A + 2B + 2z] \cup [A - 2B + z_3, A + 2B + z_3] \cup [A - 2B + z_4, A + 2B + z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ consists of three eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z, z + z_3, z + z_4\}$, where $z = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$ and $\alpha > 1$.

F). If $\varepsilon_2 > 0$ *and* $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of the union of five segments:* $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-6B, 3A+6B] \cup [2A-4B+z, 2A+4B+z] \cup [A-2B+2z, A+2B+2z] \cup [A-2B+z_3, A+2B+z_3] \cup [A-2B+z_4, A+2B+z_4]$*, and discrete spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of three eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z, z+z_3, z+z_4\}$*, where* $z = A - \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$ *and* $\alpha > 1$.

K). If $\varepsilon_2 > 0$ *and* $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of the union of eight segments:* $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-6B, 3A+6B] \cup [2A-4B+z_1, 2A+4B+z_1] \cup [2A-4B+z_2, 2A+4B+z_2] \cup [A-2B+2z_1, A+2B+2z_1] \cup [A-2B+2z_2, A+2B+z_2] \cup [A-2B+z_4, A+2B+z_4] \cup [A-2B+z_3, A+2B+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_2, A+2B+z_1+z_2]$*, and discrete spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of eight eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, 3z_2, 2z_1+z_2, z_1+2z_2, z_1+z_3, z_2+z_3, z_1+z_4, z_2+2z_4\}$*, where* $z_1 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$*,* $z_2 = A + \frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$ *and the real number* $0 < \alpha < 1$.

M). If $\varepsilon_2 > 0$ *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < 0$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of the union of eight segments:* $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-6B, 3A+6B] \cup [2A-4B+z_1, 2A+4B+z_1] \cup [2A-4B+z_2, 2A+4B+z_2] \cup [A-2B+2z_1, A+2B+2z_1] \cup [A-2B+2z_2, A+2B+z_2] \cup [A-2B+z_4, A+2B+z_4] \cup [A-2B+z_3, A+2B+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_2, A+2B+z_1+z_2]$*, and discrete spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of eight eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, 3z_2, 2z_1+z_2, z_1+2z_2, z_1+z_3, z_2+z_3, z_1+z_4, z_2+2z_4\}$*, where* $z_1 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$*,* $z_2 = A + \frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$ *and the real number* $0 < \alpha < 1$.

N). If $\varepsilon_1 > 0$ *and* $-2B < \varepsilon_2 < 0$*, then the essential spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of the union of three segments:* $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-6B, 3A+6B] \cup [A-2B+z_3, A+2B+z_3] \cup [A-2B+z_4, A+2B+z_4]$*, and discrete spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *is empty set:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \emptyset$.

We denote via W Watson integral [2] $W = \frac{1}{\pi^3}\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0}\frac{3dxdydz}{3-cosx-cosy-cosz} \simeq 1,516$.

Theorem 2. *Let* $\nu = 3$ *and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$*. Then*

A). If $\varepsilon_2 = -B$ *and* $\varepsilon_1 < -6B$ *(respectively,* $\varepsilon_2 = -B$ *and* $\varepsilon_1 > 6B$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of the union of five segments:* $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-18B, 3A+18B] \cup [2A-12B+z, 2A+12B+z] \cup [A-6B+2z, A+6B+2z] \cup [A-6B+z_3, A+6B+z_3] \cup [A-6B+z_4, A+6B+z_4]$*, and the discrete spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of three eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z, z+z_3, z+z_4\}$*, where* $z = A+\varepsilon_1$*, and* z_3 *and* z_4 *are the same concrete numbers.*

B). If $\varepsilon_2 = -B$ *and* $-6B \le \varepsilon_1 < -2B$ *(respectively,* $\varepsilon_2 = -B$ *and* $2B < \varepsilon_1 \le 6B$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of the union of three segments:* $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-18B, 3A+18B] \cup [A-6B+z_3, A+6B+z_3] \cup [A-6B+z_4, A+6B+z_4]$*, and the discrete spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of empty set:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = \emptyset$.

C). If $\varepsilon_2 > 0$ *and* $0 < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *and* $(1-\frac{\alpha}{3})W < E < (1+\frac{\alpha}{3})W$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *and* $(1-\frac{\alpha}{3})W < E < (1+\frac{\alpha}{3})W$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists of the union of eight segments:* $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-18B, 3A+18B] \cup [2A-12B+z_1, 2A+12B+z_1] \cup [2A-12B+z_2, 2A+12B+z_2] \cup [A-6B+2z_1, A+6B+2z_1] \cup [A-6B+2z_2, A+6B+2z_2] \cup [A-6B+z_1+z_2, A+6B+z_1+z_2] \cup [A-6B+z_3, A+6B+z_3] \cup [A-6B+z_4, A+6B+z_4]$*, and discrete spectrum of the* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *consists*

of eight eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_1^t) = \{3z_1, 2z_1+z_2, z_1+2z_2, 3z_2, z_1+z_3, z_2+z_3, z_1+z_4, z_2+z_4\}$, *where* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, $0<\alpha<1$, z_3 *and* z_4 *are the concrete numbers.*

References

1. **Tashpulatov S.M.** *Spectra of the energy operator of two-electron system in the impurity hubbard model.*, Journal of Applied Mathematics and Physics. 10, 2022.P. 2743-2779.
2. **Val'kov V.V., Ovchinnikov S. G., and Petrakovskii O. P.** *The excitation spectra of two-magnon systems in easy-axis quasidimensional ferromagnets*, Sov. Phys. Solid State. Vol. 30, 1988. P. 3044-3047.

Application of Stokes' Formula in Complex Space and Solving Linear Integral Problems

Uralbayev Muxtar [1]
[1]**Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz, Nukus, Uzbekistan; uralbaevmuxtar@gmail.com**

Introduction. Stokes' Theorem is a fundamental result of vector calculus that connects the circulation of a vector field along a closed curve with the curl of the field over the surface bounded by the curve [1] While traditionally presented in real variables, it admits elegant connections with complex analysis: many complex line integrals can be interpreted as real circulation integrals of associated vector fields, and singularities (poles) correspond to points where the field is not smooth [2].

Example 1. Consider the vector field

$$\vec{F}(x,y) = (-y, x, 0).$$

We aim to compute the line integral

$$I = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{1}$$

where ∂S is the unit circle centered at the origin.

Solution. Parameterize the unit circle as

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Then

$$d\vec{r} = (-\sin t, \cos t)\, dt,$$

and

$$\vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) = 1.$$

Thus

$$I = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi. \tag{2}$$

Now, compute the curl:

$$\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 2).$$

Therefore, the surface integral over the unit disk S is

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_S 2\, dA = 2\pi, \tag{3}$$

in agreement with Stokes's Theorem.

Example 2. (Stokes / Green formula and Cauchy integral in complex space) This example demonstrates the connection between Stokes' (Green's) formula and Cauchy's integral formula in complex analysis.

Theoretical background. For a domain $D \subset \mathbb{C}$ with smooth boundary ∂D and an analytic function f in D, consider

$$I(z_0) = \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta, \qquad z_0 \in D.$$

By Green's formula in the plane, for a sufficiently smooth function $g(\zeta)$ we have

$$\oint_{\partial D} g(\zeta)\, d\zeta = 2i \iint_D \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}\, dA(\zeta),$$

where dA is the area element and $\partial/\partial\bar{\zeta}$ is the Wirtinger derivative.

Taking $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$, the $\bar{\partial}$вЂ“derivative reduces to a distributional term at $\zeta = z_0$. As a result,

$$\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = 2\pi i\, f(z_0),$$

which is exactly the Cauchy integral formula obtained through Stokes/Green.

Concrete example. Let D be the unit disk $\{|\zeta| < 1\}$, take $f(\zeta) = \zeta^2$ and $z_0 = \frac{1}{2}$. Then

$$J = \oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^2}{\zeta - \frac{1}{2}}\, d\zeta.$$

By the Cauchy formula,

$$J = 2\pi i\, f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\pi i \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{\pi i}{2}.$$

Interpretation. Here the vector field analogue corresponds to a singular field with zero curl everywhere except at the singularity z_0, where the circulation is concentrated. In complex analysis, this corresponds to a pole with residue $f(z_0)$, and the integral value $2\pi i f(z_0)$ reflects the winding number of the curve around z_0.

Literature

[1] Ahlfors L.V. *Complex Analysis. 3rd Edition. McGraw-Hill, 1979.*

[2] Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ. Часть II. Функции нескольких переменных.* Москва: Наука, 1985.

Kredit risk bo‘yicha portfel modellari. Portfel yo‘qotishlari taqsimoti.

Xayrullayeva M. G‘.
Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
malikamath0001@gmail.com

Tijorat bankining portfel riski deganda bank tomonidan sotib olingan qimmatli qog‘ozlarning baholarini o‘zgarishi natijasida bankning zarar ko‘rish xavfi tushuniladi.
Katta miqdordagi N kreditlardan tashkil topgan portfelning yo‘qotishlar taqsimoti, har bir alohida kreditning yo‘qotishlar taqsimotini yig‘ish orqali aniqlanadi. Bu quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$L_p = \sum_{i=1}^{N} L_i = \sum_{i=1}^{N} EAD_i \times LGD_i \times \delta_{PD_i}$$

Bu yerda:
L_p– portfel bo‘yicha umumiy yo‘qotish;
L_i– i-kredit bo‘yicha yo‘qotish;
EAD_i , LGD_i, PD_i- mos ravishda defolt paytidagi ekspozitsiya, defolt holatidagi yo‘qotish darajasi va defolt ehtimoli.
Portfelning kutilayotgan yo‘qotishi — bu barcha kreditlar bo‘yicha kutilayotgan yo‘qotishlarning yig‘indisidir:

$$E\left(L_p\right) = \sum_{i=1}^{N} E\left(L_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \overline{EAD_i} \times \overline{LGD_i} \times PD_i$$

Kutilayotgan yo‘qotish nuqtai nazaridan, portfel uchun diversifikatsiya foydasi mavjud emas, ya’ni portfelning kutilayotgan yo‘qotishi alohida kreditlarning kutilayotgan yo‘qotishlaridan kam bo‘lmaydi.
Biroq, portfel yo‘qotishlarining taqsimoti alohida kredit yo‘qotishlarining taqsimotidan butunlay farq qilishi mumkin. Haqiqatan ham, ikkita mustaqil tasodifiy o‘zgaruvchining yig‘indisi ularning konvolyutsiyasi (qo‘shilish taqsimoti) orqali ifodalanadi. Konvolyutsiya jarayoni natijasida, deterministik EAD va LGD holatida alohida kreditning diskret taqsimoti (masalan, 0 yoki 100%) deyarli uzluksiz portfel yo‘qotish taqsimotiga aylanadi.
Masalan, agar N ta bir xil turdagi kreditlardan iborat bir xil (gomogen) portfelni olaylik, u holda:
-barcha kreditlar uchun $EAD = \overline{EAD}$, $LGD = \overline{LGD}$
-Bernulli o‘zgaruvchilar $\delta_i$esa mustaqil hisoblanadi.
Bunday holatda, portfel bo‘yicha yo‘qotishning taqsimoti alohida kreditlarning yo‘qotish taqsimotining konvolyutsiyasi sifatida aniqlanadi. Portfelning ma’lum darajadagi yo‘qotish ehtimoli quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$P\left(L_p = LGD \times j\right) = \binom{n}{j} PD^j (1 - PD)^{N-j}.$$

Bu Binomial taqsimot formulasi bo‘lib, portfelning j ta kredit defoltga uchrash ehtimolini bildiradi.
Markaziy limit teoremasiga ko‘ra, N juda katta bo‘lganda bu taqsimot normal taqsimotga yaqinlashadi, uning o‘rtacha qiymati PD, dispersiyasi esa $PD(1 - PD)$ ga teng bo‘ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Isakov J.Y.** *Bank risklari.* // O‘quv qo‘llanma. Toshkent."Iqtisod-Moliya 2017. 100 b.
2. **Tony Van Gestel and Bart Baesens.** *Credit Risk Management.* // Oxford university press, 2009. P 535.

MSC 15A.80

Caratheodory's theorem in max-plus algebra

Zaitov A. A.[1], Abduraimov Y. N.[2]

[1] Tashkent Architecture and Civil Engineering University, Tashkent, Uzbekistan
adilbek_zaitov@mail.ru

[2] Termez state university, Termez, Uzbekistan
yolchiabduraimov@gmail.com

The max-plus algebra is an algebraic structure consisting of real numbers where the standard operations of addition $(+)$ and multiplication $(\cdot)$ are replaced by the operation $(\oplus)$ of taking a maximum and the operation $(\odot)$ of standard addition, respectively. More precisely, let $\mathcal{S}$ denote the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\oplus$ a binary operation on $\mathbb{R}_{\max}$ with $x \oplus y = \max\{x, y\}$, and $\odot$ the binary operation on $\mathbb{R}_{\max}$ with $x \odot y = x + y$. The resulting algebraic structure $\mathbb{R}_{\max} = (\mathcal{S}, \oplus, \odot)$ is called a *max-plus semi-field* or simply a *max-plus algebra*. Further, by $\mathbb{R}_{\max}$ we mean both $\mathcal{S}$ and $(\mathcal{S}, \oplus, \odot)$. Note, $\mathbb{R}_{\max}$ is also called a commutative idempotent semiring or a dioid. In the max-plus algebra $\varepsilon = -\infty$ is the additive identity: $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$, for each $x \in \mathbb{R}_{\max}$ and the multiplicative identity is $e = 0$: $x \odot e = e \odot x = x$, for all $x \in \mathbb{R}_{\max}$ [1-3].

Let $n \in \mathbb{R}$. The nth max-plus algebraic power of $x \in \mathbb{R}$ is denoted by $x^{\odot n}$ and corresponds to nx in conventional algebra. If $x \in \mathbb{R}$ then $x^{\odot 0} = 0$, and the inverse element of x written $x^{\odot -1}$ is $-x$. There is no inverse element for ε with respect to $\odot$ since ε is absorbing for $\odot$. If $n > 0$ then $\varepsilon^{\odot n} = \varepsilon$. If $n < 0$ then $\varepsilon^{\odot n}$ is not defined.

The *max-plus algebraic division* operator is defined as follows:

If $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$ and $y \neq \varepsilon$, then

$$\frac{x}{y} = x \odot y^{\odot -1} = x \odot (-y).$$

In the case $y = \varepsilon$ the max-plus algebraic division is not defined.

The *tropical convex hull* of a given set of points $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \mid a_i \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1, m}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ is defined as

$$\operatorname{tconv}(A) = \left\{ \bigoplus_{i=1}^{m} \lambda_i \odot a_i \;\middle|\; a_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_{\max},\ \max_{1 \le i \le m} \lambda_i = 0 \right\}.$$

Here, the combinations are formed using the operations $\oplus$ and $\odot$ instead of the classical ones.

Caratheodory theorem (Classical case). Let A be any set of points and directions in $\mathbb{R}^n$, and let $C = \operatorname{conv}(A)$. Then $x \in C$ if and only if x can be expressed as a convex combination of $n + 1$ of the points and directions in A (not necessarily distinct). In fact, C is the union of all the generalized d-dimensional simplices whose vertices belong to A, where $d = \dim A$[4].

Caratheodory theorem (Max-plus case). Let A be any set of points and directions in $\mathbb{R}^n_{\max}$, and let $C = \operatorname{tconv}(A)$. Then $x \in C$ if and only if x can be expressed as a tropical combination of $n+1$ of the points and directions in A (not necessarily distinct). In fact, C is the union of all the generalized d-dimensional max-plus-simplices whose vertices belong to A, where $d = \dim A$.

Let us analyze the differences between the classical Caratheodory theorem and the tropical Caratheodory theorem in $\mathbb{R}^2$ through an example, and demonstrate in practice how many support points are sufficient in each case.

1. In $\mathbb{R}^2$, according to the classical Caratheodory theorem, any point in the convex hull can be expressed as a convex combination of at most three points.

Consider a set

$$A = \{(0,0),\ (2,-1),\ (-1,3)\}.$$

Let $a_1 = (0,\ 0)$, $a_2 = (2,\ -1)$, $a_3 = (-1,\ 3)$. Then

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_i^3 \lambda_i a_i \,\middle|\, a_i \in A,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1,2,3,\ \sum_i^3 \lambda_i = 1 \right\}$$

Take a point $x = (0,1)$ in the convex hull. It has a convex combination

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \quad \text{for some coefficients } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \geq 0 \quad \text{with } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Let us find these coefficients.

$$x = (0,1) = \lambda_1 \cdot (0,0) + \lambda_2 \cdot (2,-1) + \lambda_3 \cdot (-1,3) = (2\lambda_2 - \lambda_3,\ -\lambda_2 + 3\lambda_3)$$

$$\begin{cases} 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 0.4,\ \lambda_2 = 0.2,\ \lambda_3 = 0.4$$

So, $\boxed{x = (0,1) = 0.4\,a_1 + 0.2\,a_2 + 0.4\,a_3}$.

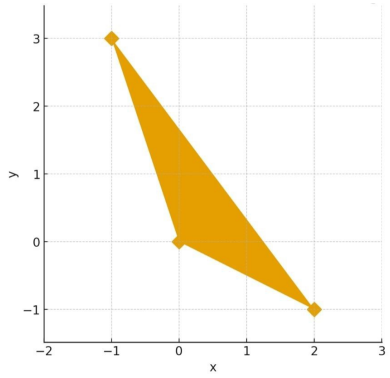
2. In $\mathbb{R}^2$, according to the tropical Caratheodory theorem, any point in the tropical hull can be expressed as a tropical combination of at most three points.

$$A = \{a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 = (0,0),\ a_2 = (2,-1),\ a_3 = (-1,3)\}$$

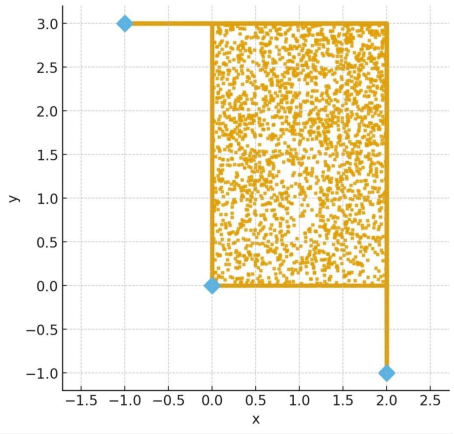
$$\operatorname{tconv}(A) = \left\{ \bigoplus_{i=1}^3 \lambda_i \odot a_i \,\middle|\, a_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_{\max},\ \max_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i = 0 \right\}$$

Take a point $x = (0,1)$ in the tropical hull. Let this point have a tropical combination

$$x = (\lambda_1 \odot a_1) \oplus (\lambda_2 \odot a_2) \oplus (\lambda_3 \odot a_3) \quad \text{with} \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0, \quad \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3 = 0.$$



Classical convex hull (Eucliden) of a_1, a_2, a_3



Tropical convex hull (max,+) of a_1, a_2, a_3

Consider the following system in the max-plus algebra:

$$(0,1) = (\lambda_1 + (0,0)) \oplus (\lambda_2 + (2,-1)) \oplus (\lambda_3 + (-1,3))$$

This gives:

$$(\lambda_1, \lambda_1) \oplus (\lambda_2 + 2, \lambda_2 - 1) \oplus (\lambda_3 - 1, \lambda_3 + 3) = (\max\{\lambda_1, \lambda_2 + 2, \lambda_3 - 1\}, \max\{\lambda_1, \lambda_2 - 1, \lambda_3 + 3\})$$

Therefore, we obtain the following system of equations:

$$\begin{cases} \max\{\lambda_1, \lambda_2 + 2, \lambda_3 - 1\} = 0 \\ \max\{\lambda_1, \lambda_2 - 1, \lambda_3 + 3\} = 1 \\ \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = 0 \end{cases}$$

Case 1: $\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} \max\{0, \lambda_2 + 2, \lambda_3 - 1\} = 0 \\ \max\{0, \lambda_2 - 1, \lambda_3 + 3\} = 1 \end{cases}$$

Subcase 1.1:

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2 \le 0 \\ \lambda_3 - 1 \le 0 \\ \lambda_2 - 1 = 1 \\ \lambda_3 + 3 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 \le -2 \\ \lambda_3 \le 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 \le -2 \end{cases}$$

This gives a contradiction, so the system has no solution in this case.

Subcase 1.2:

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2 \le 0 \\ \lambda_3 - 1 \le 0 \\ \lambda_2 - 1 \le 1 \\ \lambda_3 + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 \le -2 \\ \lambda_3 \le 1 \\ \lambda_2 \le 2 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = -2, \quad \lambda_2 \in [-\infty, -2]$$

Thus, in this case:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \in [-\infty, -2], \quad \lambda_3 = -2$$

Case 2: $\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} \max\{\lambda_1, 2, \lambda_3 - 1\} = 0 \\ \max\{\lambda_1, -1, \lambda_3 + 3\} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{No solution}$$

Case 3: $\lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} \max\{\lambda_1, 2, -1\} = 0 \\ \max\{\lambda_1, -1, 3\} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{No solution}$$

So, the tropical representation of the point $(0, 1)$ has the following view

$$x = (0, 1) = 0 \odot a_1 \oplus \lambda_2 \odot a_2 \oplus (-2) \odot a_3, \quad \lambda_2 \in [-\infty, -2].$$

Comprison:

Classical Caratheodory in $\mathbb{R}^2$: The point x is guaranteed to be representable as a convex combination of three support points, and there exists a *unique* such convex combination.

Tropical Caratheodory in $\mathbb{R}^2$: The point x is representable as a tropical (max-plus) combination of three support points, and *many different* tropical combinations may yield the same result.

REFERENCES

1. Litvinov G. L., Maslov V.P. and Ships G. B. Idempotent functional analysis: an algebraic approach, Mathematical Notes, 2001, 69(5), pp. 696-729.
2. Kocinac L.D.R., Zaitov A. A., Eshimbetov M. R. On the *Čech*-completeness of the space of τ-smooth idempotent measures. Axioms , 2024, 13(8), pp. 569-582.
3. Eshimbetov, M., Eshimbetov, J., Abduraimov, Y. (2025). On Solution of Systems of Max-Plus Linear Equations. Bulletin of the Institute of Mathematics, 8(2),pp. 24-35.
4. R.T. Rockafellar. Convex Analysis. Princeton, New Jersey, 1970, pp. 153-161.

УДК 517.5

Поперечники множеств и их связь с собственными значениями операторов

Носирова Х.Н.
Самаркандский государственный уриверситет имени Шарофа Рашидова, город Самарканд, Узбекистан.
e-mail: nosirovaxabiba48@gmail.com

Аннотация. В работе исследуются n-поперечники по Колмогорову и их связь со спектральными характеристиками операторов в гильбертовом пространстве. Рассматриваются теоремы о поперечниках эллипсоидов и их приложения к оценкам поперечников функциональных классов. Особое внимание уделяется методу Исмагилова, связывающему поперечники компактов с собственными значениями интегральных операторов. Приводятся конкретные примеры оценки поперечников кривых и поверхностей в пространствах L_2.

Ключевые слова: поперечники по Колмогорову, спектральная теория, гильбертово пространство, интегральные операторы, аппроксимация.

Введение

Понятие n-поперечника, введенное А.Н. Колмогоровым в 1936 году, играет фундаментальную роль в теории приближений и функциональном анализе. Поперечник характеризует наилучшее возможное приближение множества в нормированном пространстве с помощью n-мерных подпространств. Данная работа посвящена исследованию связи поперечников со спектральными свойствами операторов, в частности, с собственными значениями эллиптических и интегральных операторов.

Основные понятия и определения

Пусть X - вещественное банахово пространство, $\mathcal{K}$ - центрально симметричное множество в X. Тогда n-поперечник по Колмогорову множества $\mathcal{K}$ в X определяется формулой:

$$d_n(\mathcal{K}, X) = \inf_{\{L_n\}} \sup_{x \in \mathcal{K}} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|,$$

где L_n пробегает все n-мерные подпространства X.

Важнейший результат теории поперечников - теорема о поперечниках эллипсоида в гильбертовом пространстве. Пусть H - гильбертово пространство, $\{e_k\}$ - ортонормированный базис в H, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 0$ - последовательность положительных чисел. Рассмотрим эллипсоид:

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \leq 1 \right\}, \quad x_k = (x, e_k).$$

Тогда $d_n(\mathcal{E}) = \lambda_{n+1}$.

Связь с собственными значениями операторов

Пусть A - положительный оператор с чисто дискретным спектром, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ - его собственные значения. Рассмотрим множество:

$$\mathcal{E}_A = \{x : (Ax, x) \leq 1\}.$$

Это множество представляет собой эллипсоид, и его поперечники выражаются через собственные значения оператора A:

$$d_n(\mathcal{E}_A, H) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}.$$

Аналогично, для множества $K_A = \{x : \|Ax\| \leq 1\}$, где A - обратимый оператор с дискретным спектром, поперечники определяются собственными значениями оператора AA^*.

Метод Исмагилова и его приложения

Р.С. Исмагилов разработал метод оценки поперечников, основанный на усреднении по компакту. Пусть K_1 - компакт, H - гильбертово пространство, $\varphi : K_1 \to H$ - непрерывное отображение, $K = \varphi(K_1)$, $d\sigma$ - положительная нормированная мера на K_1. Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\int_{K_1} (\varphi(x), \varphi(y)) f(y) d\sigma_y = \lambda f(x), \quad x \in K_1.$$

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 0$ - положительные собственные значения этого уравнения, $f_1(x), f_2(x), \ldots$ - соответствующая ортонормированная система собственных функций. Тогда поперечники компакта K удовлетворяют неравенствам:

$$\sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j} \leq d_n(K, H) \leq \max_{x \in K_1} \sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j |f_j(x)|^2}.$$

В качестве применения этого метода рассмотрим задачу о поперечниках множества сдвигов функции. Пусть $f(x) \in L_{[0,1]}$ - периодическая функция с периодом 1, $K[f]$ - множество ее сдвигов $f_t(x) = f(x-t)$. Если $f(x) \sim \sum_k a_k \exp(2\pi ikx)$ - ряд Фурье функции f, и $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots$ - перестановка величин $|a_k|^2$ в убывающем порядке, то:

$$d_n(K[f], L_2) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k}.$$

Примеры оценок поперечников

Пример 1. Рассмотрим кривую Γ_q в $L_{2[0,1]}$, образованную функциями:

$$l_q(t)(x) = \begin{cases} q(x), & x \leq t, \\ 0, & x > t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Для n-поперечников этой кривой справедлива асимптотическая формула:

$$d_n(\Gamma_q, L_{2[0,1]}) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{n}} \|q\|_{L_{2[0,1]}}.$$

Пример 2. Рассмотрим поверхность Φ в $L_2(Q)$, $Q = [0,1] \times [0,1]$, образованную функциями:

$$\varphi_{t,s}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq t \text{ и } y \leq s, \\ 0, & x > t \text{ или } y > s, \end{cases} \quad 0 \leq t, s \leq 1.$$

Для поперечников этой поверхности существуют абсолютные константы c_1, c_2 такие, что:

$$c_1 \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \leq d_n(\Phi, L_2(Q)) \leq c_2 \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Заключение

Проведенное исследование демонстрирует глубокую связь между теорией поперечников и спектральной теорией операторов. Методы, основанные на спектральных характеристиках операторов, позволяют получать точные оценки поперечников для широких классов множеств в функциональных пространствах.

Литература

1. **Колмогоров А.Н.** *О наилучшем приближении множеств функций многих переменных.* УМН. - 1936. - Т. 1, № 1. - С. 25-38.

2. **Исмагилов Р.С.** *О поперечниках множеств в гильбертовом пространстве.* ДАН СССР. - 1968. - Т. 178, № 5. - С. 1041-1044.

3. **Тихомиров В.М.** *Некоторые вопросы теории приближений.* М.: Изд-во МГУ, 1976. - 304 с.

4. **Х.Н.Носирова** *Слабая асимптотика поперечников одной поверхности в пространстве L_2.* ДАН УзССР, N 9, 1990.

Разделимость для дифференциального оператора Грушина в весовом пространстве

Каримов О. Х.[1], **Азамкулов А.**[2]
[1]Институт математики им. А.Джураева НАНТ, Душанбе, Таджикистан;
[2]Денауский институт предпринимательства и педагогики, Денау, Узбекистан;
karimov_olim@mail.ru

Рассмотрим в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^2)$ оператор Грушина

$$L[u] = -\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + V(x,y)u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $V(x,y)$-положительная функция.

Коэрцитивные свойства и разделимость дифференциальных операторов изучалось во многих работах (см. [1-4] и имеющиеся там ссылки). Разделимость дифференциального оператора Грушина рассматривалась в работе H.A.Atia [3]. В нашей работе обобщаются результаты работы [3] в случае весового пространства.

Найдены условия на функцию $V(x,y)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^2)$, и для всех решений $u(x,y) \in L_{2,\rho}(R^2) \cap W^2_{2,loc}(R^2)$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x,y) \in L_{2,\rho}(R^2)$, выполняются следующие включения

$$-\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), \quad V(x,y)u(x,y), \quad x^2 V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad V^{1/2}(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x} \in L_{2,\rho}(R^2).$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\|Vu; L_{2?\rho}(R^2)\| + \left\|x^2 V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}; L_{2?\rho}(R^2)\right\| +$$

$$+ \left\|V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}; L_{2,\rho}(R^2)\right\| + \left\|\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x^4}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}); L_{2,\rho}(R^2)\right\| \le M\|f(x,y); L_{2,\rho}(R^2)\|, \tag{2}$$

где положительное число M не зависит от $u(x,y)$, $f(x,y)$.

Литература

1. **Everitt W.N., Gierz M.** *Some properties of the domains of certain differential operators*// Proc.London Math.Soc., 1971, v.23, pp.301-324.
2. **Бойматов К.Х., Шарипов А.** *Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака* // Доклады Академии наук России, 1992, т.326, №3, с.393-398.
3. **H.A.Atia.** *Separation of Grushin differential operator in weighted Hilbert spaces* // Labachtvskii Journal of Mathematics, Vol. 32, No. 3, 2011, pp. 180-188.
4. **Каримов О.Х., Азамкулов А.** *Коэрцитивные оценки и разделимость для оператора Грушина* // Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2024, Т.67, №3-4, С.159-164.

УДК 511.345

РЕЖИМЫ СТОХАСТИКИ В НЕКОТОРЫХ БИОФИЗИЧЕСКИХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ВЫНУЖДЕННЫМИ И САМООРГАНИЗУЮЩИМИСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Солеев А.С.[1], Розет И.Г.[2], Мухтаров Я.[3]

[1,2,3] Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан

[1] asoleev@yandex.ru, [2]isayrozet45@gmail.com, [3]ya-muxtarov@rambler.ru

В работах [1–3] авторами исследованы стохастическое поведение траекторий в областях теории динамических систем [4–7], синергетики [8 – 10], а также математической биофизики [11].

В данной статье основное внимание уделено исследованиям возникновению бифуркаций и воздействию малых периодических неавтономных возмущений, приводящих от стабильности к стохастическому поведению траекторий и хаосу. за счет возникновения в областях стохастики гомоклинических структур.

Результаты статьи изложены в трех теоремах.

Ниже приведена одна из этих теорем:

Систему уравнений «реакция – диффузия» [8,11] в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = F_i\left(u_i, v_i, \lambda\right) + \mu \cdot D_u \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},\ \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = F_i\left(u_i, v_i\right),\ \text{i=1,2} \tag{1}$$

рассмотрим для

$$F_1\left(u_i, v_i\right) = \alpha_i\left(u_i - \beta_i u_i^3\right) - \eta_i,\ F_2\left(u_i, v_i\right) = v_i,\ \ (i \neq j)$$

где

$$u_i = u_i\left(t, x\right),\ v_i = v_i\left(t, x\right),\ 0 < \mu \ll 1,$$

$\alpha_i, \beta_i, \eta_i$−параметры, а вместо $D_u \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$ будем использовать периодические траектории самой системы (1) в некоторых областях $g_{1,2}\left\{u_i, x_i\right\} \in \left\{u_i, x_i\right\},\ i = 1, 2$, здесь ξ− волновая координата.

Имеет место

Теорема. В системе (1) при малых возмущениях параметров в области $G_{\varepsilon,L} \bigcup \bar{G}_{\varepsilon,L} \in \left\{u > 0, v > 0\right\}$, возникает грубая гомоклиническая структура.

В работах Самаркандской школы по Качественной Теории Дифференциальных Уравнений проводились также исследование дискретно конечно-разностных систем, моделирующих экологические и медико-биологические процессы.

Литература

1. **A. Soleev, I. Rozet, Ya. Mukhtarov.** *Stochastic Regimes in Some Autowave and Oscillator Systems with Periodic Perturbations. International Scientific and Practical Conference on Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology. AIP Conf. Proc. 3147, 020011-1–020011-5; https://doi.org/10.1063/5.0210942*

2. **A. Soleev, I. Rozet, Ya. Mukhtarov.** *Modes of Stochastics, Blow-up Exacerbation and Slow Time in Wave Dynamics, Self-Organizing by Periodic Perturbations. Optical and Computational Technologies for Measurements and Industrial Applications (OptiComp 2025)2025 SPIE • 0277-786X • doi: 10.1117/12.3078002*

3. **A. Soleev, I. Rozet, Ya. Mukhtarov.** *Study of Stochastic Modes in Systems with Small Periodic Disturbances and Self-Organization by Methods of Synthesis and "Grafts". AIP Conf. Proc. 3377, 030002 (2025) https://doi.org/10.1063/5.0299993*
4. **Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Х.** *Методы качественной теории в нелинейной динамике. – М.Ижевск, Ин-т компютерных исследований. 2009.*
5. **Белых В.Н.** *Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем. – Горький, изд. ГГУ, 1980.*
6. **Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Ю.И.** *Введение в теорию нелинейных колебаний. – М: Наука, 1978*
7. **Рабинович М.И., Трубецков Д.И.** *Введение в теорию нелинейных колебаний и волн. – Изд. НИЦ регулярная и хаотическая динамика. – Ижевск, 2000.*
8. **Хакен Г.** *Синергетика. – М: Мир, 1980.*
9. **Пригожин И.** *Порядок и хаос. – М: Мир, 1986.*
10. **Николис Г., Пригожин И.** *Синергетика в неравновестных системах.– М: Мир, 1979.*
11. **Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский А.С.** *Математическая биофизика. – М: Наука, 1984.*

О гармоническом продолжении суммы ряда Хартогса с переменным радиусом сходимости

Туйчиев Т. Т.[1], Якубова Н. Д.[2]
[1,2]Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
tahir290755@gmail.com oxunjonyaqubov1996@gmail.com

Введение. В работе рассматривается вопрос о продолжении сумм рядов Хартогса, допускающих гармоническое продолжение вдоль фиксированного направления, предполагая только лишь гармоничность коэффициентов.

Пусть нам задана функция многих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определенная на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ и пусть L некоторый класс функций.

Определение. Функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется L сепаратной на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, если для любого x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, функция одного переменного $f \in L(X \cap \mathbb{R}_{x_k})$ при фиксированных остальных переменных.

Естественно возникает следующая задача: *будет ли L сепаратная на множестве X функция $f(x)$ принадлежать классу L по совокупности переменных?*

Этой задачей относительно разных классов функций в течении долгого времени интересовались многие математики. Первый результат в этом направлении принадлежит Гартогсу [1] (1906 год, фундаментальная теорема Гартогса) доказавшему, что *сепаратно голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $f(z_1, z_2, ..., z_n)$ является голоморфной по совокупности переменных в D*. При доказательстве фундаментальной теоремы Гартогса существенную роль играет следующая основная лемма Гартогса: *если голоморфная в области $D \times \{|z_n| < r\} \subset \mathbb{C}^n_{/z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ функция $f(/z, z_n) = f(z_1, z_2, , .., z_{n-1}, z_n)$ при каждом фиксированном $/z \in D$ голоморфна в круге $|z_n| < R, R > r > 0$, то она голоморфна по совокупности переменных в области $D \times \{|z_n| < R\}$.*

Простой пример показывает, что действительный аналог теоремы Гартогса неверен. Действительно, функция двух переменных

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ при, } (x, y) \neq (0, 0) \quad f(0, 0) = 0$$

дифференцируема по переменному x при любом фиксированном y и по y при любом фиксированном x, но не является даже непрерывной в точке $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Этот пример еще раз доказывает актуальность поставленной задачи. Первый результат о сепаратно-гармонических функциях был получен Лелоном в 1961 году (см. [2]): *если* $u(x,y)$ *является сепаратно-гармонической функцией в области* $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, *то* $u(x,y)$ *является гармонической в* D *по совокупности переменных*

Рассмотрим следующий формальный ряд Гартогса:

$$u(x,w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x)\,\rho^{|k|}e^{ik\varphi}, w = \rho e^{ik\varphi},\ x \in D, \tag{1}$$

где D область из $\mathbb{R}^n$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть ряд (1) удовлетворяет следующим условиям

1) все коэффициенти $c_k(x) \in h(D)$ – гармонические функции,

2) для каждого фиксированного $x \in D$ выполняется неравенство $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \sqrt[|k|]{|c_k(x)|} \le \frac{1}{R(x)}$, $R(x) > 0$.

Тогда существует нигде не плотное замкнутое множество $S \subset D$ такое, что ряд (1) локально равномерно сходится в области $(D \setminus S) \times \{w : |w| < R_*(x)\}$ и сумма ряда $u(x,w)$ принадлежит классу $h((D \setminus S) \times \{w : |w| < R_*(x)\})$ гармонических функций, где

$$R_*(x) = \varliminf_{y\to x} R(y)$$

- нижняя регуляризация радиус функции $R(x)$.

Заметим, что если функция $u(x,w)$ является сепаратно гармонической в некоторой области $D \times V_r \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$, то по теореме Лелона эта функция будет гармонической в области $D \times V_r$ и следовательно, она разлагается в ряд (1) с гармоническими коэффициентами $c_k(x)$. Случай $R(x) \equiv R$ рассмотрен в работе [3].

Литература

1. **Hartogs F.** *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten* Math. Ann. 1906. Vol. 62. pp. 1-88.

2. **Lelong P.** *Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables reelles.* Ann. Inst. Fourier. 1961, vol. 11, pp. 515-562.

3. **Имомкулов С.А., Туйчиев Т.Т.** *О продолжении суммы ряда Хартогса с гармоническими коэффициентами.* Илм сарчашмалари, 2025, №4, стр. 11-17.

УДК 517.983

Совпадение дробной производной Грюнвальда-Летникова-Адамара с производной Маршо-Адамара

Яхшибоев М.У.[1], **Нарзуллаев У.Х.**[2]

[1,2]Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль - Хоразми, г.Самарканд, Узбекистан;
m.yakhshiboyev@gmail.com,unarzullayev@gmail.com

Введенное Ж. Адамаром [1] дробное интегродифференцирование типа $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, -\infty < \alpha < \infty$, является инвариантным относительно оператор растяжения $(\Pi_\rho f)(x) = f(\rho \cdot x), \rho > 0, x > 0$. В настоящей работе дается дальнейшее исследование свойств такого дробного

интегродифференцирования и для него развивается соответствующий разностный подход. Рассмотрение ведется в рамках пространств $X_{p,w}$, т.е. $L_w^p\left(R_+,\frac{dx}{x}\right),1\leq p<\infty$ и $C_{w,0}\left(\dot{R}_+\right)$ с условием $\varphi(0)=\varphi(\infty)=0$. Здесь $w(x)=\begin{cases} x^{-\gamma}, & 0<x<1,\\ x^{-\nu}, & 1<x<\infty, \end{cases}\quad \gamma\geq 0,\nu\geq 0.$

Определение 1. Конструкцию

$$\left(D_{\pm}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\aleph(\alpha,l)}\int\limits_0^1\frac{\left(\tilde{\Delta}_{t^{\pm 1}}^{l}f\right)(x)}{\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\ (l>\alpha>0),$$

с нормировочным множителем $\aleph(\alpha,l)$ (см. [2], с.102), назовем дробной производной Маршо-Адамара.

Оператор $\left(D_{\pm,1-\rho}^{\alpha}f\right)(x)$, определяемый равенством

$$\left(D_{\pm;1-\rho}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\aleph(\alpha,l)}\int\limits_0^{\rho}\frac{\left(\tilde{\Delta}_{t^{\pm}}^{l}f\right)(x)}{\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\ (l>\alpha>0),0<\rho<1,$$

называется "усеченной"дробной производной Маршо-Адамара.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f\in X_{r,v},1\leq r<\infty,\ \lambda\geq 0,\beta\geq 0$. Дробная производная типа Грюнвальда-Летникова-Адамара

$$\left(D_{+}^{\alpha}f\right)(x)=\lim_{\substack{\rho\to 1-0\\(X_{p,w})}}\frac{\left(\tilde{\Delta}_{\rho}^{\alpha}f\right)(x)}{(1-\rho)^{\alpha}}$$

и дробная производная в смысле Маршо-Адамара

$$\left(D_{+;1-\rho}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\aleph(\alpha,l)}\lim_{\substack{\rho\to 1-0\\(X_{p,w})}}\int\limits_0^{\rho}\frac{\left(\tilde{\Delta}_{t}^{l}f\right)(x)}{\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\ l>\alpha>0,$$

существуют в $X_{p,w}$, где $1\leq p\leq\infty,\ \gamma\geq 0,\nu\geq 0$, одновременно и совпадают, каково бы ни было α .

Литература

1. **Hadamard J.** *Essai sur l'elude des fonctions donne'cs par leur development de Taylor* J.Math. Pures et Appl., Ser. 4. T.8. (1892), 101-186 pp.

2. **Самко С.Г., Килбас А.А., Марчиев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск. Изд-во. "Наука и техника". - 1987. - 688 с.

3 – SHO'BA. GEOMETRIYANING DOLZARB MUAMMOLARI

СЕКЦИЯ 3. АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИИ

UDC 514.7

SOME PROPERTIES OF THE CURVATURE OF RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH POLYNOMIAL STRUCTURE

Aslonov J. O.[1], **Ergashev M. A.**[2]
[1,2]**National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;**
jasurbek.aslonov@nuu.uz, **muxammadali.ergashev@nuu.uz**

Abstract: In 2002, the Argentine mathematician Vera Martha Winitzky de Spinadel introduced the concept of metallic structures, providing a new perspective on differential geometry. Her primary works focused on geometric fractals, which are widely applied in design and architecture. Additionally, her research in the field of "metallic averages which develops the classical concept of the golden section, has gained recognition among mathematicians. Turkish mathematicians C.E. Hretanu and M. Crasmareanu, continuing work in this area, introduced the same concept on Riemannian manifolds, leading to numerous new ideas for applications in various fields of science.

Keywords: Riemannian manifold, polynomial structure, metallic structure in Riemannian manifolds, golden structure.

Riemannian geometry is a fundamental branch of differential geometry, named after the German mathematician Bernhard Riemann (1826-1866). In Riemannian geometry, smooth manifolds are studied together with a Riemannian metric. In this context, tangent vectors and the angles between them are commonly considered; therefore, vector fields play a crucial role. A Riemannian metric can be viewed as a tensor field that defines an inner product at each tangent space. This naturally requires the introduction of several fundamental concepts, including the lengths of vectors and curves. Consequently, the notions of connection, curvature operator, and curvature tensor are introduced.

Let J be a smooth $(1,1)$-tensor field on a smooth manifold M.

Definition [2]. If there exists a nontrivial tensor field J of type $(1,1)$ on a smooth manifold M such that

$$J^2 = pJ + qI,$$

where p and q are positive integers, then this polynomial is called a metallic structure. In this case, the pair (M, J) is said to be a metallic manifold.

Remark [1]. A polynomial structure J is compatible with a connection ∇ on the manifold M, if $\nabla J = 0$.

Assume that X, Y are smooth vector fields, and that the polynomial structure J is compatible.

Theorem. If the polynomial structure J is a golden structure on a Riemannian manifold, then the following relations hold: 1. $R(X,Y)JZ = J(R(X,Y)Z)$; 2. $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)$; 3. $g(JX,Y) = g(X,JY)$.

References

1. A. D. Nezhad, S. Beizavi. *A new approach to the chromatic polynomial structure on Finsler manifolds.* Mathematical Analysis and Convex Optimization, 2 (2021), no. 2, 1-16.

2. C.E. HreEJcanu, M. Crasmareanu. *Metallic structures on Riemannian manifolds.* Revista de la UniГin Matematica Argentina, 54 (2013), no. 2, 15-27.

3. J.M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds.* Department of Mathematics, University of Washington, WA, USA, 2018.

4. M. Gok. *A study of submanifolds of metallic Riemannian manifolds.* Journal of Geometry, 112(3) (2021), no. 34, 1-27.

5. S.I. Goldberg, K. Yano. *Polynomial structures on manifolds.* Kodai Mathematical Journal, 22 (1970), no. 2, 199-218.

УДК 515.12

Ikki o‘lchamli idempotent fazodagi ikkinchi tartibli chiziqlarning tenglamalari

Eshqobilova D. T.[1], **Jamg‘irova G. B.**[2]

[1]Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston;
dilrabotermez@mail.ru

[2]Termiz davlat universiteti 2-kurs magistranti, Termiz, O‘zbekiston
gulzodajamgirova3@gmail.com

Zamonaviy matematikada geometriya va algebra o‘rtasidagi uzviy bog‘liqlik asosida paydo bo‘lgan abstrakt fazolar tushunchasi ilm-fanning ko‘plab sohalarida keng qo‘llanilmoqda. Xususan, algebraik strukturali fazolarni o‘rganish matematik analiz, funksional analiz, differensial geometriya hamda fizikadagi ayrim nazariy modellarni ifodalashda muhim ahamiyatga ega. Shunday fazolardan biri bu ⁻ idempotent fazodir.

Idempotent algebra elementlarining o‘ziga xos xossalari, xususan, har bir element uchun sharti bajarilishi, ushbu algebraik strukturalarni klassik fazolardan tubdan farqlaydi. Idempotent fazolarda oddiy chiziqli kombinatsiyalar o‘rniga maxsus operatsiyalar qo‘llaniladi va bu fazolar ko‘plab optimallashtirish muammolari, tropik geometriya, avtomatika nazariyasi, iqtisodiy modellashtirish kabi sohalarda amaliy qo‘llanilish imkonini beradi.

Klassik Evklid fazosida ikkinchi tartibli chiziqlar ⁻ parabola, ellips, giperbola ⁻ aniq tasniflangan bo‘lsa-da, idempotent fazoda ushbu chiziqlarning analoglari boshqa ko‘rinishda namoyon bo‘ladi. Bunday chiziqlarning o‘rganilishi idempotent algebra qonunlariga muvofiq olib boriladi va ular uchun maxsus "maks-plus"yoki "min-plus"algebraik operatsiyalardan foydalaniladi. Idempotent yarim maydonda ba’zi amallarni quyidagicha belgilashlar orqali amalga oshiramiz.

Idempotent qo‘shish: $a \oplus b = \max(a, b)$ kabi kiritiladi. U idempotent, ya’ni $a \oplus a = a$.

Idempotent ko‘paytirish: $a \otimes b = a + b$ amali orqali aniqlanadi.

Idempotent fazo: $(R_{\max}, \oplus, \otimes)$ to‘plamining elementlari va ular ustida bajariladigan amallar yordamida hosil qilinadigan algebraik tuzilma.

Ikkinchi tartibli chiziq: Klassik geometriyada kvadratik tenglama bilan ifodalangan chiziqlar to‘plami. Idempotent fazoda ular tropik ekvivalentlar sifatida qayta talqin qilinadi.

Mazkur tezisda biz ikki o‘lchamli $\mathbb{R}^2_{\max}$ idempotent fazoda eksponensial metrika

$$\rho(u, v) = |e^{u_1} - e^{v_1}| \oplus |e^{u_2} - e^{v_2}| \oplus |e^{u_3} - e^{v_3}|$$

yordamida ikkinchi tartibli chiziqlarni hamda ularning tenglamalarini o‘rganamiz.

Bu ishda asosiy maqsad – ikki o‘lchamli idempotent fazoda ikkinchi tartibli chiziqlarni aniqlash, ularning tenglamalarini tuzish, shakllarini o‘rganish va bu chiziqlar orasidagi o‘zaro bog‘liqliklarni tahlil qilishdan iborat.

1. Eksponensial aylana

Klassik ta’rif: Aylananing markazi $O(a, b)$ va radiusi r bo‘lsa: $d(X, O) = r$.

Eksponensial holatda: $\rho(X, O) = R$. Ya'ni:

$$\max\left(|e^x - e^a|,\, |e^y - e^b|\right) = R.$$

Bu tenglikni qayta yozamiz:

$$|e^x - e^a| \le R, \quad |e^y - e^b| \le R.$$

Natija: Bu chiziq eksponensial metrika bo'yicha "masofasi R bo'lgan nuqtalar"to'plami. Geometrik jihatdan – "eksponensial kvadratga o'xshash aylana chunki max funksiya orqali chegara chiziq yasaydi.

Agar e^x va e^y o'rnida X, Y desak, tenglama $|X - e^a| = R$ va $|Y - e^b| = R$ shakldagi idempotent kvadrat hosil bo'ladi.

2. Eksponensial ellips

Klassik ta'rif: Ikkita fokus F_1, F_2 uchun: $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$.

Eksponensial holatda:

$$\rho(X, F_1) + \rho(X, F_2) = C.$$

Yozamiz:

$$\max(|e^x - e^{a_1}|, |e^y - e^{a_2}|) + \max(|e^x - e^{b_1}|, |e^y - e^{b_2}|) = C.$$

Bu eksponensial fazoda "masofalar yig'indisi doimiy"nuqtalar to'plami bo'lib, klassik ellipsning idempotent ko'rinishi hisoblanadi.

Geometrik ma'no:

Ellips shakli deformatsiyalangan bo'ladi. Masofa eksponensial shkalada hisoblanadi, shuning uchun fokuslar ta'siri logarifmik emas, tez o'suvchi. Agar a_i, b_i yaqin bo'lsa, shakl klassik ellipsga o'xshaydi.

3. Eksponensial giperbola

Klassik ta'rif:

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a.$$

Eksponensial holatda:

$$|\rho(X, F_1) - \rho(X, F_2)| = C, \quad |\max(|e^x - e^{a_1}|, |e^y - e^{a_2}|) - \max(|e^x - e^{b_1}|, |e^y - e^{b_2}|)| = C.$$

Izoh: Bu nuqtalar to'plamida har bir nuqta fokuslardan eksponensial masofalar farqini doimiy saqlaydi. Natijada chiziqning ikki tarmoqli qismi hosil bo'ladi – "eksponensial giperbola".

4. Eksponensial parabola

Klassik ta'rif: Parabola – fokus nuqtadan va direktrisadan masofasi teng bo'lgan nuqtalar to'plami: $d(X, F) = d(X, L)$.

Eksponensial holatda:

$\rho(X, F) = \rho(X, L)$, Agar direktrisa $y = k$ bo'lsa: $\max(|e^x - e^{a_1}|, |e^y - e^{a_2}|) = |e^y - e^k|$. Bu tenglik "eksponensial parabola"ni ifodalaydi.

Bu chiziqlar klassik ikkinchi tartibli chiziqlarning idempotent analoglari bo'lib, metrika ρ fazoning eksponensial simmetriyasini saqlaydi.

Geometrik jihatdan aylana burchakli shakldagi "eksponensial kvadrat ellips – "eksponensial ikkita fokusli chiziq giperbola – "masofalar farqi doimiy qism parabola – "eksponensial fokus-direktrisa simmetriyasi"sifatida ko'rinadi.

Amaliy jihatdan bunday chiziqlar tropik va aktuar modellashtirish, kompyuter grafika, moliyaviy risk tahlillari va optimal yo'l modellarida qo'llaniladi.

Adabiyotlar

1. Litvinov G.L., Maslov V.P., Sobolevskiy A.N. *Idempotent Analysis and Its Applications.* Moscow, 1998.
2. Cuninghame-Green R. *Minimax Algebra.* Springer, 1979.
3. Baccelli F., Cohen G., Olsder G., Quadrat J.P. *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems.* Wiley, 1992.

УДК 515.12

Uch o‘lchamli idempotent fazolarda to‘g‘ri chiziq va tekislik tenglamalari

Eshqobilova D. T.[1], **Normamatova Z. O‘.**[2]
[1]Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston;
dilrabotermez@mail.ru
[2]Termiz davlat universiteti 2-kurs magistranti, Termiz, O‘zbekiston
normamatovazebiniso5@gmail.com

Hozirgi zamon matematikasida algebra, geometriya va topologiya sohalarida yangi yo‘nalishlar shakllanmoqda. Ulardan biri − idempotent (yoki tropik) matematika, ya’ni klassik arifmetik operatsiyalar o‘rniga $\oplus = \max$ va $\odot = +$ turdagi amallar bilan ishlaydigan maxsus algebraik tuzilmalarni o‘rganuvchi nazariyadir. Bu yo‘nalish nafaqat nazariy jihatdan, balki optimallashtirish, iqtisodiy modellashtirish, graf nazariyasi va ma’lumotlar tahlili kabi sohalarda ham keng qo‘llanilmoqda.

Idempotent geometriya klassik Yevklid geometriyasining ma’lum qonunlarini idempotent amaliyotlar orqali qayta ifoda etadi. Bunda fazo nuqtalari, chiziqlar va teksiliklar klassik qiymatlar o‘rnida tropik yoki idempotent munosabatlar orqali tavsiflanadi. Shu sababli, idempotent geometriya nafaqat an’anaviy geometriyaning yangi shakli sifatida, balki invariantlik, chegaraviy holatlar va minimaks masalalarni tadqiq qilishda muhim nazariy asos sifatida namoyon bo‘ladi.

Idempotent to‘g‘ri chiziq va teksilik tushunchalari idempotent fazoda nuqtalar o‘rtasidagi munosabatni aniqlashga yordam beradi. Masalan, klassik fazoda to‘g‘ri chiziq ikki nuqta orqali aniqlansa, idempotent fazoda bu chiziq max va + operatsiyalari orqali berilgan tropik chiziq bilan tavsiflanadi. Shuningdek, idempotent teksilik uchta nuqta yoki tropik tenglamalar orqali aniqlanadi va uning geometrik shakli sinusoidal ko‘rinishga emas, balki burchakli ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bunday tahlil nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy jihatdan ham muhim ahamiyat kasb etadi. Xususan:

Iqtisodiy tizimlarda − resurslarni minimal sarf bilan taqsimlash masalalarida.

Muhandislik va arxitektura sohasida − tropik chegaralar yordamida noan’anaviy modellarni qurishda;

Kompyuter grafikasi va sun’iy intellektda − optimal masofa va chegaralar aniqlashda idempotent geometriya keng qo‘llaniladi.

1-ta’rif. Agar ikkita binar amal $\oplus$ va $\odot$ bilan ta’minlangan K to‘plam ushbu amallarga nisbatan quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, u holda K yarim maydon deyiladi:

− qo‘shish amali assotsiativ, kommutativ va ixtiyoriy $a \in K$ uchun $\boldsymbol{\varepsilon} \odot a = a \odot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}$ munosabat o‘rinli bo‘ladigan nol element $\boldsymbol{\varepsilon} \in K$ ga ega;

− ko‘paytirish amali ta’rifga ko‘ra $K = K\backslash\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, u qo‘shishga nisbatan distributiv va $\boldsymbol{e}$ birlik elementi ushbu $\boldsymbol{\varepsilon} \odot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \odot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}$ munosabatni qanoatlantiradi.

Agar birinchi amal idempotent ya’ni, $a \in K$ uchun $a \oplus a = a$ bo‘lsa, u holda K idempotent yarim maydon deyiladi.

2-ta'rif. ($\mathbb{R}_{\max}$ ning algebraik tuzilishi). $\mathbb{R}_{\max}$ simvoli ikkita binar amal $\oplus$ va $\otimes$ mos ravishda maksimum va qo'shish kabi amallar bilan birgalikda $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ to'plam belgilanadi.

1-teorema. $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ to'plam ustida

$$R_{\max} = (R \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot), \quad a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \odot b = a + b$$

algebraik tuzilma idempotent yarim maydon hosil qiladi.

3-ta'rif. $\mathbb{R}_{\max}$ – idempotent yarim maydon bo'lsin. U holda n-o'lchamli $\mathbb{R}_{\max}$ fazosi quyidagicha aniqlanadi: $\mathbb{R}^n_{\max} := \underbrace{\mathbb{R}_{\max} \times \mathbb{R}_{\max} \times \cdots \times \mathbb{R}_{\max}}_{n \text{ marta}}$ ya'ni, barcha n-o'lchamli ustun vektorlardan iborat to'plam, bu yerda $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, har bir $x_i \in \mathbb{R}_{\max}$.

$\mathbb{R}^3_{\max}$ fazoda ikki $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ nuqta uchun ular orasidagi eksponensial masofani quyidagicha aniqlaylik:

$$\rho(u, v) = |e^{u_1} - e^{v_1}| \oplus |e^{u_2} - e^{v_2}| \oplus |e^{u_3} - e^{v_3}|.$$

Bizga ikki nuqta $u = (u_1, u_2, u_3)$ va $v = (v_1, v_2, v_3)$ berilgan bo'lsin:

4-ta'rif. Fazoda shu ikki nuqta orqali o'tuvchi idempotent to'g'ri chiziq – shunday nuqtalar to'plamiki, ularning eksponensial masofasi u va v ga teng bo'ladi:

$$L_{uv} = \{\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_{\max,e} \mid \rho(X, u) - \rho(X, v) = 0 \,\}.$$

Ya'ni, $\max_i |e^{x_i} - e^{u_i}| = \max_i |e^{x_i} - e^{v_i}|$ $(i = 1, 2, 3)$. Barcha nuqtalar u va v ga nisbatan eksponensial masofada teng joylashgan.

$\mathbb{R}^3_{\max}$ idempotent fazoda ikki chiziq parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} L_1(t) : (x_1, y_1, z_1) = (a_1 + \alpha_1 t,\ a_2 + \alpha_2 t,\ a_3 + \alpha_3 t), \\ L_2(s) : (x_2, y_2, z_2) = (b_1 + \beta_1 s,\ b_2 + \beta_2 s,\ b_3 + \beta_3 s). \end{cases}$$

2-teorema. To'g'ri chiziqlar o'zaro uch xil holatda bo'ladi:

1. Agar shunday nuqtalar (t_0, s_0) topilsaki,

$$L_1(t_0) = L_2(s_0), a_i + \alpha_i t_0 = b_i + \beta_i s_0, \quad i = 1, 2, 3$$

munosabat bajarilsa, u holda chiziqlar kesishadi;

2. Agar chiziqlarning yo'nalish vektorlari proporsional

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = k(\beta_1, \beta_2, \beta_3);$$

bo'lsa, u holda chiziqlar parallel bo'ladi;

3. Agar chiziqlar kesishmasa va yo'nalish vektorlari proporsional bo'lmasa, kesishmaydigan (aylanma) chiziqlar bo'ladi.

Endi uchta nuqta olaylik: $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$.

5-ta'rif. Shu uch nuqta orqali o'tadigan idempotent teksilik $^-$ shunday nuqtalar to'plamiki, ularning eksponensial masofasi bu uch nuqtada teng:

$$\Pi = \{\, x \in \mathbb{R}^3_{\max,e} \mid \rho(x, a) = \rho(x, b) = \rho(x, c) \,\}.$$

Ya'ni teksilikdagi har bir nuqta uchta asosiy nuqtaga nisbatan eksponensial masofada bir xil darajada joylashgan. Analitik shaklda ρ formulasiga ko'ra:

$$\max_i |e^{x_i} - e^{a_i}| = \max_i |e^{x_i} - e^{b_i}| = \max_i |e^{x_i} - e^{c_i}|.$$

3-teorema. Eksponensial idempotent masofa bilan berilgan fazoda:

ikki nuqta orqali o'tadigan nuqtalar to'plami to'g'ri chiziqni tashkil qiladi;

uch nuqta orqali o'tadigan nuqtalar to'plami tekislikni tashkil qiladi.

Adabiyotlar

1. Litvinov G.L., Maslov V.P., Sobolevskiy A.N. *Idempotent Analysis and Its Applications.* Moscow, 1998.
2. Cuninghame-Green R. *Minimax Algebra.* Springer, 1979.
3. Baccelli F., Cohen G., Olsder G., Quadrat J.P. *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems.* Wiley, 1992.

Application of the solution of the Monge-Ampere equation in isotropic space

Ismoilov Sh. Sh.[1], Kholmurodova G. N.[2]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
sh.ismoilov@nuu.uz
[2]Tashkent State Transport University, Tashkent,Uzbekistan;
xolmurodovagulnoza3@gmail.com

Let there be given an affine space A_3 with the coordinate system $Oxyz$. We consider $\overrightarrow{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ and $\overrightarrow{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ vectors in A_3.
Definition 1. If the scalar product of the two vectors $\vec{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ and $\vec{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ is defined by the following formula:

$$\begin{cases} (X,Y)_1 = x_1x_2 + y_1y_2 & (X,Y)_1 \neq 0 \\ (X,Y)_2 = z_1z_2 & (X,Y)_1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

then, the affine space A_3 is the isotropic space and denoted by R_3^2 [1]. Two types of spheres are defined in isotropic space. The first is the metric sphere, which is given by the following formula:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

where $(0, 0, z)$ is the center, r is radius.
The second sphere in isotropic space is defined as follows:

$$x^2 + y^2 = 2z$$

It is called the isotropic sphere. Let the regular surface F is given by $z = z(u, v)$.The surface F^* is called the dual surface to the given surface F in the isotropic space. And the parametric equations for the dual surface F^* are:

$$\begin{cases} x^*(u,v) = z_u{}'(u,v) \\ y^*(u,v) = z_v{}'(u,v) \\ z^*(u,v) = u \cdot z_u{}'(u,v) + v \cdot z_v{}'(u,v) - z(u,v) \end{cases} \tag{2}$$

The above equation is the dual mapping in isotropic space [2].
The Monge-Ampere equation has been widely applied across various scientific fields. Many well-known equations include the Monge-Ampere equation as a structural component[3].Let us consider one such equation. By doing so, we also address the applicability of the results obtained. Let there be given the nonlinear partial differential equation:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}[(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}] = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{3}$$

This equation is relevant in two-dimensional plasticity theory, where $z = f(x, y)$ acts as the generating function. This equation represents a particular case of the nonlinear elastic plate model, describing the bending deformations of a thin elastic plate. It models the variation of elastic energy based on the total curvature of the surface. Due to its nonlinear nature, the equation is suitable for analyzing large deformations. In the absence of external forces, it describes situations where only internal elastic forces are at play. We now define new function: $\omega(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$. By using the dual mapping of the isotropic space for the $\omega(x, y)$ we can write the following:

$$\begin{cases} x^* = \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ y^* = \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ z^* = x\frac{\partial \omega}{\partial x} + y\frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega \end{cases} \tag{4}$$

Theorem 1. If there be given the equation (3), by using dual mapping of the isotropic space, the solution of this is:

$$z(x, y) = \int \omega(x, y)dx + \phi(y)$$

where, $\phi(y)$ is an arbitrary function of y arising from the integration.

Literature

1. **Artykbaev A., Ismoilov Sh.Sh.** *The dual surfaces of an isotropic space* R_3^2. T.: Bull.Inst.Math. - 2021. - 1-8 pp.
2. **Artykbaev A., Ismoilov Sh.Sh.** *Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic spaces.* T.: Int.Elect.J.Geom. - 2022. - 1-10 pp.
3. **Polyanin A.D.** *Handbook of nonlinear partial differential equations.* T.: London. - 2004. - 356 p.

MSC 15A.80

The space of order-preserving functionals and weak Π-completeness

Jumaev D. I.[1], Ishmetov A. Ya.[2], Kurbanov Kh. X.[3]
[1] Tashkent Architecture and Civil Engineering University, Tashkent, Uzbekistan
d-a-v-ron@mail.ru
[2] Tashkent Architecture and Civil Engineering University, Tashkent, Uzbekistan
ishmetov-azadbek@mail.ru
[3] Tashkent Architecture and Civil Engineering University, Tashkent, Uzbekistan
qhamid-83@mail.ru

In the present paper under space we mean a topological T_1-space, under compact a Hausdorff compact space.

Definition 1[1]. A space X is said to be *weak* Π-*complete* if for every point $x \in \beta X \setminus X$ there exists an open-closed cover ω of X which pricks out the point x in βX.

A closed subset of a weak Π-complete space is weak Π-complete.

The author of [4] observed the functor $O\colon\ \mathfrak{C}omp \to \mathfrak{C}omp$ and showed that it is not normal. Then using the construction suggested by A.Ch. Chigogidze [2], in [3] it was obtained an extension $O_\beta\colon\ \mathfrak{T}ych \to \mathfrak{T}ych$. Here, the sign $\mathfrak{C}omp$ means the category of compact Hausdorff spaces and their continuous maps, and $\mathfrak{T}ych$ the category of Tychonoff spaces and their continuous maps.

For a compact Hausdorff space X a functional $\mu\colon\ C(X) \to \mathbb{R}$ is said [4] to be:

1) *normalized* if $\mu(c_X) = c$ for every constant function $c_X\colon\ X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Here $c_X(x) = c$;

2) *weakly additive* if $\mu(\varphi + c) = \mu(\varphi) + c$ for every $c \in \mathbb{R}$ and each $\varphi \in C(X)$;

3) *order-preserving* if $\mu(\varphi) \leq \mu(\psi)$ for any pair of functions φ, $\psi \in C(X)$ with $\varphi \leq \psi\}$.

A weakly additive, order-preserving, normalized functional for brevity is called as an order-preserving functional. A set of all order-preserving functionals on $C(X)$ is denoted by $O(X)$. It is endowed with the topology τ_p of pointwise convergence. For $\mu \in O(X)$ sets

$$\langle \mu;\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n;\, \theta\rangle = \{\nu \in O(X)\colon\ |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \theta,\, i = 1,\, \ldots,\, n\}$$

forms a base of $O(X)$ at μ. Here $\varphi,\, \ldots,\, \varphi_n \in C(X)$, $\theta > 0$.

Let A be a closed subset of a compact Hausdorff space X. An order-preserving functional $\mu \in O(X)$ is *supported* on A if $\mu \in O(A) \subset O(X)$. The support of $\mu \in O(X)$ is denoted by $\operatorname{supp}\mu$. For a positive integer n let $O_n(X)$ denote a set of all order-preserving functionals which support consists no more than n points. Put $O_\omega(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n(X)$. An order-preserving functional $\mu \in O_\omega(X)$ is said to be an order-preserving functional with finite support. For a point $x \in X$ the Dirac measure $\delta_x\colon\ C(X) \to \mathbb{R}$ is defined by equality $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ for all $\varphi \in C(X)$. Clearly, $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\}$.

Following [6] an order-preserving functional $\mu \in O_\omega(X)$ with finite support $\operatorname{supp}\mu = \{x_1,\, \ldots,\, x_n\}$ can be represented as a relation $\mu = \mu(\delta_{x_1},\, \ldots,\, \delta_{x_n})$ between the Dirac measures δ_{x_i}, $i = 1,\, \ldots,\, n$. This relation has a view $\mu(\varphi) = \mu(\varphi(x_1),\, \ldots,\, \varphi(x_n))$, $\varphi \in C(X)$.

We consider the following types of "restrictions":

$$\mu_{x_i}(\varphi) = \mu(0,\, \ldots,\, 0,\, \varphi(x_i),\, 0,\, \ldots,\, 0),$$
$$\mu^{x_i}(\varphi) = \mu(\varphi(x_1),\, \ldots,\, \varphi(x_{i-1}),\, 0,\, \varphi(x_{i+1}),\, \ldots,\, \varphi(x_n)),$$

for each $\varphi \in C(X)$.

For a compact Hausdorff space X put

$$O_f(X) = \Big\{\mu \in O_\omega(X)\colon\ \text{there exists a point } x \in \operatorname{supp}\mu = \{x_1,\, \ldots,\, x_n\}$$
$$\text{such that } \mu_x(\varphi) \geq \tfrac{n}{n+1}\varphi(x) \text{ and } \mu^x(\varphi) \leq \tfrac{1}{n+1}\varphi(x) \text{ or } \mu^x(\varphi) \geq \tfrac{n+2}{n+1}\varphi(x)$$
$$\text{for an arbitrary non-negative function } \varphi \in C(X)\Big\}. \tag{1}$$

Clearly, in the case $\varphi = 1_X$ the inequalities in (1) acquire shapes $\mu_x(1_X) \geq \frac{n}{n+1}$, and $\mu^x(1_X) \leq \frac{1}{n+1}$ or $\mu^x(1_X) \geq \frac{n+2}{n+1}$, respectively.

For a compact Hausdorff space X, a point $x \in X$ we put

$$O_f^x(X) = \Big\{\mu = \mu(\delta_{x_1},\, \ldots,\, \delta_{x_n}) \in O_f(X)\colon\ x \in \operatorname{supp}\mu,$$
$$\mu_x(\varphi) \geq \tfrac{n}{n+1}\varphi(x) \text{ and } \mu^x(\varphi) \leq \tfrac{1}{n+1}\varphi(x) \text{ or } \mu^x(\varphi) \geq \tfrac{n+2}{n+1}\varphi(x)$$
$$\text{for an arbitrary non-negative function } \varphi \in C(X)\Big\}.$$

It is easy to see that

$$O_f^x(X) \cap O_f^y(X) = \varnothing \text{ for every couple of } x,\, y \in X \text{ with } x \neq y$$

and

$$O_f(X) = \bigcup_{x \in X} O_f^x(X).$$

Let M be a subset in X. We put

$$\langle M\rangle = \Big\{\mu \in O_f(X)\colon \text{ there exists } x \in M \text{ such that } \mu \in O_f^x(X)\Big\}.$$

Proposition 1. For an open set $U \subset X$ the set $\langle U\rangle$ is open in $O_f(X)$.

Corollary. For a closed set $F \subset X$ the set $\langle F\rangle$ is closed in $O_f(X)$.

It is easy to see

$$\big[\langle M\rangle\big]_{O_f(X)} = \big\langle [M]_X\big\rangle \tag{2}$$

for an arbitrary $M \subset X$.

For a Tychonoff space X by definition [3] the set $O_\beta(X)$ has a view

$$O_\beta(X) = \{\mu \in O(\beta\, X)\colon \text{ supp } \mu \subset X\}.$$

Here $\beta\, X$ is the Stone-Čech compactification of a Tychonoff space X. Since for an idempotent probability measure $\mu \in O_\beta(X)$ the support supp μ is compact μ is called an idempotent measure with compact support. $O_\beta(X)$ is considered as a subspace of $O(\beta\, X)$.

For a Tychonoff space X the set $O_f(X)$ is defined by the same rule in equality (**??**).

Lemma 1. For an arbitrary open cover $\gamma_X = \{U_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ of a Tychonoff space X the system

$$\gamma_0 = \{\langle U\rangle\colon U \in \gamma\}$$

is an open cover of $O_f(X)$.

Proposition 2. Let X be a Tychonoff space, $\gamma_X = \{U_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ its an open cover. If $Kp\,\gamma_X = 1$ then $Kp\,\gamma_0 = 1$ for the cover

$$\gamma_0 = \{\langle U\rangle\colon U \in \gamma\}$$

of $O_f(X)$.

Lemma 2[5]. Let $\gamma\, X$ be a compact extension of a space X and, V, W be disjoint open sets in $\gamma\, X$. Let $V \cap X = V_\gamma$, and $W \cap X = W_\gamma$. Then the following equality is true:

$$[X \setminus V_\gamma]_{\gamma\, X} \cap [X \setminus W_\gamma]_{\gamma\, X} = [X \setminus (V_\gamma \cup W_\gamma)]_{\gamma\, X}$$

Since $O_\beta(X)$ is everywhere dense in $O(\beta\, X)$ and $O(\beta\, X)$ is a compact Hausdorff space, then $O(\beta\, X)$ is one of compact extensions of $O_\beta(X)$. In the following result we obtain that $O_f(\beta\, X)$ is a perfect compact extension of $O_f(X)$.

Theorem 1. For a Tychonoff space X the space $O_f(\beta\, X)$ of all order-preserving functionals on $C(\beta\, X) \cong C_b(X)$ is a perfect compactification of the space $O_f(X)$.

Now we can state the main result of the paper.

Theorem 2. Let X be a Tychonoff space. Then $O_f(X)$ is weak Π-complete if and only if X is weak Π-complete.

REFERENCES

1. Buhagiar D., Miwa T. On superparacompact and Lindelöf GO spaces. Houston Journal of Mathematics, 1998, 24(3),pp. 443-457.

2. Chigogidze A. Ch. Extension of normal functors. Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Mekh. 1984, 6, pp. 23-26.

3. Beshimov R. B. Some properties of the functor O_β, Journal of Mathematical Sciences (New

York), 2006, 133(5), pp. 1599-1601.
4. Radul T. On the functor of order-preserving functionals. Comment.Math.Univ.Carolin., 1998, 39(3), pp. 609-615.
5. Zaitov A. A., Jumaev D. I. Hyperspace of the Π-complete spaces and maps. Eurasian Mathematical Journal, 2021, 12(2),pp. 104-110.
6. Zaitov A. A. The functor of order-preserving functionals of finite degree. Journal of Mathematics Sciences, 2006, 133(5),pp. 1602-1603.

УДК 514.57

ON THE GEOMETRY OF $\mathbb{SO}(3)$

Narmanov A. Y.[1], **Ergashova Sh. R**[2].

[1]National Uniersity of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; narmanov@yandex.com
[2]National Uniersity of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
shohida.ergashova@mail.ru

The geometry of the rotation group $\mathbb{SO}(3)$ is of interest in many areas of mathematics and mechanics, and many papers are devoted to the study of this group. In this paper, the geometry of a known submersion on the rotation group with a base on a two-dimensional sphere is studied. It is proved that this submersion is Riemannian and generates a totally geodesic Riemannian foliation.

The special orthogonal group $\mathbb{SO}(3)$ consists of all 3×3 orthogonal matrices with determinant 1. It is a Lie group, and its associated manifold can be understood in several ways. The group $\mathbb{SO}(3)$ can be defined as:

$$\mathbb{SO}(3) = \{A \in \mathbb{GL}(3,\mathbb{R}); A^T A = E, \det(\mathrm{A}) = 1\}.$$

Here, A^T denotes the transpose of A, and E is the identity matrix. The set $\mathbb{SO}(3)$ is the intersection of the orthogonal condition (which defines a submanifold) and the determinant condition (which defines another submanifold). The intersection of two smooth submanifolds in $\mathbb{R}^{3^2}$ is itself a smooth manifold, provided the gradients of the defining functions are linearly independent at the points at the intersections.

At a point $A \in \mathbb{SO}(3)$:

-The orthogonality condition can be represented as $f(A) = A^T A - E = 0$.

-The determinant condition can be represented as $g(A) = \det(\mathrm{A}) - 1 = 0$.

The gradients of these functions with respect to the entries of A can be shown to be linearly independent at the points in $\mathbb{SO}(3)$.

Since $\mathbb{SO}(3)$ is defined as the zero set of smooth functions (f(A) and g(A)), and the gradients of these functions are linearly independent, we conclude that $\mathbb{SO}(3)$ is a compact 3-dimensional smooth manifold. Specifically, it is a submanifold of $\mathbb{R}^{3^2}$.

First, notice that a rotation about the origin in $\mathbb{R}^3$ can be specified by giving a vector for the axis of rotation and an angle of rotation about the axis. We make the convention that the rotation will be counterclockwise for positive angles and clockwise for negative angles when viewed from the tip of the vector of axis rotation. The specification of a rotation by an axis vector and an angle is far from unique.

The rotation determined by the vector v and the angle φ is the same as the rotation determined by the pair $(\lambda v; \varphi + 2n\pi)$, where λ is any positive scalar and n is any integer. The pair $(-v; \varphi)$ also determines the same rotation. We note that four real numbers are sufficient to specify a rotation: three coordinates for a vector and one real number to give the angle.

As a set (and as a vector space), the set of quaternions is identical to $\mathbb{R}^4$. The vector $(a; x; y; z)$ is written $a + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ when thought of as a quaternion. The number a is called the real part, and the vector part x, y, z.

Quaternions can be multiplied. The multiplication rules are defined by the following relations

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}.$$

Reversing the left-right order changes the sign of the product

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

The conjugate of a quaternion $r = a + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, denoted $\overline{r}$, is defined to be $\overline{r} = a - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$. The length or norm of a quaternion r, denoted $\|r\|$ is its length as a vector in $\mathbb{R}^4$. The formula for the norm of $\|r\| = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + z^2}$.

Each nonzero quaternion r has a multiplicative inverse, denoted r^{-1}, given by $r^{-1} = \frac{\overline{r}}{\|r\|}$. When r is a unit quaternion, $r^{-1} = \overline{r}$.

The set of all unit quaternions generates the group. It is well known following theorem [1].

Theorem 1. All the rotations about lines through the origin form a group, homomorphic to the group of all unit quaternions.

Let M be a smooth Riemannian manifold of dimension n with the Riemannian metric g.

Definition 1. Differentiable mapping $\pi : M \to B$ of a maximal rank, where B is the smooth manifold of dimension m, $n > m$, called submersion.

Let F be a foliation of dimension k, where $0 < k < n$. We denote by L_p leaf of foliation F, passing through a point $q \in M$, where $\pi(q) = p$, by T_qF tangent space of leaf L_p at the point $q \in L_p$, by $H(q)$ orthogonal complement of subspace T_qF. As result arise subbundle's $TF = \{T_qF\}, TH = \{H(q)\}$ of the tangent bundle TM and we have an orthogonal decomposition $TM = TF \oplus TH$. Thus every vector field X is decomposable as: $X = X^v + X^h$, where $X^v \in TF$, $X^h \in TH$. If $X^h = 0$ (respectively $X^v = 0$), then the field X is called as vertical (respectively horizontal) vector field.

Definition 2. The submersion $\pi : M \to B$ is said to be Riemannian if differential $d\pi$ preserves the lengths of the horizontal vectors.

Riemannian submersions are known to generate Riemannian foliation [2-3].

We note that foliation F is called Riemannian if every geodesic, orthogonal at some point to the leaves, remains orthogonal to the leaves at all points.

The curve is called horizontal if it's tangential vector is horizontal.

Theorem 2. Let $\pi : \mathbb{SO}(3) \to \mathbb{S}^2$ be a map such that $\pi(A) = AN$ for $A \in \mathbb{SO}(3)$, where $\mathbb{S}^2$ is a unit sphere with center at the origin and $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$.

Then

a) there exits a rimannian metric $\widetilde{g}$ on $\mathbb{S}^2$ such that $\pi : \mathbb{SO}(3) \to (\mathbb{S}^2, \widetilde{g})$ is a riemannian submersion;

b) Foliation generated by π is a totally geodezic foliation;

c) Foliation generated by π is a riemannian foliation.

REFERENCES

1. **Coxeter H.** *Quaternions and Reflections*, American Math. Mon. 53(3) (1946) 136–146.
2. **Pastore I. and Anna Maria.** *Riemannian Submersions*, World Scientific Publishing 2004.
3. **Reinhart B.** *Foliated Manifolds with Bundle-like Metrics*, Ann. of Math. (2) 69 (1959) 119–132.

Gruppaning ko‘pxillikka ta’siri

Norqo‘ziyev N. N.[1]
O‘zbekiston Milliy Universiteti, Matematika fakulteti, Toshkent, O‘zbekiston;
nnnavruznn@gmail.com

Kirish:Ushbu tezisda Gruppaning ko‘pxillakka ta’siri o‘rganilgan bo‘lib silliqligi, erkinligi, xosliklari o‘rganilgan.Faktor fazo orbitalari o‘rganilgan va teoremaga ko‘ra silindr va Myobius yaprog‘i tekislikka lokal diffeomorf.

Tarif. Silliq M ko‘pxillikka G gruppaning ta‘siri deb

$$a : G \times M \to M, \quad a(g, x) = g \cdot x$$

akslanishtirishga aytiladi.

Bunday ta‘sir xossalari quyidagilar:

1. Agar $\forall\ x \in M$ va $e \in G$, G gruppasining birlik elementi uchun $e \cdot x = x$ bajarilsa ta‘sir erkin deyiladi.

2. Har bir $g \in G$ uchun
$$a_g : M \to M, \quad x \mapsto g \cdot x$$
silliq bo‘lsa, ta‘sir silliq deyiladi.

3. M ko‘pxilligida G gruppaning ta‘siri xos deyiladi, agar har qanday $x, y \in M$ nuqtalar uchun shunday U_x, U_y ochiq atroflari mavjud bo‘ladiki,unda:
$$U_x \bigcap gU_y \neq \emptyset$$

4. Faktor-fazo M/G to‘plami orbitlardan iborat oila kabi aniqlanadi:
$$M/G = \{[x] \mid x \in M\}, \quad [x] = G \cdot x.$$
Unda kanonik proyeksiya aniqlangan bo‘ladi:
$$\pi : M \to M/G, \quad \pi(x) = [x].$$

5. M/G faktor-topologiyada $U \subset M/G$ ochiq bo‘lishi uchun
$$\pi^{-1}(U) \subset M$$
teskari ham ochiq bo‘lishi zarur va yetarli.

Teorema: Silliq m o‘lchamli M ko‘pxillikka G gruppaning ta’sirida silliq, erkin va xos bo‘lsa, $M \setminus G$ da yagona differentsiallanuvchi struktura mavjud bo‘lib, unga nisbatan $\pi : M \to M \setminus G$ kanonik proyeksiya lokal diffeomarfizm bo‘ladi.

Misol: Quyidagi diffeomorfizmlarni ko‘rib chiqaylik. $a, b : R^2 \to R^2$ akslanishlar quyidacha berilgan:
$a(x, y) = (x, y + 1)$ $\quad$ $b(x, y) = (x + 0.5, -y)$

G_a, G_b- mos ravishda $\{a\}$ va $\{b\}$ diffeomorfizmlar hosil qilgan gruppalar bo‘lsa, ular R^2 da gruppa ta‘sirini aniqlaydi.
Bu ta’sirlar natijasida silindr va Myobius yaprog‘i hosil bo‘ladi. Yuqoridagi teoremaga ko‘ra ular tekislikka lokal diffeomorf.

Adabiyotlar

1. Ion Macrut , Manifold 2017

УДК 512.17

A note path in the n-fold symmetric product of the space X

Nosirova M. S.[1], Mukhamadiev F. G.[1,2]
[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
mirsaidovamaftuna94@gmail.com
[2]Kimyo International University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
farhodgm@nuu.uz

All of our space are Hausdorff unless otherwise indicated. The symbol N stands for the set of positive integers and R stands for the set of real numbers. Given a space X, we define its hyperspaces as the following sets:

1) $CL(X) = \{A \subset X \mid A \text{ is closed and nonempty }\}$;
2) $2^X = \{A \in CL(X) \mid A \text{ is compact }\}$;
3) $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ has at most } n \text{ points }\}$, $n \in N$ (see [1, 2]).

$CL(X)$ is topologized by the Vietoris topology defined as the topology generated by

$$\beta = \{\langle U_1, ..., U_k\rangle \mid U_1, ..., U_k \text{ are open subsets of } X,\ k \in N\},$$

where $\langle U_1, ..., U_k\rangle = \{A \in CL(X) \mid A \subset \bigcup U_j \text{ and } A \cap U_j \neq \emptyset \text{ for each } j \in \{1, ..., k\}\}$.

Note that, by definition, 2^X, $\mathcal{F}_n(X)$ and $\mathcal{F}(X)$ are subsets of $CL(X)$. Hence, they are topologized with the appropriate restriction of the Vietoris topology. Moreover,

1) $CL(X)$ is called the *hyperspace of nonempty closed subsets of* X;
2) 2^X is called the *hyperspace of nonempty compact subsets of* X;
3) $\mathcal{F}_n(X)$ is called the $n-$*fold symmetric product of* X;
4) $\mathcal{F}(X)$ is called the *hyperspace of finite subsets of* X.

On the other hand, it is obvious that $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$ and $\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{F}_{n+1}(X)$ for each $n \in N$ (see [1, 2]).

A continuous mapping $f : [0, 1] \to X$ is called a *path* in X. The point $f(0)$ is called the initial point and $f(1)$ is called the final or terminal point of this path. If $x \in X$, then one defines $e_x : I \to X$ as the constant path, i.e. $e_x(t) = x$ for any $t \in I$. A topological space X is said to be *path-connected* if given any two points x_0, x_1 in X there is a path in X from x_0 to x_1.

Theorem. If the mapping $f : I \to X$ is path in X from the point x_0 to the point x_1, then a mapping $\mathcal{F}_n f : I \to \mathcal{F}_n X$ defined by $\mathcal{F}_n f(t) = \bigcap\{A \in \mathcal{F}_n X : f(t) \in A, \ \ \forall t \in [0, 1]\}$ is a path from the point $A_0 = \bigcap\{A \in \mathcal{F}_n : f(0) \in A\}$ to the point $A_1 = \bigcap\{A \in \mathcal{F}_n : f(1) \in A\}$ in $\mathcal{F}_n X$.

Corollary. If a topological space X is path-connected, then the space $\mathcal{F}_n X$ is also path-connected.

References

1. **Good C., Macias S.** *Symmetric products of generalized metric spaces.* Top. App. 2006, V.106, P.93–114.

2. **Tuyen L., Tuyen O.** *Symmetric products of certain generalized metric spaces.* Hac. J. Math., 2014, V.33(2), P.356–366.

УДК 515.12

Hamiltonian geometry of vector fields

Parmonov H.F
"Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;"
"hparmonov93@mail.ru"

Let M be a smooth Riemannian manifold of dimension n with the Riemannian metric g, ∇ - the Levi-Civita connection, $< \cdot, \cdot >$ - inner product defined by the Riemannian metric g.

We denote by $V(M)$ the set of all smooth vector fields defined on M, through $[X, Y]$ Lie bracket of vector fields $X, Y \in V(M)$. The set $V(M)$ is a Lie algebra with Lie bracket.

Let's consider some set $D \subset V(M)$, which contains finite or infinite number of smooth vector fields. For a point $x \in M$ through $t \to X^t(x)$ we will denote the integral curve of a vector field X passing through a point x at $t = 0$. Map $t \to X^t(x)$ is defined in some domain $I(x) \subset R$, which generally depends on field X and point x.

Definition 1. The orbit $L(x)$ of a system D of vector fields through a point x is the set of points y in M such that there exist $t_1, t_2, ..., t_k \epsilon R$ and vector fields $X_1, X_2, ..., X_k \epsilon D$ such that

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_k-1}(...(X_1^{t_1}(x)))),$$

where k is an arbitrary positive integer.

Let us recall a notion of Hamiltonian vector field. In order to define notion of Hamiltonian vector field we need to define Poisson bracket of functions.

Definition 2. A *Poisson bracket* on a smooth manifold M is an operation that assigns a smooth real-valued function $\{F, H\}$ on M to each pair F, H of smooth, real-valued functions, with the basic properties:

(a)*Bilineality:*

$$\{\lambda F + \mu P, H\} = \lambda\{F, H\} + \mu\{P, H\},$$

$$\{F, \lambda H + \mu P\} = \lambda\{F, H\} + \mu\{F, P\},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

(b)*Skew-Symmetry:*

$$\{F, H\} = -\{H, F\};$$

(c)*Jacobi Identity:*

$$\{\{F, H\}, P\} + \{\{P, F\}, H\} + \{\{H, P\}, F\} = 0;$$

(c)*Leibniz' Rule:*

$$\{F, H \cdot P\} = \{F, H\} \cdot P + H \cdot \{F, P\}.$$

Let M be the Euclidean space R^m, with coordinates

$$(p, q, z) = (p^1, ..., p^n, q^1, ..., q^n, z^1, ..., z^l),$$

where $m = 2n + l$.

Definition 3. Let M be a Poisson manifold and $H : M \to R$ a smooth function. The *Hamiltonian vector field* associated with H is the unique smooth vector field $sgradH$ on M satisfying

$$sgradH(F) = \{F, H\} = -\{H, F\}$$

for every smooth function $F : M \to R$.

The equations governing the flow of $sgradH$ are referred to as *Hamilton's equations* for the *Hamiltonian function* H.

In the case of the canonical Poisson bracket on R^m $(m = 2n+l)$, the Hamiltonian vector field to any $H(p, q, z)$, as clearly, corresponds

$$sgradH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right)$$

The corresponding flow is obtained by integrating the system of ordinary differential equations

$$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \ \ \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \ i = 1, ..., n,$$

$$\frac{dz^l}{dt} = 0, \ l = 1, ..., l.$$

There is a fundamental connection between the Poisson bracket of two functions and the Lie bracket of their associated *Hamiltonian vector fields*, which forms the basis of much of the theory of Hamiltonian systems.

Let us consider functions $H_1, H_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ on the Euclidean four dimensional space $\mathbb{R}^4$ with cartezian coordinates p_1, p_2, q_1, q_2 which are given by the formulas

$$H_1 = p_1 q_1 + p_2 q_2$$
$$H_2 = p_1 q_2 + p_2 q_1$$

and hamiltonian vector fields

$$sgradH_1 = -p_1 \frac{\partial}{\partial p^1} - p_2 \frac{\partial}{\partial p^2} + q_1 \frac{\partial}{\partial q^1} + q_2 \frac{\partial}{\partial q^2},$$

$$sgradH_2 = -p_2 \frac{\partial}{\partial p^1} - p_1 \frac{\partial}{\partial p^2} + q_2 \frac{\partial}{\partial q^1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q^2}. \tag{1}$$

Theorem 1. The orbits of vector fields (1) generate singular foliation regular leaf of which is two dimensional surface zero Gauss curvature and zero Gauss torsion.

REFERENCES

1. **P. Olver.** *Applications of Lie Groups to Differential Equations.Springer.* (1993).

2.**Yu. A. Aminov, M. G. Szajewska.** *Gaussian torsion of a 2-dimensional surface defined implicitly in 4-dimensional Euclidean space*, Sb. Math., 195:11 (2004), 1545–1556

3.**K. Ramazanova.** *The theory of curvature of X^2 in E^4*. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.**6**, 137–143 (1966).

UDK 511.36

Geometry of Killing vector fields

Qosimov O.Yu.[1], Muratova O.Ya.[2]
[1]Lecturer at Termez University of Economics and Service, Termiz, O‘zbekiston;
odilbek.qosimov84@mail.ru
[2]Master‘s student in Mathematics at Termez University of Economics and Service, Termiz, O‘zbekiston;

Let M be a Hausdorff topological space with a countable basis.

1-Definition. [3]. If every point $p \in M$ of a given topological space R^n has a homeomorphic neighborhood U to an open subset V, then the topological space M is called an $n-$dimensional topological manifold.

Thus, it follows from the definition that for a Hausdorff topological space to be a topological manifold, it must be locally homeomorphic to a Euclidean space.

For example: 1. Euclidean spaces are topological manifolds. 2. If we consider the set defined by the equation $y^2 - x^2 = 0$, it describes two intersecting straight lines in the two-dimensional Euclidean space. This set is a connected Hausdorff topological space. If we locally homeomorphically map this set to R^1, there will be no homeomorphic mapping at the intersection point of the two straight lines. This is because the neighborhood of the intersection point is not homeomorphic to an interval. Therefore, two intersecting straight lines cannot be a topological manifold. [5].

A topological manifold must be equipped with a differential structure in order to be a smooth manifold. For example, the circle given by the equation $S = \{(x; y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ in the plane, centered at the origin with radius one, is a smooth one-dimensional manifold.

Now we introduce the concept of the tangent space of a manifold. By a manifold, we can also understand smooth curves and second-order surfaces without singular points. Through each point of the manifold, there pass infinitely many smooth curves lying within the manifold. The set of tangent vectors at a given point x, corresponding to all smooth curves passing through that point, is called the tangent space of the manifold at point x, and it is denoted by T_xM. The tangent space T_xM at a given point on the manifold is a vector space whose dimension equals the dimension of the manifold.

The tangent space is defined at every point of a smooth manifold. The union of the family of tangent spaces defined at each point of a smooth manifold is called the tangent bundle of the manifold and is denoted as follows:

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

An element of the tangent bundle is called a pair $(x,\ T_xM),\ x \in M,\ T_xM \in TM$ that is, a given point of the manifold together with the corresponding tangent space at that point is considered as a single element. Therefore, the dimension of the tangent bundle is twice the dimension of the manifold [6].

2-Definition. A vector field defined on a given smooth manifold M is a mapping $X : M \to TM$ determined by the rule $\pi \circ X(x) = x$.

We introduce the definition of a curve in Euclidean space. If a set γ in space or the plane is the image of some open interval under a topological (homeomorphic) mapping, then it is called a simple curve [4]. Since both Euclidean spaces and smooth surfaces are smooth manifolds, the concept of a curve on manifolds is also introduced via homeomorphic mappings.

Let X be a smooth vector field defined on a manifold. For each $t \in (a;b)$, if the equality $\dot{\varphi}(t) = X(\varphi(t))$ holds, then $\varphi : (a;b) \to M$ is called an integral curve of the given smooth vector field, where $\dot{\varphi}(t) - \ \varphi : (a;b) \to M$ is the tangent vector of the curve corresponding to the point $\varphi(t)$. We denote by $X^t(x)$ the integral curve of the vector field X defined on the manifold M, passing through the point $x \in M$ at $t = 0$.

Let X and Y be smooth vector fields defined on a manifold M.

A unique vector field $[X, Y]$, called the Lie bracket of the given vector fields, is associated with them, satisfying the condition:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

where $f : M \to R$ is a smooth function, and the $Y(f), X(f)$'s are directional derivatives of the function f.

If the vector fields X and Y are given by their coordinates $X = \sum\limits_i X^i \partial_i$, $Y = \sum\limits_j Y^j \partial_j$ in the basis $\partial_1, ..., \partial_n$, then the Lie bracket of the vector fields is computed by the following formula:

$$[X, Y]^i_x = (\sum_j X^j \partial_j Y^i - \sum_j Y^j \partial_j X^i)_x = (\sum_j X^j \frac{\partial \overline{Y}^i}{\partial x^j} - \sum_j Y^j \frac{\partial \overline{X}^i}{\partial x^j})_x .$$

Thus, for the smooth vector fields X and Y on the manifold M, there corresponds a vector field $[X, Y]$, called the Lie bracket of X and Y. The vector field $[X, Y]$ is called the Lie bracket of the vector fields X and Y. For example, the vector product of vectors in three-dimensional Euclidean space is an example of a Lie bracket. The set $V(M)$ of all smooth vector fields defined on a given manifold M forms a Lie algebra over the field of real numbers with respect to the Lie bracket of vector fields.

3-definition. If the one-parameter group of transformations generated by the flow of a vector field X defined on a manifold M consists of isometries, then the vector field X is called a Killing vector field.

Let $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ be a vector field given in an $n-$dimensional Euclidean space.

1-Lemma. A vector field X is a Killing vector field if and only if the condition $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = 0,\ i \neq j,\ \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0,\ \ i, j = \overline{1, n}.$ is satisfied [1].

Killing vector fields have the following properties [2]: • The Lie bracket of Killing vector fields is again a Killing vector field. • A linear combination of Killing vector fields is also a Killing vector field.

References

1. **Арнольд В. И** *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Москва, наука., 1975г.-240 с.

2. **Берестовский В.Н., Никоноров Ю.Г.** *Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях.* Сибирский математический журнал. Новосибирск.,2008г. 497-514 с., №3.

3. **Бакельман И.Я., Вернер А.А., Кантор Б.Е.** *Введение в дифференциальную геометрию «в селом.* Москва, наука., 1973г. 440 с.

4. **Нарманов А.Я.** *Дифференциал геометрия.* Тош. Турон-И?бол, 2016. 225 бет.

5. **Катанаев М.О.** *Геометрические методы в математической физике.* Москва, МИИ имени В. А. Стеклова РАН, 2016 г.

6. **Олвер П.** *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Москва, Мир., 1989г. 644 с.

O‘DK 514.753.3

Galiley fazosida doimiy egrilikka ega ko‘chirma sirtlar

Sultanov.B.M[1] Mahmudova.N.O[2], Zaripova N.D.[3], Xudayberganova M.X.[4]
[1]Abu Rayhon beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston; sultanov.b@urdu.uz
[2]Urganch davlat pedagogika instituti, Urganch, O‘zbekiston; nazokatmahmudova7@gmail.com
[3]Abu Rayhon beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston;
[4]Abu Rayhon beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston.

Usbu maqolada 3-o‘lchovli Galiley fazosida ko‘chirma sirtlarning turlari aniqlanib, ularning Gauss egriligi va o‘rtacha egriligi hisoblab chiqilgan. Nol va doimiy qiymatlarga ega bo‘lgan egriliklar bo‘yicha ko‘chirma sirtlar tasniflangan. Natijada, minimal, yassi, silindrik va boshqa maxsus sirtlarning to‘liq ro‘yxati berilgan.

Ko‘chirma sirtlar differensial geometriyada muhim obyektlardan biri bo‘lib, ular ikki egri chiziqni bir-biriga siljitish orqali hosil qilinadi.

Evklid fazosida ko‘chirma sirtlar yaxshi o‘rganilgan, ammo Galiley fazosida ular alohida xususiyatlarga ega.

Ushbu ishda Galiley fazosida ko‘chirma sirtlarning turli ko‘rinishlari keltirilib, ularning Gauss va o‘rtacha egriliklari tekshirilgan.

1-ta’rif Galiley fazosida ikkita egri chiziqni bir-biriga qo‘shish (siljitish) orqali hosil qilingan sirti ko‘chirma sirti deyiladi.

Hosil qiluvchi chiziqlarning tekislikda yoki fazoda joylashishiga qarab, Galiley fazosida besh turdagi ko‘chirma sirt aniqlanadi:

I-tur: ikkala hosil qiluvchi chiziqlari xy-tekislikda joylashgan chiziqlardan hosil bo‘lgan sirtlar.

II-tur: biri xy-tekislikda, ikkinchisi yz-tekislikda joylashgan chiziqlardan hosil bo‘lgan sirtlar.

III-tur: ikkala chiziqlar yz-tekislikda joylashgan chiziqlardan hosil bo‘lgan sirtlar.

IV-tur: biri xy-tekislikda, ikkinchisi xz-tekislikda joylashgan chiziqlardan hosil bo‘lgan sirtlar.

V-tur: umumiy holat - ikkala chiziq fazoda joylashgan chiziqlardan hosil bo‘lgan sirtlar.

1-teorema Agar ko‘chirma sirti I, II yoki III-tur bo‘lsa va uning Gauss egriligi $K = 0$, u holda sirti silindrik yoki yassi bo‘ladi.

2-teorema IV-tur ko‘chirma sirtning Gauss egriligi $K = \text{const} \neq 0$ bo‘lishi mumkin emas. Agar $K = 0$ bo‘lsa, sirti yassi bo‘ladi.

3-teorema Agar ko‘chirma sirtning o‘rtacha egriligi $H = 0$ bo‘lsa, sirti minimal bo‘ladi. Bu holat faqat maxsus I, II va III-tur sirtlarda sodir bo‘ladi.

4-teorema V-tur (umumiy fazoviy) ko‘chirma sirtlarda doimiy Gauss yoki doimiy o‘rtacha egrilik mavjud emas.

Galiley fazosida ko‘chirma sirtlarning turlari va ularning egriliklari Evklid fazosidan tubdan farq qiladi. Minimal va yassi sirtlar faqat maxsus I-III tur hollarda mavjud. Umumiy V-tur fazoviy ko‘chirma sirtlarda esa doimiy egrilikka ega sirtlar mavjud emas. Ushbu natijalar Galiley va pseudo-Galiley fazolarida maxsus sirtlarning yanada chuqur tadqiqotlari uchun nazariy asos yaratadi.

Adabiyotlar ro‘yxati

1. **Артикбаевю А., Соколов Д.Д** *Геометрия в целом в плоском пространстве времени* Ташкент, 1991. - 180 Стр.
2. **Sipus Z. M.** *Translation surfaces in the Galilean space* Glasnik matematicki. Vol. 46(66) (2011), pp. 457-471.
3. **Рашевский.П.К** *Курс дифференциальной геометрии* М: Едиториал. УРСС, 2003. - 432 стр.

O‘DK 514.753.3

Galiley fazosida nol egrilikka ega aylanma sirtlar

Sultanov.B.M[1], Otakhonova M.J.[2], Davronbekova M.J.[3]
[1]Abu Rayhon beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston; sultanov.b@urdu.uz
[2]Abu Rayhon beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston; geometriya_2016@mail.ru
[3]Abu Rayhon beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston; m.j.davronbekova@gmail.com

Ushbu maqolada 3-o‘lchovli Galiley fazosida aylanma sirtlarning uch turi aniqlanib, ularning Gauss va o‘rtacha egriliklari o‘rganilgan. Gauss egrilikka nolga teng (yassi) va o‘rta egriligi nolga teng (minimal) aylanma sirtlar tasniflangan.

Aylanma sirtlar differensial geometriyada eng qadimiy va ko‘p o‘rganilgan obyektlardan biridir.

Evklid fazosida bu sirtlar yaxshi ma’lum bo‘lsada, Galiley fazosida izotrop va noizotrop yo‘nalishlar mavjudligi sababli ularning xossalari sezilarli darajada farq qiladi.

1-ta’rif Galiley fazosida egri chiziqning aylanishi natijasida hosil bo‘lgan sirtga aylanma sirt deb ataladi.

Galiley fazosida aylanma sirtlarning turlari quyidagicha bo‘ladi:

I-tur aylanma sirtlar. Egri chiziq xy-tekislikda joylashgan bo‘lib, izotrop aylanishdan hosil qilinadi.

II-tur aylanma sirtlar. Egri chiziq xz-tekislikda joylashgan bo‘lib, izotrop aylanishdan hosil qilinadi.

III-tur aylanma sirtlar. Egri chiziq yz-tekislikda joylashgan bo‘lib, Evklidiy x-o‘qi atrofida aylanishdan hosil qilinadi.

1-teorema Galiley fazosida I-tur aylanma sirt yassi ($K = 0$) bo‘lsa, u minimal ($H = 0$) ham bo‘ladi.

2-teorema Galiley fazosida II-tur aylanma sirt yassi ($K = 0$) bo‘lsa, u minimal ($H = 0$) ham bo‘ladi.

3-teorema III-tur aylanma sirtlarda minimal sirt mavjud emas.

Galiley fazosida aylanma sirtlarning xossalari Evklid fazosidan tubdan farq qiladi. I va II-tur aylanma sirtlarda yassi va minimal tushunchalari o‘zaro ekvivalent bo‘lsa, III-tur aylanma sirtlarda minimal sirtlar mavjud emas. Bu natijalar Galiley va pseudo-Galiley fazolarida maxsus sirtlarning keyingi chuqur tadqiqotlari uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

Adabiyotlar ro‘yxati

1. **Артикбаевю А., Соколов Д.Д** *Геометрия в целом в плоском пространстве времени* Ташкент, 1991. - 180 Стр.

2. **Dede M., Ekici C., Goemans W.** *Surfaces of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space.* Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. Vol. 14, No. 2 (2018), pp. 141–152.
3. **Рашевский.П.К** *Курс дифференциальной геометрии* М: Едиториал. УРСС, 2003. - 432 стр.

O'DK 514.77

Sirt egriligini hisoblash

Tursunov B. A.[1], Buronova S. A.[2], Xoliqova T. T[3]
Axborot texnologiyalari va menejment universiteti, Qarshi, O'zbekiston;
[1]t.bayramali@yandex.ru; [2]saxidaboronova@gmail.com; [3]tansiqxoliqova@gmail.com

Tekislikdagi yoki fazodagi chiziqlarning invariantlari ya'ni normali, binormali, egriligi, buralishi, Frene formulalari bular chiziqning fazoda joylashishiga va uning formasiga bog'liq, ya'ni bular tashqi geometriya tushunchalaridir. Chiziqda hech qanday ichki metrik invariantlar mavjud emas.

Sirtda esa bunday emas, masalan, sirtda yoki uning bo'lagida berilgan chiziq yoyi uzunligi formulasi evklid tekisligidagi dekart koordinatalar sistemasida berilgan chiziq yoyi uzinligi formulasi bilan bir xil emas. Shunday ekan sirt nima va u qanday usullarda beriladi?

Uch o'lchamli fazodagi sirt – bu ichki geometriyasi haqida gapirish mumkin bo'lgan sodda geometrik abyektdir. Sirt uch usulda beriladi:

1) Soddaroq: $z = f(x, y)$ funksiya grafigi yordamida;

2) Umumiyroq: $F(x, y, z) = const$ tenglama yordamida;

3) Parametrik holatda: $r = r(u, v)$ yoki $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ bunda u, v parametrlar (u, v) tekislikdagi biror sohadan olingan.

Endi sirtning ichki geometriyasiga o'tsak.

Bizga biror sirt va uning maxsus nuqtasi bo'lmagan $P(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi berilgan bo'lsin. Sirtning P nuqtasidagi gauss egriligi sirtning ichke geometriyasi bo'ladi, ya'ni sirtning gauss egriligi faqatgina bu sirtning ichki metrik xossasigagina bog'liq.

Biz bu egrilik tushunchasini maxsus koordinatalar sistemasida aniqlaymiz. Quyidagicha ortonormallangan koordinatalar sistemasini tanlaymiz:

Sirtning berilgan nuqtasidan normal o'tkazib uni z o'qi bilan belgilaylik. x va y o'qlarni urinma bo'ylab yo'naltiraylik. Shunda sirt P nuqta atrofida $z = f(x, y)$ funksiya yordamida berilib

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_P = \left.\frac{df}{dy}\right|_P = 0$$

bo'ladi, ya'ni $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ funksiya uchun gradiyent vektor $\{0, 0, 1\}$ vektorga kollinear. $z = f(x, y)$ funksiya uchun ikkinchi differensialni yoki

$$2d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

ni qaraylik. Bundan $(a_{ij}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ matritsani tuzamiz va uni P nuqtada kvadratik formaning matritsasi sifatida qaraymiz, bunda $x^1 = x$, $x^2 = y$, $i, j = 1, 2$.

(a_{ij}) matritsaning xos sonlari k_1, k_2 ga sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklari, (a_{ij}) matritsa determinanti $K = k_1 \cdot k_2 = \det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ga sirtning gauss egriligi, (a_{ij}) matritsa izi $H = a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2$ ga esa o'rtacha egriligi deyiladi.

1-masala. Sirt $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ tenglama bilan berilgan. Uning $P(0,0,0)$ nuqtasidagi bosh egriliklari, gauss egriligi va o‘rtacha egriligi topilsin.

Yechim. Bu sirt elliptik paraboloiddan iborat. P nuqtadagi normal vektor Oz o‘qi bilan bir xil yo‘nalisga ega, Oxy tekisligi esa sirtning P nuqtadagi urinma tekisligi bo‘ladi. Demak, koordinatalar sistemasini o‘zgartirishga hojat yo‘q. U holda $\frac{df}{dx} = \frac{x}{p}$, $\frac{df}{dy} = \frac{y}{q}$ bo‘lib, tekshirib ko‘rish mumkinki $\frac{df}{dx}\Big|_P = 0$ va $\frac{df}{dy}\Big|_P = 0$ shartga mos keladi. Ikkinchi hosilalarni hisoblab

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{p}, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = \frac{1}{q} \quad \text{va} \quad \frac{d^2f}{dxdy} = 0$$

ekanligini topamiz. U holda $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlarini sodda hisoblashlar yordamida topib, quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

$$k_1 = \frac{1}{p}, \quad k_2 = \frac{1}{q}, \quad K = \frac{1}{pq}, \quad H = \frac{p+q}{pq}.$$

2-masala. Tenglamasi $Z = XY$ bo‘lgan sirtning $P(X = 1, Y = 1, Z = 1)$ nuqtasidagi bosh egriliklari, gauss egriligi va o‘rtacha egriligi topilsin.

Yechim. Yuqorida aytilganiga asosan P nuqtada z o‘qi yo‘nalishi $\vec{n} = \{-1, -1, 1\}$ vektorga parallel bo‘lishini tushunish qiyin emas. U holda $\vec{u} = \{1, 1, 2\}$ va $\vec{v} = \{1, 1, 0\}$ vektorlar sirtning P nuqtasidagi urinma tekislikka parallel bo‘lganligidan, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ bazis ortogonal sistemani hosil qiladi. Bizga esa ortonormal sistema kerak. U holda

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

dan ortonormal sistema

$$\vec{e}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right\}, \quad \vec{e}_2 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \quad \vec{e}_3 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

ni hosil qilamiz.

Fazoda dekart koordinatalarini sistemasini burish formulasi

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dan foydalanib, yangi $\vec{e}_i = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}\}$ bazisga o‘tamiz. U holda

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

almashtirish yordamida, sodda hisoblashlardan so‘ng, sirt tenglamasi

$$\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{\sqrt{18}}yz - \frac{1}{\sqrt{18}}xz - \sqrt{3}z = 0$$

ko‘rinishga ega bo‘lishini topamiz. $z = f(x, y)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasini topaylik:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{18}}z}{\frac{2}{3}z - \frac{1}{\sqrt{18}}y - \frac{1}{\sqrt{18}}x - \sqrt{3}}\Bigg|_{P(0,0,0)} = 0;$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\left.\frac{-y - \frac{1}{\sqrt{18}}z}{\frac{2}{3}z - \frac{1}{\sqrt{18}}y - \frac{1}{\sqrt{18}}x - \sqrt{3}}\right|_{P(0,0,0)} = 0;$$

Endi hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida $\frac{2}{3}z - \frac{1}{\sqrt{18}}y - \frac{1}{\sqrt{18}}x - \sqrt{3} = m$ belgilash kiritib, ikkinchi tartibli hosilalarni olib, (a_{ij}) matritsa elementlarini topamiz:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\left.\frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}\frac{dz}{dx})\cdot m - (\frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{18}}z)\cdot m'_x}{m^2}\right|_{P(0,0,0)} = \frac{1}{3\sqrt{3}};$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \left.\frac{(-1 - \frac{1}{\sqrt{18}}\frac{dz}{dy})\cdot m - (-y - \frac{1}{\sqrt{18}}z)m'_y}{m^2}\right|_{P(0,0,0)} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = -\left.\frac{-\frac{1}{\sqrt{18}}\frac{dz}{dy}\cdot m - (\frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{18}}z)m'_y}{m^2}\right|_{P(0,0,0)} = 0.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ matritsa uchun uning xos sonlarini topish qiyin emas. U holda berilgan sirtning P nuqtasidagi bosh egriliklari k_1, k_2, gauss egriligi K va o‘rtacha egrilik H uchun quyidagilar o‘rinli:

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}, \quad k_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad K = k_1k_2 = -\frac{1}{9}, \quad H = k_1 + k_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Natijalarga asoslanib shunday xulosaga kelish mumkin: ko‘pchilik sirtlarning egriliklarini hisoblashda bu usuldan foydalanish qaysidir ma’noda yengillikka olib kelsada, ammo ba’zi shunday sirtlar ham borki, ularning parametrli tenglamasidan oshkormas ko‘rinishdagi umumiy tenglamasiga o‘tish ancha murakkab bo‘lib, hisoblashlarda noqulayliklar tug‘diradi. Shuning uchun sirtning gauss egriligini hisoblashning (2) adabiyotda berilgan bosh egriliklarni topish usulidan foydalanish qulay bo‘ladi.

Eslatma. Tanlangan bazis va $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazislar bir xil oriyentatsiyaga ega ekanligiga e’tibor qaratish kerak. Masalan: 2-misolda $\vec{u} = \{-1, 1, 0\}, \vec{v} = \{1, 1, 2\}$, $\vec{n} = \{1, 1, -1\}$ bazis tanlansa u holda bosh egriliklar qarama-qarshi ishora bilan chiqadi.

Adabiyotlar

1. **Бураго.Ю.Д., Залгаллер Б.А** *Введение в риманову геометрию* СПб.: Наука, 1994. 318 стр. 2.

2. **Нарманов А. Я.** *Дифференциал геометрия.* Тошкент. Университет. 2003.

3. **. Нарманов А. Я., Турсунов Б. А.** *О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга.* // Algebraic and geometric methods of analysis. - 2017. - С. 129. 4. **Турсунов Б. А.** *О построении римановых субмерсий.* // Modern stochastic models and problems of actuarial mathematics. - 2020. - С. 121-121

5. **Касимов О.** *О геометрии сингулярных римановых слоений в* //Предпринимательства и педагогика. - 2023. - Т. 2. - №. 2. - С. 191-199.

UDK 511.36

Поле касательных плоскостей

Косимов О.Ю [1], Юлдашев.Э.А.[2]

[1]Преподаватель Термезского университета экономики и сервиса, г. Термез, Узбекистан; odilbek.qosimov84@mail.ru

[2]Магистрант по специальности «Математика» в Термезском университете экономики и сервиса, г. Термез, Узбекистан;

Пусть в некоторой окрестности M задано K векторных полей P которые линейно независимы в каждой точке U Возникает вопрос о том, что существуют ли такие подмногообразия в M, у которого касательные пространства в каждой точке $x \in U$ совпадают с подпространством, натянутым на векторы $\{X_A\}$. Ответ на этот вопрос дает теорема Фробениуса. Чтобы ее сформулировать введем несколько новых понятий. [1]

1-определение. [3] Отображение P, ставящее каждой точке $x \in M$ некоторое подпространство $P(x) \subset T_xM$, называется распределением. Если $\dim P(x) = k$ для всех $x \in M$, то P называется $k-$ мерным распределением.

2-определение.Распределение P называется гладким, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность этой точки $U(x)$, и гладкие векторные поля $X_1, X_2, ..., X_m$, заданные на $U(x)$, такие, что векторы $X_1(y), X_2(y), ..., X_m(y)$ образуют базис для подпространства $P(y)$, для каждого $y \in U(x)$.

3-определение.Распределение P называется вполне интегрируемым, если для каждой точки $x \in M$ существуют подмногообразие N_x многообразия M такое, что $T_yN_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$. Подмногообразие N_x называется интегральным подмногообразием распределения P.

Если дано семейство D гладких векторных полей, то естественным образом возникает гладкое распределение. Действительно, если D состоит из гладких векторных полей, то для каждой точки $x \in M$ множество векторов $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ порождает некоторое подпространство $P(x)$ касательного пространство T_xM. Это распределение обозначим через P_D. Но не каждое распределение задается семейством векторных полей заданных на M. Говорят, что векторное поле X принадлежит распределению P, если $X(x) \in P(x)$ для всех $x \in M$. Распределение P на многообразии M называется инволютивным, если $X, Y \in P$ то имеет место $[X, Y] \in P$.

Необходимое и достаточное условие вполне интегрируемости распределения постоянной размерности дано в теореме Фробениуса.

1-теорема.[1]. Для того чтобы распределение P на многообразии M было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным.

4-определение.Семейство векторных полей D называется вполне интегрируемым, если соответствующее распределение P_D, порожденное D, является вполне интегрируемым.

Приведём примеры, соответствующие вышеуказанному определению и теореме.

1-пример.Пусть на многообразии задано произвольное гладкое векторное поле X. Оно порождает одномерное распределение на этом многообразии. Интегральным многообразием этого распределегия является интегральная кривая данного векторного поля.

2-пример.Рассмотрим двумерное распределение в трёхмерном евклидовом пространстве. Даны векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial x^2}$ и $Y = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^3}$, то есть поле $X = \{0, 1, 0\}, Y = \{x^1, 0, 1\}$. Рассчитаем их скобки Ли: $X^1 = 0,\ X^2 = 1,\ X^3 = 0, Y^1 = x^1,\ Y^2 = 0,\ Y^3 = 1.$

$$[X,Y]^1=\sum_{j=1}^{3}(X_j\frac{\partial Y_1}{\partial x_j}-Y_j\frac{\partial X_1}{\partial x_j})=(X_1\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}-Y_1\frac{\partial X_1}{\partial x_1})+(X_2\frac{\partial Y_1}{\partial x_2}-Y_2\frac{\partial X_1}{\partial x_2})+(X_3\frac{\partial Y_1}{\partial x_3}-Y_3\frac{\partial X_1}{\partial x_3})=$$

$$=0\cdot 1-x^1\cdot 0+1\cdot 0-0\cdot 0+0\cdot 0-0\cdot 0=0.$$

$$[X,Y]^2=\sum_{j=1}^{3}(X_j\frac{\partial Y_2}{\partial x_j}-Y_j\frac{\partial X_2}{\partial x_j})=(X_1\frac{\partial Y_2}{\partial x_1}-Y_1\frac{\partial X_2}{\partial x_1})+(X_2\frac{\partial Y_2}{\partial x_2}-Y_2\frac{\partial X_2}{\partial x_2})+(X_3\frac{\partial Y_2}{\partial x_3}-Y_3\frac{\partial X_2}{\partial x_3})=$$

$$=0\cdot 0-x^1\cdot 0+1\cdot 0-0\cdot 0+0\cdot 0-1\cdot 0=0.$$

$$[X,Y]^3=\sum_{j=1}^{3}(X_j\frac{\partial Y_3}{\partial x_j}-Y_j\frac{\partial X_3}{\partial x_j})=(X_1\frac{\partial Y_3}{\partial x_1}-Y_1\frac{\partial X_3}{\partial x_1})+(X_2\frac{\partial Y_3}{\partial x_2}-Y_2\frac{\partial X_3}{\partial x_2})+(X_3\frac{\partial Y_3}{\partial x_3}-Y_3\frac{\partial X_3}{\partial x_3})=$$

$$=0\cdot 0-x^1\cdot 0+1\cdot 0-0\cdot 0+0\cdot 0-1\cdot 0=0$$

$[X,Y]^1=0,\ [X,Y]^2=0,\ [X,Y]^3=0$ то есть $[X,Y]=\{0,0,0\}$. Это распределение может служить примером интегрируемого распределения.

3-пример.Рассмотрим в трёхмерном евклидовом пространстве двумерную поверхность, а именно эллипсоид, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Рассмотрим отображение, которое каждой точке эллипсоида ставит в соответствие касательную плоскость в этой точке, то есть: $P:\ (x_0;y_0;z_0)\to\{F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0\}$. Это соответствие образует распределение.

Литература

1. **Катанаев М.О.** *Геометрические методы в математической физике.* Москва, МИИ имени В. А. Стеклова РАН, 2016 г.
2. **Кобаяси Ш, Номидзу К** *Основы дифференциальной геометрии.* Москва.:Наука, 1981. Т. 1. – 344 с.
3. **Нарманов А.Я.** *Дифференциал геометрия.* Тош. Турон-Икбол, 2016. 225 бет.

УДК 512.54 + 692.2

Применение групповых операций в строительстве

Заитов А. А[1]., Камилов Х. Х[2].
[1]Ташкентский архитектурно-строительный университет, Ташкент, Узбекистан;
adilbek_zaitov@mail.ru
[2]Ташкентский архитектурно-строительный университет, Ташкент, Узбекистан;
kh.kamilov@mail.ru

В математике понятие группы играет одну из центральных ролей в алгебраических структурах. Группы используются как в чисто абстрактных теоретических изысканиях, так и в прикладной математике, включая физику, химию и информатику. Исследование геометрического смысла произведения групп позволяет глубже понять не только сами группы, но и их взаимосвязь с различными геометрическими объектами и явлениями.

В общем смысле, группа – это множество [1], на котором определена операция, удовлетворяющая четырем основным аксиомам: замкнутости, ассоциативности, существованию нейтрального элемента и существованию обратных элементов. Удовлетворяющие аксиоме симметричности группы называются абелевыми. Эти свойства позволяют рассматривать группы как симметрические объекты, что открывает широкие возможности для их геометрической интерпретации.

Рассмотрим наиболее простой случай – группы, состоящие из симметрий геометрических фигур. Например, группа вращений квадрата представляет собой множество всех возможных вращений квадратной фигуры вокруг её центра. Каждое вращение сохраняет геометрическую структуру квадрата и его пропорции, что делает его элементом группы и дает возможность изучать свойства этих вращений с помощью алгебраических методов.

Геометрический смысл произведения групп также проявляется в симметриях пространственных объектов в архитектуре. При проектировании зданий и конструкций архитектор использует различные симметрии, которые могут быть описаны с помощью групповых операций. Например, сочетание симметрий различных элементов здания может быть смоделировано как произведение групп, что позволяет архитектору создавать гармоничные и эстетически привлекательные формы.

Еще одной важной областью применения групп является строительство, где суммарные расходы на строительство дома или коттеджа будут определяться исходя из типа дома, планируемых к использованию строительных материалов, стоимости производства работ подрядчиком, сложности и объемов подготовительных работ, выбранного состава проектной документации и многих других причин. На суммарные расходы по строительству, монтажу инженерных систем, ремонт и отделку будут влиять множество составляющих. Изменяя которых, итоговая стоимость строительства может как уменьшиться, так и увеличиться (например, могут влиять: сложность реализации проекта (наличие выступающих элементов, эркеров, сложная форма кровли и т. п.), сложность и класс инженерного оборудования и т. д. Для того что бы получить более точную стоимость строительных работ необходимо по архитектурно-строительному проекту на дом произвести калькуляцию расходов на строительство [2]. При этом немало важную роль играет расценки на строительные работы. Стоит отметить, что расценка строительных работ вычисляется по объему (сум/кубический метр), по площади (сум/квадратный метр), и по длине (сум/погонный метр).

Рассмотрим следующий случай. Пусть требуется класть тротуарной плитки и оградить его с бордером. Предложенная расценка приведена в следующей таблице.

Строительные работы	**Относительные расценка**
Укладка тротуарной плитки	x сум/квадратный метр
Ограждение с бордюром	y сум/погонный метр

Требуется класть тротуарной плитки на участок прямоугольной четырехугольной формы длины a метров, ширины b метров. При этом каждая из параллельных границ ограждена цоколю, а другим сторонам требуется бордюрное ограждение.

На множестве $\mathbb{R}^2$ определим операцию

$$m(\cdot+)n = (m_1 \cdot n_1; m_1 + m_2), \quad m = (m_1, m_2), n = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Множество $\mathbb{R}^2$ с операцией $(\cdot+)$ образует абелеву группу.

Для решения вышеприведенной задачи, составим векторы $m = (a, b)$ и $n = (b, a)$. Тогда вектор $v = m(\cdot+)n = (ab; a + b)$ означает вектор объема работы при укладке плитки с

бордером. А $z = (x; y)$ – вектор стоимости строительных работ. Скалярное произведение

$$vz = abx + (a + b)y$$

указывает стоимость услуги при укладке плитки с бордюрным ограждением.

Теперь в множестве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим следующие операции:

$$\begin{aligned} a(\cdot\,\cdot+)b &= (a_1b_1, a_2b_2, a_3 + b_3);\\ a(\cdot+\cdot)b &= (a_1b_1, a_2 + b_2, a_3b_3);\\ [a(\cdot+\cdot\cdot)b &= (a_1 + b_1, a_2b_2, a_3b_3);\\ a(\cdot+\cdot)b &= (a_1b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3);\\ a(+\cdot+)b &= (a_1 + b_1, a_2b_2, a_3 + b_3);\\ a(++\cdot)b &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3b_3). \end{aligned}$$

где $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Здесь $\cdot$ – умножение, а $+$ – сложение элементов из $\mathbb{R}$.

Теорема 1. Пары $(\mathbb{R}^3, *)$ являются абелевы группами. Здесь $*$ заменяет операции $(\cdot+\cdot)$, $(+\cdot+)$, $(++\cdot)$, $(+\cdot\cdot)$, $(\cdot+\cdot)$, $(+\cdot\cdot)$. При этом элементы $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ являются соответствующими этим операциям нейтральными элементами. Более того, для каждого элемента $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ элемент $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, -a_3)$ (соответственно, $(a_1^{-1}, -a_2, a_3^{-1})$, $(-a_1, a_2^{-1}, a_3^{-1})$, $(a_1^{-1}, -a_2, -a_3)$, $(-a_1, a_2^{-1}, -a_3)$, $(-a_1, -a_2, a_3^{-1})) \in \mathbb{R}^3$ является обратным элементом относительно операции $(\cdot + \cdot)$ (соответственно, $(+ \cdot +)$, $(+ + \cdot)$, $(+ \cdot\cdot)$, $(\cdot + \cdot)$, $(+ \cdot\cdot)$).

Литература

1. **Винберг Э. Б.** *Курс алгебры. 3-е изд.* – М.: "Факториал Пресс", 2002. – 544 с.
2. https://a-expert.ru/services/obsledovaniya-stati/opredelenie-ob-ema-stroitel-ny-h-rabot

УДК 515.12

О сужении и расширении идемпотентных мер

Холтураев Х. Ф[1]., Эргашев Ф. Ш[2].
[1]Ташкентский международный университет финансового менеджмента и технологий, Ташкент, Узбекистан; xolsaid_81@mail.ru
[2]Ташкентский международный университет финансового менеджмента и технологий, Ташкент, Узбекистан; ergashevfaxriddinshermamatovich@mail.ru

Для компактного хаусдорфово пространства X рассмотрим пространство $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер на X. Напомним, что функционал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ называется [3] идемпотентной вероятностной мерой на X, если он обладает следующими свойствами:

(i) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где λ_X – постоянная функция (нормированность);

(ii) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ (однородность);

(iii) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ (аддитивность).

Положим

$$I_{nn}(X) = \{\mu \in I(X)\colon\ |\operatorname{supp}\mu| = n\},$$

$n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mu = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \odot \delta_{x_i}$. Тогда $\operatorname{supp}\mu = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для $x \in X \setminus \operatorname{supp}\mu$ определим идемпотентную вероятностную меру ${}^x\mu$ по правилу

$${}^x\mu = \alpha \odot \delta_x \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i \odot \delta_{x_i},$$

где $\alpha = \min\{\alpha_i\colon\ i = 1, \ldots, n\}$. Тогда ${}^x\mu \in I_{(n+1)(n+1)}(X)$, причем $\operatorname{supp}{}^x\mu = \{x\} \cup \operatorname{supp}\mu$.

Таким образом, определено отображение $\eta_n\colon\ I_{nn}(X) \times (X \setminus \operatorname{supp}\mu) \to I_{(n+1)(n+1)}(X)$ формулой

$$\eta_n(\mu, x) = \mu \oplus \alpha \odot \delta_x.$$

Пусть теперь $\mu \in I_{nn}(X)$, $x \in \operatorname{supp}\mu = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Полагая

$${}_x\mu = (-\infty) \odot \delta_x \oplus \bigoplus_{x_i \in \operatorname{supp}\mu \setminus \{x\}} \alpha_i \odot \delta_{x_i},$$

определим отображение

$$\partial_n\colon\ I_{nn}(X) \times \operatorname{supp}\mu \to I_{(n-1)(n-1)}(X),$$

$$\partial_n(\mu, x) = (-\infty) \odot \delta_x \oplus \bigoplus_{x_i \in \operatorname{supp}\mu \setminus \{x\}} \alpha_i \odot \delta_{x_i}.$$

Теорема 1. Отображения

$$\eta_n\colon\ I_{nn}(X) \times (X \setminus \operatorname{supp}\mu) \to I_{(n+1)(n+1)}(X),$$

$$\partial_n\colon\ I_{nn}(X) \times \operatorname{supp}\mu \to I_{(n-1)(n-1)}(X)$$

непрерывны.

Литература

1. **Zaitov A. A.** *On a metric on the space of idempotent probability measures, Applied General Topology 21, №.1 (2020), 35-51.*

2. **Kholturaev Kh. F.** *On Z-Sets in the Space of Idempotent Probability Measures, Math. Notes, 111:6 (2022), 940-953.*

3. **Zarichny M. M.** *Spaces and maps of idempotent measures, Izv.RAN. Ser.mat.,* ***74****, №. 3, P.45-64, 2010.*

4 – SHO‘BA. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIK FIZIKANING NOSTANDART MASALALARI

СЕКЦИЯ 4. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

UDK 517.956.4

The direct problem for a fractional-order diffusion equation with involution involves several types of loads

Abdullaev O.Kh.[1], Sobirjonov A.Q.[2]
[1]Alfraganus University, Tashkent Uzbekistan; obidjon.mth@gmail.com
[2]Alfraganus University, Tashkent Uzbekistan; avazbeksobirjonov1998@gmail.com

In this work, we consider a direct problem for a fractional-order heat equation with involution. We seek a formal solution to this problem in the form of series expansions using an orthogonal basis obtained by separation of variables, and we also examine the convergence of the obtained series solution.

Let us introduce the following operators:

$$A_1[u] = b_1 u(x,t_0) + b_2 u(\pi - x, t_0) + c_1 u_{xx}(x,t_0) + c_2 u_{xx}(\pi - x, t_0),$$

$$A_2[u] = d_1 \int_0^{t_0} u(x,s)ds + d_2 \int_0^{t_0} u(\pi - x, s)ds + p_1 \int_0^{t_0} u_{xx}(x,s)ds + p_2 \int_0^{t_0} u_{xx}(\pi - x, s)ds,$$

$$A_3[u] = q_1 u_t(x,t_0) + q_2 u_t(\pi - x, t_0),$$

where $b_i, c_i, d_i, p_i, q_i \ \ (i = 1,2)$ are real numbers.

The problem under investigation is formulated for the equation

$$ {}_C D^{\alpha}_{0t} u(x,t) - a_1 u_{xx}(x,t) + a_2 u_{xx}(\pi - x, t) + A_1[u] + A_2[u] + A_3[u] = $$

$$= f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

here, α, a_i, $(i = 1,2)$ are nonzero real numbers such that $0 < \alpha \leq 1$, $a_1 > 0$, $a_1 \pm a_2 > 0$, and Ω is a rectangular domain given by $\Omega = \{\, 0 < x < \pi,\ 0 < t < T \,\}$, t_0 is any fixed number with $t_0 \in (0,T)$. Moreover, ${}_C D^{\alpha}_{0t}$ is the Caputo derivative, which is defined as follows.

Definition 1. [1] The fractional derivatives ${}_C D^{\alpha}_{at} u$ of order $0 < \alpha < 1$ on $[a,b]$ defined as

$$ {}_C D^{\alpha}_{at} u(t) = D^{\alpha}_{at}[u(t) - u(a)]$$

is called the left-sided Caputo fractional derivatives of order α , where

$$D^{\alpha}_{at} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} u(s)ds, \quad 0 < \alpha < 1.$$

The above equation with $b_i, c_i, d_i, p_i, q_i = 0$, $(i = 1,2)$ and $\alpha = 1$ was studied in [2]. Our aim is to find a regular solution to the following direct problem, at $0 < \alpha \leq 1$:

Problem P_N: Find a function $u(x,t)$ in the domain Ω that satisfies equation (1), the initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,\pi] \tag{2}$$

and the homogeneous Neumann boundary condition

$$u_x(0,t)=0, \quad u_x(\pi,t)=0, \quad t\in(0,T] \tag{3}$$

where $\varphi(x)$ is given and sufficiently smooth function.

The novelty of the stated problem mainly lies in the part loaded with respect to the time variable, and it is investigated under various types of loads. A problem close to this work was also studied in [2],[4],[5].

Under certain conditions on the given functions $f(x,t)$, $\varphi(x)$ and the coefficients $b_i, c_i, d_i, p_i, q_i\,(i=1,2)$, we prove the existence and uniqueness of the solution to the above formulated problem using Fourier series.

References

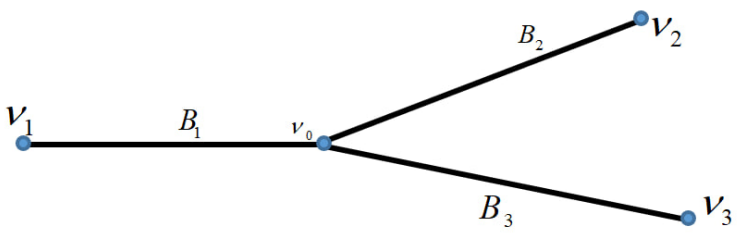
1. A.A.Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J.Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. NorthHolland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
2. A. K. Urinov, M.S.Azizov. A Boundary Problem for the Loaded Partial Differential Equations of Fourth Order//Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021 . Vol. 42, No. 3. P.621вЂ“631.
3. N. Al-Salti, M. Kirane, T.Berikbol. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // arXiv:1612.01419v2 ,[math.AP] 2017
4. B.Turmetov, O.Abdullaev, A.Sobirjonov. On a class of inverse problems for a loaded diffusion equation fractional order with involution perturbation.// Bulletin of the Institute of Mathematics.2025. Vol 8. 61-71. No. 1. P.61-71.
5. O.Abdullaev, A.Sobirjonov, B.Turmetov. Boundary value problems for a loaded fractional order diffusion equation with involution perturbation.//Journal of Mathematical Sciences.2025. https://doi.org/10.1007/s10958-025-07938-3

MCS:35R11

An inverse problem with non-local condition for fractional differential equation on metric graph

Abdimurodova X. A.[1], Khujakulov J. R.[2], Barotaliyeva D.[3]
[1,2]Termez state university, Termez, Uzbekistan;
[3] National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
xusnyaa@gmail.com[1] jonibek.16@mail.ru[2] dinorabonubarotaliyeva@gmail.com[3]

We consider a metric graph $\Gamma = V \cup E$ consisting of a finite set of vertices $V = \{\nu_k\}$, $(k = 0, 1, 2, 3)$ and a finite set of edges $E = \{B_k\} = \{x_k : 0 < x_k < L_k\}$, $(k = 1, 2, 3.)$ connecting these nodes.



In the paper, we will discuss a inverse problem addressees the recovery of a space dependent source term i.e. $g(t)f^{(k)}(x)$. Where $f^{(k)}(x)$ are given and $g(t)$ is unknown functions(see,[1,2]).

On the each edge of the above defined graph Γ we consider fractional differential equations:

$$ {}_CD^{\alpha}_{0t}u^{(k)}(x,t) = au^{(k)}_{xx}(x,t) + b{}_CD^{\alpha}_{0t}u^{(k)}_{xx}(x,t) + cu^{(k)}(x,t) + g(t)f^{(k)}(x), \tag{1}$$

where $x \in B_k$, $0 < \alpha < 1$, $0 < t < T$, $k = (1,2,3)$ and ${}_CD^{\alpha}_{0t}$ is Caputo time-fractional derivative operator, a,b and c are known constants.

Problem. To find couple functions $\{u^{(k)}(x,t), g(t)\}$, $(k = 1,2,3.)$ in the domain $B_k \times (0,T)$, satisfying the equation (1) at $0 < \alpha < 1$ and the following conditions:

$$u^{(k)}(x,0) = Mu^{(k)}(x,T),\ x \in B_k,\ (k = 1,2,3) \tag{2}$$

non-local conditions,

$$u_x(L_k,t) = 0,\ t \in [0,T],\ (k = 1,2,3) \tag{3}$$

boundary conditions,

$$u^{(1)}(0,t) = u^{(2)}(0,t) = u^{(3)}(0,t),\ t \in [0,T] \tag{4}$$

$$u^{(1)}_x(0,t) + u^{(2)}_x(0,t) + u^{(3)}_x(0,t) = 0,\ t \in [0,T] \tag{5}$$

vertex conditions and

$$\sum_{k=1}^{3} \int_0^{L_k} u^{(k)}(x,t)dx = \Phi(t),\ t \in [0,T], \tag{6}$$

over-specified condition of integral type.

Where $\Phi(t)$ is sufficiently smooth given functions, $M \in \mathbb{R}$.

The uniqueness of the solution of the problem is established using (1)-(6), based on the completeness of the eigenfunctions(see,[3]).The existence of the solution of the problem is demonstrated by applying the method of separation of variables.The solution is found in the form of a Fourier series.

References

1. **M.Ali, S.Aziz, S.A.Malik** *Inverse problem for a space time fractional diffusion equation:application of fractional Sturm-Liouville operator.* Math Methods Appl.Sci.2018;41:2733-2744.

2. **Sobirov Z.A** *Inverse source problems for pseudo-subdiffusion equation with the Hilfer fractional derivative on a metric graph.* Bulletin of the Institute of Mathematics, 2024, Vol.7, No2, pp. 14-24

3. **R.Ashurov, Yu.Fayziyev** *On the Nonlocal Problems in Time for Time-Fractional Subdiffusoin Equations.*Fractal and Fractional ,2022 ,Vol.6,pp.41.

UDC 621.452

GAME-THEORETIC MODEL OF A ROTATING REGENERATIVE AIR PREHEATER FOR THERMAL POWER PLANTS

Abdulla Azamov [1], Mansur Bekimov [2].
[1]V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan; abdulla.azamov@gmail.com
[2]V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan; twms2020@gmail.com

This work considers a game-theoretic control problem for the heat exchange process in a rotating regenerative air preheater (RAPH) used in thermal power plants [1]. The active player is represented by the operator who controls the air preheaters that supply heated air into the boiler. The opponent is modeled as unpredictable fluctuations in the temperature of the flue gases passing through the RAPH.

The objective of the active player is to minimize energy consumption while ensuring that the temperature of the RAPH matrix remains above the dew point temperature.

The system of equations describing the heat exchange process without the influence of air preheater control is presented in [2]. The mathematical model is formulated as a discrete-time dynamic game with phase constraints.

An optimal control synthesis for the active player is constructed using the method of dynamic programming [3].

References

1. **Kirsanov Y.A.** *Cyclic Thermal Processes and the Theory of Heat Conduction in Regenerative Air Preheaters,* Moscow, 2007.
2. **Azamov A. A., Bekimov M. A.** *A discrete model of the heat exchange process in rotating regenerative air preheaters.* Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 2017. Vol. 23. P. 12вЂ“19.
3. **Boltyansky V.G.** *Optimal Control of Discrete Systems* Nauka, Moscow, 1973.

UDC 517.938

ON THE ANALYTIC SYSTEM WHOSE LIMIT SET IS AN UNBOUNDED CYLINDER

Azamov A. A.[1], Ruzimuradova D. Kh.[2]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; abdulla.azamov@gmail.com
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; drozimuradova@gmail.com

The limit set of a dynamical system is a fundamental characteristic of the topological structure of its phase portrait [1, 2]. A central problem in this context is the classification of possible topological types of limit sets. While this problem has been extensively investigated for planar systems [3], the structure of limit sets in higher dimensions remains largely unresolved. We are interested in the following question: what kind of manifolds may serve as a limit set for trajectories of a dynamical system in $\mathbb{R}^3$? It is known that the "irrational rotations" of the torus are minimal, i.e. all the trajectories are everywhere dense, so that the torus turns out to be the limit set. Obviously, this vector field can be continued to the smooth dynamical system in $\mathbb{R}^3$.

If there existed a vector field on the cylinder with an everywhere dense trajectory, then its limit set would coincide with the cylinder. However, according to [4], the cylinder cannot serve as a limit set of a vector field defined on the cylinder itself, since it can be embedded in the Klein bottle. This naturally raises the question: which two-dimensional manifolds in $\mathbb{R}^3$ can serve as the Ω-limit set of a vector field in $\mathbb{R}^3$? In this paper, we construct an example of a smooth dynamical system in the space $\mathbb{R}^3$ whose ω-limit set is an infinite cylinder.

To begin, let us consider the following vector field in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = 0.1x + 10y + 0.1x^2,\ \dot{y} = 0.1x(y - 10). \tag{1}$$

Let $\xi(t)$ be a trajectory of the system (1) passing through the initial point $\xi_0 = (1, 0)$. Then its ω-limit set Ω will be the straight $y = 10$.

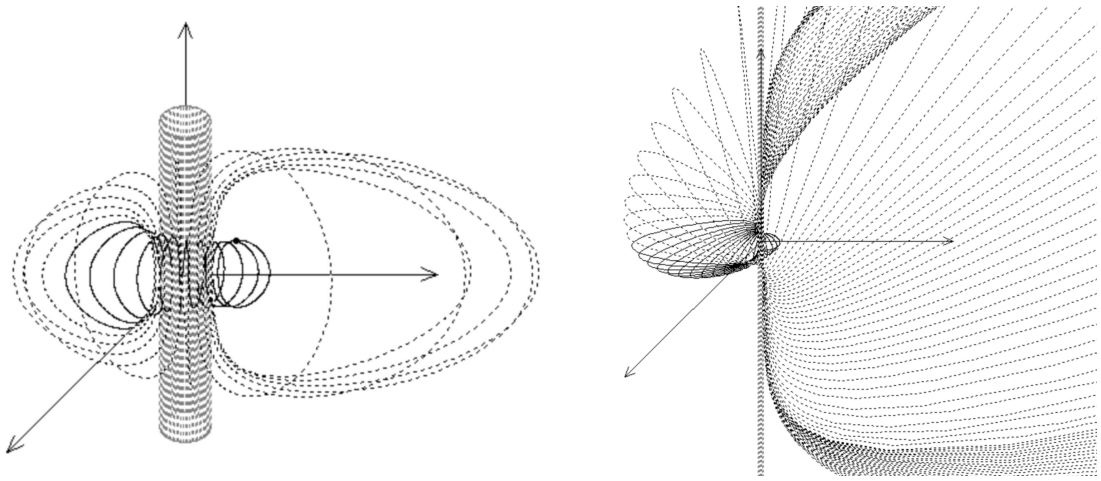
Next, we perform the linear transformation $x = \bar{y}$, $y = 20 - \bar{x}$ to bring the system (1) into the form:

$$\dot{\bar{x}} = 0.1\bar{y}(\bar{x} - 10),\ \dot{\bar{y}} = 0.1\bar{y} - 10\bar{x} + 0.1\bar{y}^2 + 200. \tag{2}$$

Thus, the straight $x = 10$ serves as the limit set Ω of the system (2). Finally, we construct a three-dimensional dynamical system in cylindrical coordinates (z, r, φ) for which $r = 10$ will be the limit set. We set $\bar{x} = r, \bar{y} = z$ and add an equation for the angle φ to the system (2):

$$\dot{z} = 0.1z - 10r + 0.1z^2 + 200,\ \dot{r} = 0.1z(r - 10),\ \dot{\varphi} = 0.1 - \frac{10}{r^2}. \tag{3}$$

The following figures illustrate how the trajectory approaches the cylinder.



Literature

1. **Azamov A.A., Ruzimuradova D.Kh.** *On Unbounded Limit Sets of Dynamical Systems.* Stability, Control, Differential Games. Springer. Cham, 2020. 1-11 p.

2. **Buendía J.E., Lopez V.J.** *A topological characterization of the ω-limit sets of analytic vector fields on open subsets of the sphere.* arXiv:1711.00567V2, 2017.

3. **Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G.** *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems.* New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, Halsted Press (A division of John Wiley & Sons) and Israel Program for Scientific Translations, 1973.

4. **López V.J., López G.S.** *Transitive flows on manifolds.* Revista Matemáica Iberoamericana., 2004. 107-130 p.

Solvability of a pseudoparabolic equation with a fractional Caputo derivative

Bekenayeva K. S.[1], Aitzhanov S. E.[2]
[1]Abai Kazakh National pedagogical university, Kazakhstan;
kymbat.bekenayeva@mail.ru
[2] al-Farabi Kazakh National university, Kazakhstan; aitzhanovserik81@gmail.com

The work is devoted to study of solvability issues of boundary value problems for quasilinear pseudoparabolic equation with Caputo fractional derivative.
In Cilinder $Q_T = \{(x,t):\ x \in \Omega,\ \Omega \subset R^n,\ 0 < t < T\}$ consider quasilinear pseudoparabolic equation

$$D^{\alpha}_{0,t}(u - \chi\Delta u) - a\Delta u + c(x,t)u = b(x,t)|u|^{p-1} + |\nabla u|^q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Here $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$ is bounded domain, boundary $\partial\Omega \in C^{2,\delta},\ \delta \in (0,1)$ is smooth enough, χ, a, p and q are positive constants, $D^{\alpha}_{0,t}$ is fractional Caputo derivative of order $0 < \alpha \leq 1$:

$$D^{\alpha}_{0,t}u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_s(x,s)}{(t-s)^{\alpha}}ds,$$

where $\Gamma(z)$ is Euler's Gamma function.
Suppose that functions $u_0(x),\ c(x,t),\ b(x,t)$ satisfy conditions:

$$\begin{gathered} 0 < c'_0 \leq c(x,t) \leq c'_1,\ \forall (x,t) \in Q_T, \\ 0 < |b(x,t)| \leq b_1,\ \ \forall (x,t) \in Q_T, \\ u_0 \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega). \end{gathered} \tag{4}$$

In the given problem for constants p and q different cases have been considered:

$$I.\ 0 < q \leq 1,\ 2 < p < \frac{2N}{N-2},\ N \geq 3.$$

$$II.\ 1 \leq q \leq 1 + \frac{2}{N},\ 2 < p < \frac{2N}{N-2},\ N \geq 3.$$

$$III.\ 0 < q \leq 1,\ 1 < p \leq 2,\ N \geq 3.$$

$$IV.\ 1 \leq q \leq 1 + \frac{2}{N},\ 1 < p \leq 2,\ N \geq 3.$$

Definition. Weak solution to the problem (1)-(3) is a function $u(x,t)$ from the space $V^{\alpha}(Q_T),\ 0 < \alpha < 1$ which satisfies integral identity

$$\begin{gathered} \int_\Omega \left(D^{\alpha}_{0,t}u \cdot \omega + \chi \sum_{i=1}^{N} D^{\alpha}_{0,t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + a\nabla u \nabla \omega + c(x,t)u\omega \right) dx = \\ = \int_\Omega b(x,t)|u|^{p-1}\omega dx + \int_\Omega |\nabla u|^q \omega dx, \end{gathered}$$

almost everywhere in $t \in [0,T]$ for all $\omega(x,t) \in L_2(0,\ T;\ \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Taking into account the above cases, when the condition (4) is true, the following results are obtained for the problem (1)-(3) [1-2]:
- weak solvability of the problem is proved for the cases I-II;
- uniqueness of the weak solution is obtained for the case II on the interval (0,T);
- the blowing up of the solution is provided for $p > 2$ on finite time;
- for the cases III-IV and for $1 < p \leq 2$ weak solvability is studied;
- solution behavior on time $t \to \infty$ is investigates.

The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan AP14872379.

References

1. **Aitzhanov S., Berdyshev A., Bekenayeva K.** *Solvability Issues of a Pseudo-Parabolic Fractional Order Equation with a Nonlinear Boundary Condition* // Fractal Fract. вЂ“ 2021. Vol 5, no. 4, 134.
2. **Aitzhanov S., Kusherbayeva U.R., Bekenayeva K.** *Solvability of pseudoparabolic equation with Caputo fractional derivative* // // Chaos, Solitons and Fractals вЂ“ 2022, Vol 160, 112193.

UDC 517.956

Solvability of Nonlocal Boundary Value Problem for a Loaded Pseudoparabolic Equation

Bekenayeva K.S.[1], Aubakir Zh., Miyatkul B.[1]
[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
k.bekenayeva@abaiuniversity.edu.kz, zhuldyzay.aubakir@mail.ru,
balnurmiatkul@gmail.com

The study of boundary value problems for partial differential equations with fractional derivatives has attracted considerable attention in recent decades due to their wide applications in physics, engineering, and mathematical modeling of anomalous diffusion processes. Fractional derivatives, particularly in the sense of Caputo, provide a more accurate description of memory and hereditary properties of various materials and processes compared to classical integer-order models.

In this work, we focus on the solvability of boundary value problems for a quasilinear pseudoparabolic equation involving the Caputo fractional derivative. Pseudoparabolic equations are known to describe a wide range of processes, including fluid filtration in fissured media, heat and mass transfer in heterogeneous environments, and certain models of nonlinear elasticity. The incorporation of fractional time derivatives enriches the mathematical structure of such equations and poses new challenges in the analysis of existence, uniqueness, and regularity of solutions.

We consider the problem in a bounded domain with smooth boundary conditions and analyze various cases depending on the parameters p and q. The weak formulation of the problem is introduced, and sufficient conditions for the existence of a weak solution are obtained. The results are based on modern methods of functional analysis, embedding theorems, and a priori estimates.

In Cylinder $Q_T = \{(x,t):\ x \in \Omega,\ \Omega \subset R^n,\ 0 < t < T\}$ consider quasilinear pseudoparabolic equation

$$D_{0,t}^{\alpha}(u - \chi\Delta u) - a\Delta u + c(x,t)u = b(x,t)|u|^{p-1} + |\nabla u|^q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Here $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$ is bounded domain, boundary $\partial\Omega \in C^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1)$ is smooth enough, χ, a, p and q are positive constants, $D^{\alpha}_{0,t}$ is fractional Caputo derivative of order $0 < \alpha \leq 1$:

$$D^{\alpha}_{0,t}u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u_s(x,s)}{(t-s)^{\alpha}} ds,$$

where $\Gamma(z)$ is Euler's Gamma function.
Suppose that functions $u_0(x)$, $c(x,t)$, $b(x,t)$ satisfy conditions:

$$\begin{gathered} 0 < c'_0 \leq c(x,t) \leq c'_1, \ \forall (x,t) \in Q_T, \\ 0 < |b(x,t)| \leq b_1, \ \forall (x,t) \in Q_T, \\ u_0 \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega). \end{gathered} \tag{4}$$

In the given problem for constants p and q different cases have been considered:

$$I.\ 0 < q \leq 1, \ 2 < p < \frac{2N}{N-2}, \ N \geq 3.$$

$$II.\ 1 \leq q \leq 1 + \frac{2}{N}, \ 2 < p < \frac{2N}{N-2}, \ N \geq 3.$$

$$III.\ 0 < q \leq 1, \ 1 < p \leq 2, \ N \geq 3.$$

$$IV.\ 1 \leq q \leq 1 + \frac{2}{N}, \ 1 < p \leq 2, \ N \geq 3.$$

Definition. Weak solution to the problem (1)-(3) is a function $u(x,t)$ from the space $V^{\alpha}(Q_T)$, $0 < \alpha < 1$ which satisfies integral identity

$$\begin{gathered} \int_{\Omega} \left(D^{\alpha}_{0,t}u \cdot \omega + \chi \sum_{i=1}^{N} D^{\alpha}_{0,t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + a \nabla u \nabla \omega + c(x,t) u \omega \right) dx = \\ = \int_{\Omega} b(x,t) |u|^{p-1} \omega dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^q \omega dx, \end{gathered}$$

almost everywhere in $t \in [0,T]$ for all $\omega(x,t) \in L_2(0,\, T;\, \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega))$.
Taking into account the above cases, when the condition (4) is true, the following results are obtained for the problem (1)-(3) [1-2]:
– weak solvability of the problem is proved for the cases I-II;
– uniqueness of the weak solution is obtained for the case II on the interval (0,T);
– the blowing up of the solution is provided for $p > 2$ on finite time;
– for the cases III-IV and for $1 < p \leq 2$ weak solvability is studied;
– solution behavior on time $t \to \infty$ is investigates.

Literature

1. **Aitzhanov S., Berdyshev A., Bekenayeva K.** *Solvability Issues of a Pseudo-Parabolic Fractional Order Equation with a Nonlinear Boundary Condition.* Fractal and Fractional. вЂ“ 2021. -Vol 5, No. 4, -134 p.

2. **Aitzhanov S., Kusherbayeva U.R., Bekenayeva K.** *Solvability of pseudoparabolic equation with Caputo fractional derivative.* Chaos, Solitons and Fractals. вЂ“ 2022, -Vol 160, 112193.

SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI ELLIPTIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN XOPF PRINSIPI.

Bo‘tayorova S. N.,
Termiz iqtisodiyot va servis universiteti, Termiz, O‘zbekiston;

$z = x + iy$ kompleks tekisligining yuqori $\operatorname{Im} z > 0$ yarim tekisligida

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)\ u_y = 0 \tag{1}$$

tenglamani o‘rganamiz, bu yerda m , β_0 o‘zgarmas sonlar bo‘lib, $m > 0$, $-(m/2) < \beta_0 < 1$ shartlarni qanoatlantiradi.

Ekstremum prinsipi Ω sohada (2.1) tenglamaning $u(x, y)$ regulyar yechimi hech bir $(x, y) \in \Omega$ nuqtada o‘zining musbat maksimumiga va manfiy minimumiga erishmaydi[1],[2],[3].

Isboti. Ushbu

$$\upsilon(x, y) = u(x, y)/A\,(y) \tag{2}$$

funksiyani qaraymiz, bu yerda

$$A(y) = e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon\, e^{y^{1-\beta_0}},$$

$d-$ bu Ω soha diametri, $0 < \varepsilon < 1$. Bevosita hisoblashlar yordamida

$$E(u) = A(y)E_1(\upsilon)$$

tenglikni to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, bu yerda

$$E_1(\upsilon) = y^m \upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} + \frac{1}{y}\,(\beta_0 + 2yA_y)\,\upsilon_y + \frac{1}{A}\left(\frac{\beta_0}{y}A_y + A_{yy}\right)\upsilon\,, \tag{3}$$

$$A_y = -\varepsilon\,(1-\beta_0)\,e^{y^{1-\beta_0}} y^{-\beta_0}\ ,$$

$$A_{yy} = -\varepsilon(1-\beta_0)^2 e^{y^{1-\beta_0}} y^{-2\beta_0}\ + \varepsilon\beta_0\,(1-\beta_0)\,e^{y^{1-\beta_0}} y^{-\beta_0-1}\ ,$$

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\beta_0}{y}A_y + A_{yy}\right) = -\frac{\varepsilon}{A}(1-\beta_0)^2 e^{y^{1-\beta_0}} y^{-2\beta_0} < 0 \tag{4}$$

(4) tengsizlikka asosan, (3) tenglama yechimi $\vartheta(x, y)$ Ω soha ichidagi hech bir (x_0, y_0) nuqtada o‘zining musbat maksimumiga erishmaydi. Haqiqatdan ham, teskarisini faraz qilaylik, (x_0, y_0) nuqtada $\vartheta(x, y)$ funksiya o‘zining musbat maksimumiga erishsin, u holda bu nuqtada

$$\frac{\partial\vartheta\,(x_0, y_0)}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial\vartheta\,(x_0, y_0)}{\partial y} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2\vartheta(x_0, y_0)}{\partial x^2} \le 0,\ \ \frac{\partial^2\vartheta(x_0, y_0)}{\partial y^2} \le 0$$

bo‘lgani uchun, (2) dan $E_1(\vartheta) < 0$. Bu esa $E_1(\vartheta) = 0$ tenglikka ziddir. Aynan shu mulohazalarni takrorlab, $\vartheta(x, y)$ funksiya Ω sohaning hech bir ichki nuqtasida o‘zining manfiy minimumga erishmasligini ko‘rsatish mumkin. Shunday qilib, (2) ga asosan, (1) tenglamaning

regulyar yechimi $u(x,y)$ o‘zining musbat maksimumi va manfiy minimumini Ω sohaning ichki nuqtalarida qabul qilmaydi.

Ushbu prinsip aralash turdagi tenglamalar uchun Trikomi, Gellerstedt va siljishli shartli chegaraviy masalalar yechimining yagonaligini isbotlashda keng qo‘llaniladi[4],[5].

Литература

1. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005 "Университет" -224 с.
2. **Mirsaburov M.** *Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun Trikomi masalasi* Termiz. 2022 "Surxon-nashr". 239 c.
3. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М. 1985. 304 с.
4. **Мирсабуров М.** *Задача с аналогом условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* // Дифференциальные уравнения. 2017, том 53 №6, С.778-788.
5. **Мирсабурова У.М.** *Задача с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения смешанного типа.* // Дифференциальные уравнения. 2021, том 57 №6, С.735-751.

KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL OPERATORLAR UCHUN EKSTREMUM PRINSIPI.

Esanova D. X.,
Termiz iqtisodiyot va servis universiteti, Termiz, O‘zbekiston;

$f(x)$-funksiya $L(a,b)$, $a<b<\infty$ sinfga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy funksiya bo‘lsin. Ushbu

$$D^{\ell}_{a,x}f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(-\ell)}\int\limits_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+\ell}}, & agar\ \ \ell<0,\\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^{\ell-(n+1)}_{a,x}f(x), & agar\ \ \ell>0,\end{cases}$$

$$D^{\ell}_{x,b}f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(-\ell)}\int\limits_x^b\frac{f(t)}{(t-x)^{1+\ell}}dt, & agar\ \ \ell<0,\\ (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^{\ell-(n+1)}_{x,b}f(x), & agar\ \ \ell>0,\end{cases}$$

belgilashlarni kiritamiz, bu yerda $D^{\ell}_{a,x}$ va $D^{\ell}_{x,b}$ ifodalar agar $\ell<0$ bo‘lsa, kasr tartibli integral operatorni, agar $\ell>0$ bo‘lsa, Liuvill ma’nosidagi umumlashgan hosilani beradi. $n=[\ell]-\ell$ sonining butun qismi[1],[2],[3].

Kasr tartibli differensial operatorlar uchun ekstremum prinsipi. Musbat, kamaymaydigan $\omega(t)$ funksiya hamda $f(t)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin. Agar $[a,b]$ kesmada $f(t)$ funksiya o‘zining musbat maksimumiga (manfiy minimumiga) $t=x$ nuqtada erishsa, $a<x<b$ va bu nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida $\omega(t)f(t)$ ko‘paytma $\gamma>\alpha$ ko‘rsatkich bilan Gyolder shartini qanoatlantirsa[1],[2], u holda

$$D^{\alpha}_{a,x}\omega(x)f(x)>0,\quad \left(D^{\alpha}_{a,x}\omega(x)f(x)<0\right). \tag{1}$$

Haqiqatdan ham,

$$(1-\alpha)D^{\alpha}_{a,x}\omega f=(1-\alpha)\frac{d}{dx}\left[D^{\alpha-1}_{a,x}\omega(x)f(x)\right]=\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{\omega(t)f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt=\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{\omega(t)f(t)-\omega(x)f(x)}{(x-t)^{a}}dt+$$

$$+\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{\omega(x)f(x)}{(x-t)^{\alpha}}dt=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega(t)f(t)-\omega(x)f(x)}{(x-t)^{a}}dt+\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega(x)f(x)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\frac{\omega(x-\varepsilon)f(x-\varepsilon)-\omega(x)f(x)}{\varepsilon^{\alpha}}-\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{(\omega(x)f(x))'_x}{(x-t)^{\alpha}}dt-\alpha\int\limits_{\alpha}^{x-\varepsilon}\frac{\omega(t)f(t)-\omega(x)f(x)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{(\omega(x)f(x))_x{}'}{(x-t)^{\alpha}}dt-\alpha\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega(x)f(x)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt+\frac{\omega(x)f(x)}{\varepsilon^{\alpha}}\right\}.$$

Bu yerda $\varepsilon\to0$ da limitga o‘tib va ushbu

$$\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega(x)f(x)dt}{(x-t)^{1+\alpha}}=\frac{\omega(x)f(x)}{\alpha\varepsilon^{\alpha}}-\frac{\omega(x)f(x)}{\alpha(x-a)^{\alpha}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\omega(x-\varepsilon)f(x-\varepsilon)-\omega(x)f(x)}{\varepsilon^{\alpha}}=0,$$

tengliklarni e’tiborga olib, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases}\Gamma(1-\alpha)D^{\alpha}_{\alpha,x}\omega(x)f(x)=\frac{\omega(x)f(x)}{(x-a)^{\alpha}}+\alpha\int\limits_a^{\delta}\frac{\omega(x)f(x)-\omega(t)f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt+\\ +\alpha\int\limits_{\delta}^{x}\frac{\omega(x)f(x)-\omega(t)f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt.\end{cases}\tag{2}$$

(2) munosabatdan (1) tengsizlik kelib chiqadi.

Kasr tartibli differensial operator uchun ekstremum prinsipi aralash turdagi tenglamalar uchun Trikomi, Gellerstedt, siljishli masalalar yechimining yagonaligini isbotlashda keng qo‘llaniladi[4],[5].

Adabiyotlar

1. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005 "Университет" -224 с.

2. **Mirsaburov M.** *Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun Trikomi masalasi* Termiz. 2022 "Surxon-nashr". 239 c.

3. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М. 1985. 304 с.

4. **Мирсабуров М.** *Задача с аналогом условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* // Дифференциальные уравнения. 2017, том 53 №6, С.778-788.

5. **Мирсабурова У.М.** *Задача с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения смешанного типа.* // Дифференциальные уравнения. 2021, том 57 №6, С.735-751.

AMS Subject Classification: 35L51, 35M30, 35M32

Solution of some non-local problem for mixed equation with second order

Gurbanov P. [1], Chashemov M. [2]
[1,2] International University for the Humanities and Development, Ashgabat, Turkmenistan,
[1]pirgurban@gmail.com, [2]chashemovmyrat@gmail.com;

Abstract It is considered hyperbolic equation

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad y < 0. \tag{1}$$

in the area which is bounded by characteristics

$$x + y = 0, \quad x - y = 1 \quad \text{and} \quad y = 0 \tag{2}$$

Theorem 1. The hyperbolic equation (1) with characteristics (2) can be solved with non-local boundary conditions

$$\begin{cases} u(x;0) = \tau(x) \\ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u\left(\frac{x+2i}{2n}; -\frac{x+2i}{2n}\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} u\left(\frac{-x+2n-2i-1}{2n}; -\frac{x+2i+1}{2n}\right) = \phi(x) \end{cases} \tag{3}$$

where $\tau(x)$, $\phi(x)$ are twice differentiable functions, $\lfloor x \rfloor$ is greatest integer number that not exceed real number x.

Keywords: Elliptic-Hyperbolic, Parabolic-Hyperbolic, non-local problems for mixed equation, micro-periodic functional equations.

Introduction

Consider the hyperbolic equation (1).

Our main aim is to find regular solution of problem (1) with characteristics (2) and non-local boundary conditions (3) in explicit formula.

On this work we consider special cases of work [4] where shown the existence of solution to problem (1) but explicit solution are not shown.

To obtain the results we use several substitutions and methods which can be used to find the solutions of functional equation (see, for example, [4], [5], [1], [2], [3]).

Generalization for mixed equations with second order Let us consider two following cases:

Case Lavrentiev-Bitsadze

Let's consider the Lavrentiev-Bitsadze equation

$$u_{xx} + sign(y)u_{yy} = 0, \tag{4}$$

in the area which is bounded by characteristics

$$x + y = 0, \quad x - y = 1 \quad \text{and} \quad \text{half-strip } \sigma(x;y) \tag{5}$$

Theorem 2. The Lavrentiev-Bitsadze equation (4) with characteristics (5) can be solved with non-local boundary conditions

$$\begin{cases} u(x;y)|\sigma = \psi(s) \\ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u\left(\frac{x+2i}{2n}; -\frac{x+2i}{2n}\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} u\left(\frac{-x+2n-2i-1}{2n}; -\frac{x+2i+1}{2n}\right) = \phi(x) \end{cases} \tag{6}$$

where $\psi(s)$ is continuous function on half-strip $\sigma(x;y)$ and $\phi(x)$ is twice differentiable function, $\lfloor x \rfloor$ is greatest integer number that not exceed real number x.

Proof of theorem 2. The proof of the theorem can be straightly derived from the combination of *Theorem 1* and [2]

Case Hyperbolic-Parabolic

Let's consider the Hyperbolic-Parabolic equation

$$\begin{cases} u_{xx} + u_y = 0, & y > 0 \\ u_{xx} - uyy = 0 & y < 0 \end{cases} \tag{7}$$

in the area which is bounded by characteristics

$$x = 0, x = 1, y = x - 1, \text{and}, \quad x + y = 0 \tag{8}$$

Theorem 3. The Hyperbolic-Parabolic equation (7) with characteristics (8) can be solved with non-local boundary conditions

$$\begin{cases} u(0;y) = \phi_1(x), \quad u(1;y) = \phi_2(x) \\ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u\left(\frac{x+2i}{2n}; -\frac{x+2i}{2n}\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} u\left(\frac{-x+2n-2i-1}{2n}; -\frac{x+2i+1}{2n}\right) = \phi(x) \end{cases} \tag{9}$$

where $\phi_1(x), \phi_2(x)$ is continuous functions on $[0;1]$ and $\phi(x)$ is twice differentiable function, $\lfloor x \rfloor$ is greatest integer number that not exceed real number x.

Proof of theorem 3. The proof of the theorem can be straightly derived from the combination of *Theorem 1* and [3].

References:

1. Gurbanov P, Some non-local problem for mixed equation with second order. Conference Functional Differential Equations and Applications, Ariel University, Israel, 2019

2. Soltanov H.,Gurbanov P, Solution of some non-local problems of vibrating string equation *Scientific-theoretical journal of the Academy of Sciences of Turkmenistan*, Ylym, 2022, 74 p.

3.Soltanov H.,Gurbanov P, Solution of some nonlocal problems of Parabola-hyperbolic equation *Science and Technology of Youth*, Ylym, 2021, 62 p.

4. G.,Karatoprakliev, On some boundary problems for equation $u_{xx} - u_{yy} = 0$, Thesis of Academy of Science SSSR, -1963.-T 149. ,Vol 6,1253-1256 p.

5. Aczel J.,, Lectures on functional equations and their applications, *Academic Press inc.* 1966, New-York.

UDC 517.957

ON FINDING THE CAUCHY EQUATION FOR THE LOADED, EXTENDED, MODIFIED FIFTH-ORDER KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

Hoitmetov U. A. [1], Sobirov Sh. K. [2], Ruzmetova G. U.[3].
[1,2,3] Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan;
[1] x_umid@mail.ru, [2]shexzod1994@mail.ru

This study examines the fifth-order the loaded extended loaded mKdV equation. Specifically, the following equation is analyzed:

$$\mathfrak{u}_t + 6\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}_x + \mathfrak{u}_{xxx} + P\left(\mathfrak{u}(x_0,t)\right)\left(30\mathfrak{u}^4\mathfrak{u}_x + 10\mathfrak{u}_x^3 + 40\mathfrak{u}\mathfrak{u}_x\mathfrak{u}_{xx} + 10\mathfrak{u}^2\mathfrak{u}_{xxx} + \mathfrak{u}_{xxxxx}\right) + \tag{1}$$

$$+Q\left(\mathfrak{u}(x_1,t)\right)\mathfrak{u}_x = 0$$

where $P(u(x_0,t))$ and $Q(u(x_1,t))$ are polynomials depending on $u(x_0,t)$ and $u(x_1,t)$. x_0, $x_1 \in R$.

Equation (1) is investigated under the initial condition

$$\mathfrak{u}(x,0) = \mathfrak{u}_0(x) \tag{2}$$

where the function $\mathfrak{u}_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ satisfies the following criteria:

$$|\mathfrak{u}_0(x)|\, e^{2\varepsilon|x|} \le \frac{\sigma}{(1+|x|)^{1+\zeta}}, \tag{3}$$

for positive constants $\varepsilon > 0$, $\zeta > 0$, and $\sigma > 0$.

2. The Dirac-type operator

$$\mathcal{L}(0) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -\mathfrak{u}_0(x) \\ -\mathfrak{u}_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

possesses exactly N simple eigenvalues $\varrho_1(0), \varrho_2(0), \ldots, \varrho_N(0)$ in the upper half-plane and lacks spectral singularities. The solution $\mathfrak{u}(x,t)$ is assumed to exhibit sufficient smoothness and sufficiently rapid decay as $x \to \pm\infty$, quantified by the condition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\varepsilon|x|}\left(\sum_{k=0}^{5}\left|\frac{\partial^k \mathfrak{u}(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx < \infty. \tag{4}$$

The central aim of this work is to derive explicit representations for the solution of the problem (1)-(4) using the inverse scattering transform (IST) framework applied to the time-dependent Dirac operator

$$\mathcal{L}(t) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -\mathfrak{u}(x,t) \\ -\mathfrak{u}(x,t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}.$$

Thus, we have proved the following theorem.

Theorem. If the functions $\mathfrak{u}(x,t)$ are a solution to the problem (1)-(4), then the scattering data of the operator $\mathcal{L}(t)$ with the potential $\mathfrak{u}(x,t)$ vary with t as follows:

$$\frac{d\varrho_n}{dt} = 0, n = \overline{1,N};$$

$$\frac{d\mathfrak{r}^+(\varrho,t)}{dt} = \left(-32i\varrho^5 P(u(x_0,t)) + 8i\varrho^3 - 2i\varrho Q(u(x_1,t))\right)\mathfrak{r}^+(\varrho,t), \quad \operatorname{Im}\varrho = 0;$$

$$\frac{d\mathfrak{C}_n}{dt} = \left(-32i\varrho_n^5 P(u(x_0,t)) + 8i\varrho_n^3 - 2i\varrho_n Q(u(x_1,t))\right)\mathfrak{C}_n(t).$$

Algorithm

Let the function be given, satisfying the condition (3). Then the solution to the problem (1)-(4) is found using the following algorithm.
Solve the direct scattering problem with initial function , obtaining scattering data

$$\left\{\mathfrak{r}^+(\varrho,0),\ \varrho\in\mathbb{R};\quad \varrho_k(0),\ \mathrm{Im}\varrho_k>0;\quad \mathfrak{C}_k(0),\quad k=\overline{1,N}\right\}$$

for the operator $\mathcal{L}(0)$.
вЂў Determine the time-evolved scattering data for $t>0$, using Theorem:

$$\left\{\mathfrak{r}^+(\varrho,t),\ \varrho\in\mathbb{R};\quad \varrho_k(t),\ \mathrm{Im}\varrho_k(t)>0;\quad \mathfrak{C}_k(t),\ k=\overline{1,N}\right\}.$$

вЂў Solve the inverse scattering problem using the Gelfand-Levitan-Marchenko integral equation method. Namely, restore the unique solution $\mathfrak{u}(x,t)$ from the scattering data obtained in the previous step for $t>0$.

Literature

1. **Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C.** *Solitons and Nonlinear Wave Equations,* Academic Press, London 1982.
2. **Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.** *Method for solving the Korteweg-de Vries equation.* Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095-1097.
3. **Sobirov S.K., Hoitmetov U.A.** *Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with time-dependent coefficients and with a self-consistent source* Sib. Math. J., 2024, Vol. 65, No. 4, pp. 971-986.
4. **Wazwaz A.M.** *Two new integrable modified KdV equations, of third-and fifth-order, with variable coefficients: Multiple real and multiple complex soliton solutions.* Waves in Random and Complex Media. 2021. Vol. 31. P. 867-878.

EVASION DIFFERENTIAL GAME EVASION IN A DIFFERENTIAL GAME WITH INTEGRAL CONSTRAINTS AGAINST MULTIPLE PURSUERS

Inomiddinov S . N .[1], Ibroximjonov I . I . [2], Ibragimov G . I .[3]

Namangan State University, 160107, Namangan, Uzbekistan;
sn.inomiddinov@gmail.com
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Toshkent, Uzbekistan;
islombekibrokhimjonov03@gmail.com
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan;
ibragimov.math@gmail.com

This work is devoted to the study of an evasion game of one evader from many pursuers when the controls of pursuers and evader are subject to integral constraints. The control resources of the players change linearly depending on time. The game is considered in space $\mathbb{R}^n$. We construct

a strategy for the evader which guarantees the possibility of evasion. It is enough to consider the game in $\mathbb{R}^2$, the case when $\mathbb{R}^n$ is analogous. Let the dynamics of pursuers x_i and evader y be given by the following equations

$$\begin{aligned} \dot{x_i} &= u_i,\ x_i(0) = x_{i0},\ i = 1, 2, ..., M, \\ \dot{y} &= v,\ y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x_i, x_{i0}, u_i, y, y_0, v \in \mathbb{R}^2,\ x_{i0} \neq y_0,\ u_i$ and v are control parameters of the pursuers and evader, respectively.

Definition 1. The measurable functions $u_i(t)$ and $v(t)$, $t \geq 0$, that satisfy the following integral constraints

$$\int_0^t |u_i(s)|^2 ds \leq \rho_i^2 t,\ i = 1, ..., M;\ \int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \sigma^2 t.$$

are called controls of the ith pursuer and evader, respectively.

Definition 2. A function $(t, x_1, ..., x_M, y, u_1, ..., u_M) \to V(t, x_1, ..., x_M, y, u_1, ..., u_M)$, $V : [0; +\infty) \times \mathbb{R}^{4M+2} \to \mathbb{R}^2$, is called a strategy of the evader if the initial value problem (1) has a unique solution $(x_1(t), ..., x_M(t), y(t))$ with $v = V(t, x_1, ..., x_M(t), y, u_1, ..., u_M(t))$ and arbitrary admissible controls $u = u_1(t), ..., u_M(t)$ of the pursuers.

The behavior of the pursuers are arbitrary, which means that the pursuers apply any admissible controls, while the evader applies a strategy.

Definition 3. We say that evasion is possible in game (1) if there exists a strategy V of the evader such that, for any controls of pursuer, $x_i(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$, $i = 1, 2, ..., M$.

Let

$$\mathcal{J}_k = \bigcup_{j=k}^{m_0} [\tau_j, \tau_j'], \quad \mathcal{J}_{m_0+1} \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, ..., m_0.$$

where m_0 is a positive integer.

We define the function
$r : [0, T] \to \{0, 1, 2, \ldots, m_0\}$
by the following equation

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T] \setminus \mathcal{J}_1, \\ k, & t \in \left[\tau_k, \tau_k'\right) \setminus \mathcal{J}_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m_0, \end{cases}$$

for $m_0 > 1, \quad k = 1, 2, \ldots, (m_0 - 1)$.

This function has the following properties:

1) $r(t) = k, \quad \tau_k \leq t < \tau_k', \quad$ if $\tau_k \leq \tau_{k+1}'$.

2) $r(t) = k, \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \quad$ if $\tau_{k+1} < \tau_k'$.

We construct a strategy for the evader. Let $u_i(t), \quad i = 1, \ldots, M$, be arbitrary admissible controls of pursuers:

$$T = T_0 + \frac{2a_1}{\alpha},$$

where $T_0 = \frac{1}{\alpha}\max_{1\le i\le M}\left|y_2^0 - x_{i,2}^0\right|$

$$v(t) = V_0(t) = (0, \alpha + U(t)), \quad t \in [0,T] \setminus \mathcal{J}_1,$$
$$v(t) = V_r(t) = (V_{r1}(t), \alpha + U(t)), \quad t \in [0,T] \cap \mathcal{J}_1,$$
$$v(t) = (0, U(t)), \quad t > T,$$

where

$$r = r(t), \quad V_k(t) = (V_{k1}(t), \alpha + U(t)), \quad \tau_k < t < \tau_k', \quad k \in I = \{1,2,\dots,m\},$$

$$V_{k1}(t) = \begin{cases} \alpha + |u_{k1}(t)|, & y_1(\tau_k) \ge x_k(\tau_k) \\ -(\alpha + |u_{k1}(t)|), & y_1(\tau_k) < x_{k_1}(\tau_k) \end{cases}, \quad U(t) = \left(\sum_{i=1}^{M} u_{i2}^2(t)\right)^{1/2}.$$

Theorem. If

$$\rho_1^2 + ... + \rho_M^2 \le \sigma^2,$$

then evasion is possible in game (1).

LITERATURE

1.Ibragimov G.I., Ferrara M., Ruziboev M., Pansera B.A. Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints. International Journal of Game Theory. 2021. https://doi.org/10.1007/s00182-021-00760-6.
2. Ibragimov G.I., Salleh Y, Alias I.A., Pansera B.A., Ferrara M. Evasion from Several Pursuers in the Game with Coordinate-wise Integral Constraints. Dynamic Games and Applications. 2022. https://doi.org/10.1007/s13235-022-00475-7.
3. Ibragimov G.I. Evasion Differential Game of One Evader and Many Slow Pursuers. Dynamic Games and Applications. 2024, 665-685. https://doi.org/10.1007/s13235-023-00501-2.

UDC 517.957

Integration of the Hirota-type equation with a finite density and integral self–consistent source

Khasanov A. B.[1], Eshbekov R. Kh.[1], Farkhodova G. S.[2]
[1,2,3]Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
[1]ahasanov2002@mail.ru [2]rayxonbek@mail.ru [3]farxodovagulnoza01@gmail.com

In this work, the Cauchy problem is proposed for the Hirota-type equation with a finite density and integral self-consistent source in the class of periodic infinite-gap functions.

We consider the following Initial Value Problem(IVP) for the Hirota-type equation with a finite density and integral self-consistent source:

$$\begin{cases} p_t = p_{xxx} + 6p_x\left(\rho^2 - \left\{p^2+q^2\right\}\right) - q_{xx} - 2q\left(\rho^2 - \left\{p^2+q^2\right\}\right) - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(\mu,t) v_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-\right) d\mu, \\ q_t = q_{xxx} + 6q_x\left(\rho^2 - \left\{p^2+q^2\right\}\right) + p_{xx} + 2p\left(\rho^2 - \left\{p^2+q^2\right\}\right) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(\mu,t) v_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-\right) d\mu, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} p(x,t)|_{t=0} = p_0(x),\ p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \\ q(x,t)|_{t=0} = q_0(x),\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2}$$

in the class of real infinite-gap π periodic functions in x :

$$\begin{cases} p(x+\pi,t) = p(x,t),\ q(x+\pi,t) = q(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ p(x,t), q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \end{cases} \tag{3}$$

Here $\zeta(\mu,t)$ is a given real continuous function with uniform asymptotes

$$\zeta(\mu,t) = O\left(\frac{1}{1+\mu^3}\right),\ \mu \to \pm\infty.$$

In addition, the function $\psi^{\pm}(x,\mu,t) = \left(\psi_1^{\pm}(x,\mu,t), \psi_2^{\pm}(x,\mu,t)\right)^T$ are Floquet solution, normalized by the condition $\psi_1^{+}(0,\mu,t)$, of the following Dirac equation

$$\mathcal{L}(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{4}$$

and defined as follows:

$$\psi(x,\mu,t) = u(x,\mu,t) + \frac{v_2(\pi,\mu,t) - u_1(\pi,\mu,t) \mp \sqrt{\Delta^2(\mu) - 4}}{2v_1(\pi,\mu,t)} \cdot v(x,\mu,t),$$

where $u(x,\mu,t) = (u_1(x,\mu,t), u_2(x,\mu,t))^T$ and $v(x,\mu,t) = (v_1(x,\mu,t), v_2(x,\mu,t))^T$ are solutions of equation (4) with initial conditions $u(0,\mu,t) = (1,0)^T$ and $v(0,\mu,t) = (0,1)^T$ respectively, the function $\Delta(\mu,t) = u_1(\pi,\mu,t) + v_2(\pi,\mu,t)$ is called the Lyapunov function for the system of equation (4).

In this work, we propose an algorithm for constructing infinite-gap solutions $p(x,t), q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$ of the problem (1)–(3) by reducing it to the inverse spectral problem for the following Dirac operator:

$$\mathcal{L}(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \mu y,\ x \in \mathbb{R},\ \tau \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{5}$$

where

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x+\tau,t) = \begin{pmatrix} p(x+\tau,t) & q(x+\tau,t) \\ q(x+\tau,t) & -p(x+\tau,t) \end{pmatrix},\ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Let us denote by $u(x,\mu,\tau,t) = (u_1(x,\mu,\tau,t), u_2(x,\mu,\tau,t))^T$ and $v(x,\mu,\tau,t) = (v_1(x,\mu,\tau,t), v_2(x,\mu,\tau,t))^T$ solutions of equation (5) with initial conditions $u(0,\mu,\tau,t) = (1,0)^T$ and $v(0,\mu,\tau,t) = (0,1)^T$, respectively.

The intervals $(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}),\ n \in \mathbb{Z}$ are called gaps, where $\mu_n \equiv \mu_n(\tau,t)$ are the eigenvalues of the periodic or antiperiodic ($y(0) = \pm y(\pi)$) problem for the equation (5). The eigenvalues of the Dirichlet problem for the system (5) with boundary conditions $y_1(0,\mu,\tau,t) = 0,\ y_1(\pi,\mu,\tau,t) = 0$ will be denoted by $\xi_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$ and at the same time $\xi_n(\tau,t) \in [\mu_{2n-1}, \mu_{2n}],\ n \in \mathbb{Z}$.

Numbers $\xi_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$ and signs $\sigma_n(\tau,t) = sgn\left\{v_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - u_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\right\},\ n \in \mathbb{Z}$ are called the spectral parameters of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$.

Spectral parameters $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1,\ n \in \mathbb{Z}$, and spectrum boundaries $\mu_n(\tau,t),\ n \in \mathbb{Z}$ are called the spectral data of the Dirac operator $\mathcal{L}(\tau,t)$.

The problem of recovering the coefficient $\Omega(x,t)$ of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$ from spectral data is called the inverse problem. The coefficients $p(x+\tau,t)$ and $q(x+\tau,t)$ of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$ are determined uniquely from the spectral data $\mu_n(\tau,t), \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$.

The main result of this work is contained in the following theorem.

Theorem. If the initial functions $p_0(x)$ and $q_0(x)$ satisfy the conditions

$$p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),$$

then there exists a uniquely determined global solution $p(\tau,t), q(\tau,t)$ of the problem (1)–(3) belonging to the class $C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0)$, which are determined by the sum of the following uniformly convergence series, respectively:

$$p(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mu_{2n-1} + \mu_{2n}}{2} - \xi_n(x,t) \right), \tag{6}$$

$$q(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(x,t) \sqrt{(\xi_n(x,t) - \mu_{2n-1})(\mu_{2n} - \xi_n(x,t))} \cdot f_n(\xi(x,t)), \tag{7}$$

where

$$f_n(\xi(x,t)) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{+\infty} \frac{(\mu_{2k-1} - \xi_n(x,t))(\mu_{2k} - \xi_n(x,t))}{(\xi_k(x,t) - \xi_n(x,t))^2}}.$$

References

1. Gardner S., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg-de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19, No. 19. P. 1095-1098.
2. Hirota R. Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation // Journal of Mathematical Physics. 1973. Vol. 14. P. 805-809.
3. Khasanov A. B., Eshbekov R. Kh., Normurodov Kh. N., Integration of a nonlinear Hirota type equation with finite density in the class of periodic functions // Lobachevskii J. Math. 2023. Vol. 44, No. 10, P. 4329-4347.

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE RAYLEIGH-STOKES TYPE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

Khushvaktov N.Kh.
Tashkent International University of Financial Management and Technology (TIFT), Tashkent, Uzbekistan

In recent decades, fractional differential equations have gained significant attention due to their ability to model complex systems with memory and hereditary properties, which cannot be adequately described using classical integer-order differential equations. These equations naturally arise in various fields such viscoelasticity, anomalous diffusion, electrical circuits and control theory.

The Caputo fractional derivative of order $\rho \in (0,1)$ is defined as follows (see, for example [1])

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0.$$

In this work, we study the Cauchy problem for the Rayleigh-Stokes type fractional equation, a class of linear fractional differential equations involving both classical and fractional-order derivatives. Specially, we study the following initial value problem:

$$\begin{cases} y'(t) + \lambda(1 + \gamma D_t^{\rho})y(t) = 0, \quad \gamma > 0, \quad 0 < t < T; \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

where λ, γ are constants. The Caputo derivative is particularly suitable for physical applications because it allows the formulation of initial conditions in terms of classical integer-order derivatives, which have direct physical interpretations. The objective of this study is to analyze the existence and uniqueness of solutions to the above equation and to express the solution explicitly using known special functions.

The solution to this problem is given in [2], where the solution is found using the Fox-Wright function. The solution found in this work differs from it.

Theorem. The Cauchy problem for the Rayleigh-Stokes equation (1) has the solution

$$y(t) = y_0 A_{\rho}(\lambda, t),$$

where

$$A_{\rho}(\lambda, t) = \int_0^{\infty} e^{-rt} \frac{\gamma}{\pi} \frac{\lambda^2 r^{\rho-1} \sin \rho\pi}{(-r + \lambda\gamma r^{\rho} \cos \rho\pi + \lambda)^2 + (\lambda\gamma r^{\rho} \sin \rho\pi)^2} dr.$$

References

1. **C. Lizama** *Abstract linear fractional evolution equations, in Handbook of Fractional Calculus with Applications*, Ed. by J. A. T.Marchado (De Gruyter, Berlin, 2019), Vol. 2, pp. 465–497.

2. **A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier. 2006.

UDC 517.956

One a boundary value problem for a third order equation with multiple characteristiks

Kurbanov O. T.
Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan
odiljonkurbanov69@gmail.com

The equation with multiple characteristics (MC) arises in various problems of physics and mechanics, making it of significant theoretical and applied interest.

The well-known Korteweg-de Vries equation

$$u_y + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 (KdV)$$

which is the object of research by many authors and occupies an important place in the study of nonlinear wave propagation in weakly dispersive media.

The Korteweg de Vries (KdV) equation describes the evolution of weakly nonlinear long-wavelength excitations in a medium with dispersion in the high-frequency domain. The KdV equation finds applications in diverse fields, such as fluid dynamics (e.g., modeling gravitational waves in shallow water and nonlinear Rossby waves), plasma physics (e.g., describing ion-acoustic

waves), electrical engineering (e.g., analyzing nonlinear circuits), and even epidemiology (e.g., simulating the time evolution of infected individuals during an epidemic), etc.

In connection with these and other practical applications, the study of boundary value problems for third-order equations with multiple characteristics is relevant. Note that some linear boundary value problems for a linear equation with multiple characteristics of odd order were considered in [1 - 3]. A linear boundary value problem for a nonlinear third-order equation with multiple characteristics was studied in [2]. In [5], a nonlinear boundary value problem for a linear third-order equation with multiple characteristics was studied. In this paper, the method of the principle of contracting mappings is applied to the study of a nonlinear boundary value problem for a nonlinear third-order equation with multiple characteristics.

Problem. It is required to determine in domain $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$ function u(x,y) that has the following properties:
1) $u(x, y) \in C^{3,1}_{x,y}(D) \bigcap C^{2,0}_{x,y}(\overline{D})$;
2)which is a regular solution to the following equation:

$$L(u) \equiv u_{xxx} - u_y = f(x, y, u, u_x) \tag{1}$$

in domain D;
3) satisfying the following conditions

$$u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0, y) = g_1(u(0, y), y), 0 \leq y \leq 1, \tag{3}$$

$$u_x(0, y) = g_2(u(0, y), y), 0 \leq y \leq 1, \tag{4}$$

$$u(1, y) = \psi(y), 0 \leq y \leq 1, \tag{5}$$

and matching conditions

$$g_1(u(0, 0), 0) = g_2(u(0, 0), 0) = \psi(0) = 0.$$

Theorem (Uniqueness of a solution)

Let $g_1(u, y), g_2(u, y), f(x, y, u, u_x)$ be continuous functions of their arguments $0 \leq y \leq 1$ for any $|u| < \infty, |u_x| < \infty$ satisfying the following condition

$$|g_1(\tau_1, y) - g_1(\tau_2, y)| \leq l_1|\tau_1 - \tau_2|, \tag{6}$$

$$|g_2(\tau_1, y) - g_2(\tau_1, y)| \leq l_2|\tau_1 - \tau_2|, \tag{7}$$

$$|f(x, y, u_1, u_{1x}) - f(x, y, u_2, u_{2x})| \leq L\{|u_1 - u_2|, |u_{1x} - u_{2x}|\}, \tag{8}$$

$$0 < L < \frac{1}{3}, \tag{9}$$

$$l_2^2 + 2l_1 + 2l_2 - (L + 1) \leq 0, \tag{10}$$

where $\tau(y) = u(0, y)$ and $\leq l_1 > 0, \leq l_2 > 0, L > 0$ some constants.

Then the solution to problem (1)-(5) is unique.

The uniqueness of the solution to the boundary value problem is proven by the energy interval method.

Theorem (Existence of a solution)

Let, along with the conditions of the uniqueness theorem, the following conditions be satisfied $\psi(y) \in C^1[0, 1]$, $\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y, u, u_x)) \in (\overline{D}), f(x, 0, u(x, 0), u_x(x, 0)) = 0,$

and for $y \in [0,1]$ for any $|\tau(y)| < N_1$ the following inequalities hold

$$|g_1(\tau(y),y)| < N_{11}, |g_{1y}(\tau(y),y)| < N_{12}, |g_{1\tau}(\tau(y),y)| < N_{13},$$

$$|g_2(\tau(y),y)| < N_{21}, |g_{2y}(\tau(y),y)| < N_{22}, |g_{2\tau}(\tau(y),y)| < N_{23},$$

$f(x,y,u,u_x) \in C(D)$ for any $(x,y) \in D$ and for $|u| < M$

$$|f(x,y,u,u_x)| < M_1, |f_x(x,y,u,u_x)| < M_2, |f_y(x,y,u,u_x)| < M_3,$$
$$|f_u(x,y,u,u_x)| < M_4, |f_{u_x}(x,y,u,u_x)| < M_5$$

.

Then the solution to problem (1) - (5) exists.

To prove the existence of a solution to this problem, an auxiliary problem was considered. By solving the auxiliary problem, the original problem was reduced to a system of Hammerstein integral equations. The solvability of the nonlinear system was established using the contraction mapping method.

References

1. **Cattabriga L.** *Un problem al contorno per una equazione parabolica di ordin dispari.* Amali della Souola Normale Superiore di Pisa a Matematicha. Seria III. Vol XIII. Fasc. II. 1959. p. 163 - 203.

2. **Jurayev T. D.** *Boundary value problems for equations of mixed and . mixed-composite types.* Uzbekistan, Fan, 1979, 236 p.

3. **Abdinazarov S.** *General boundary value problems for a third-order equation with multiple characteristics.* 11.Differential Equations. 1981. Vol. XVII. No. 1. P.3-12.

4. **Alimov Sh. A.** *Principle of Compressed Mappings.* 16.M.: Znanie, 1983. 64 pp.

5. **Khashimov A. R.** *Nonlinear boundary value problems for the equation of the third order with multiple characteristics.* Uzb. Mat. Jour, 1993. vol. 2, pp. 97-102.

Solvability of a Nonclassical Problem for a Mixed-Type Equation

Makulbay A.B.[1], Mirsaburova G.M.[2]

[1]Department of Mathematics and Mathematical Modeling, Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan;
aseka_tynybekova@mail.ru

[2]Department of General Mathematics, Tashkent State Pedagogical University, Tashkent 100185, Uzbekistan;
gulbaxor.mirsaburova@mail.ru

Abstract. Mixed-type equations occupy an important place in mathematical physics (gas dynamics, filtration theory, and wave processes). To ensure the well-posedness of boundary value problems for such equations, various additional conditions are introduced: Tricomi, Frankl, and Bitsadze–Samarskii. In this work, a nonclassical problem is considered for elliptic–hyperbolic mixed-type equations with singular coefficients, where an analogue of the Frankl condition and a combination of the Bitsadze–Samarskii conditions are imposed. The existence and uniqueness

of the solution are proven. The problem is reduced to singular integral equations of Tricomi type, subsequently regularized by the Carleman–Vekua method, and then investigated using the Wiener–Hopf technique.

Keywords: mixed-type equations; Frankl analogue; Bitsadze–Samarskii conditions; singular coefficients; Wiener–Hopf method.

Introduction

Partial differential equations of mixed type are among the fundamental objects of mathematical physics. They describe a wide range of applied processes such as gas dynamics, aerodynamics, filtration in porous media, plasma physics, and acoustics.

In this work, the unique solvability of a problem for a mixed-type equation with a singular coefficient is studied under nonclassical and general conjugation conditions. The uniqueness of the solution is established using the integral analogue of the extremum principle proposed by A.B. Bitsadze. The solvability of the problem is reduced to Tricomi-type singular integral equations and to an integral equation of Wiener–Hopf type. The solutions of these equations are obtained by applying the Carleman–Vekua method and the theory of Riemann boundary value problems.

As a result of the study, the unique solvability of a new type of boundary value problem was established for mixed-type equations with singular coefficients and various orders of degeneration. Analytical and structural methods for obtaining the solution were proposed.

The results of this study not only expand the theory of mixed-type differential equations but can also serve as a foundation for solving concrete applied problems arising in gas dynamics and filtration theory.

Problem Statement

For $y > 0$, let the vertices be $A(-1, 0)$ and $B(1, 0)$, and let the boundary curve be given by

$$x^2 + \frac{4}{(l+2)^2} y^{l+2} = 1,$$

that is, by the equation $\sigma_0\big(y = \sigma_0(x)\big)$.

For $y < 0$, the boundary is formed by the characteristics AC and BC, where $C = \{z = x+iy\}$.

We consider the following equation in a bounded simply connected domain Ω in the complex plane:

$$G(u) = \begin{cases} y^l u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\delta_0}{y} u_y, & y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\beta_0}{y} u_y, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

Here $l, m > 0$ are positive constants, $\delta_0 \in (-l/2, 1)$, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$ and $l \neq m$.

The type of equation changes along the line $y = 0$: in the upper half-plane it is elliptic, whereas in the lower half-plane it is hyperbolic.

The subdomains corresponding to $y > 0$ and $y < 0$ are denoted by Ω^+ and Ω^-, respectively. The points C_0 and C_1 are the intersection points of the characteristics of (1) with the boundary characteristics AC and BC, emanating from the point $E(c, 0)$, where a certain real number $c \in J = (-1, 1)$ is fixed along the line $y = 0$.

Moreover, there exists a function $p(x)$, which is a diffeomorphism

$$p(x) \in C^1[-1, c],$$

mapping the set of points of the segment $[-1, c]$ onto the set of points of the segment $[c, 1]$, and it satisfies the following conditions:

$$p'(x) < 0, \qquad p(-1) = 1, \qquad p(c) = c.$$

Boundary conditions:

$$\begin{aligned}
u(x,-0) &= a(x)u(x,+0) + a_0(x), && x \in [-1,1],\\
\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y(x,y) &= b(x)\lim_{y\to+0} y^{\delta_0}u_y(x,y) + b_0(x), && x \in (-1,1)\setminus\{c\},\\
u(x,\sigma_0(x)) &= \rho(x)u(x,+0) + \varphi_0(x), && x \in [-1,1],\\
u(x,y)|_{AC_0} &= \psi(x), && x \in \left[-1, \tfrac{c-1}{2}\right],\\
u(p(x),-0) &= \mu(x)u(x,+0) + f(x), && x \in [-1,c].
\end{aligned}$$

If

$$\frac{l+2\delta_0}{2(l+2)} > \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}, \quad a(x) > 0,\ b(x) > 0,$$

then the problem is equivalently reduced to an integral equation with a weak singularity:

$$\tau(x) + \lambda \int_{-1}^{c} \frac{K(x,t)\tau(t)}{|x-t|^{\,1+2\beta-2\delta}}\,dt = F(x), \qquad -1 < x < c,$$

where $K(x,t)$ is the kernel expressed in terms of hypergeometric functions, and $F(x)$ denotes the given initial functions.

If

$$\frac{l+2\delta_0}{2(l+2)} = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}, \quad a(x) > 0,\ b(x) > 0,$$

then the problem is reduced to a special singular integral equation:

$$\tau(x) + (\lambda-1)\int_{-1}^{1} \frac{K(x,t)\tau(t)}{|x-t|}\,dt = F(x),$$

which is given in an equivalent form.

To solve such an equation, it is transformed into the Wiener–Hopf form by applying the Carleman–Vekua regularization method:

$$\rho(y) = \lambda_0 \int_0^{+\infty} K(y-t)\rho(t)\,dt = R_6[\rho(y)] + F_5(y),$$

where $K(y-t)$ is the exponentially decaying convolution kernel, and $\rho(y)$ is the new unknown function.

It is shown that the index of the Wiener–Hopf equation is zero. Therefore, the existence and uniqueness of the solution are established.

References

1. Frankl, F.I. *Selected Works on Gas Dynamics.* Moscow: Nauka, 1973.

2. Bitsadze, A.V., Samarskii, A.A. *Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type.* Moscow: Nauka, 1953.

3. Salakhitdinov, M.S., Mirsaburov, M. *Nonlocal Problems for Mixed-Type Equations with Singular Coefficients.* Tashkent: Universitet, 2005.

4. Protter, M.H. Uniqueness Theorem for the Tricomi Problem. *J. Rational Mech. Anal.*, 1955.

5. Morawetz, C.S. On the Frankl Problems. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1954.

6. Aziz, A.K., Schneider, M. On the Uniqueness of the Frankl–Morawetz Problem. *Monatsh. Math.*, 1978.

7. Makulbay, A.B., Mirsaburov, M., Berdyshev, A.S., Mirsaburova, G.M. Problem with Missing Tricomi Condition and Analogue of Frankl Condition for One Class of Mixed-Type Equations. *Mathematics*, 2025, 13(11), 1875. DOI: https://doi.org/10.3390/math13111875

An evasion game for an infinite system of ternary differential equations in Hilbert space l_2

Muxammadjonov A. A.[1], Ibragimov G. I.[2]

[1]V.I.Romanovskii Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan; akbarshohmuhammadjonov6764@gmail.com

[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan; ibragimov.math@gmail.com

We examine a controlled object given by the following infinite system of differential equations

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_i = -\lambda_i x_i + y_i + u_{i1} - v_{i1}, & x_i(0) = x_{i0}, \\ \dot{y}_i = -\lambda_i y_i + z_i + u_{i2} - v_{i2}, & y_i(0) = y_{i0}, \\ \dot{z}_i = -\lambda_i z_i + u_{i3} - v_{i3}, & z_i(0) = z_{i0} \quad i = 1, 2, 3, ..., \end{array} \tag{1}$$

in Hilbert space l_2, where λ_i are given positive numbers, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots) \in l_2$, $y_0 = (y_{10}, y_{20}, y_{30}, \dots) \in l_2$, $z_0 = (z_{10}, z_{20}, z_{30}, \dots) \in l_2$ are initial positions, $u = (u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, \dots)$ and $v = (v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, \dots)$ are the control parameters of pursuer and evader, respectively. We suppose that $0 \le t \le T$, where T is a given sufficiently large number, and that $\varphi_0 = (\varphi_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{30}, ...) = (x_{10}, y_{10}, z_{10}, x_{20}, y_{20}, z_{20}, x_{30}, y_{30}, z_{30}, \dots) \neq 0$.

Assume that ρ and σ, $\rho > \sigma$, are given positive numbers.

Definition 1. A function $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots)$, $t \in [0, T]$, with measurable coordinates $u_i(t) = (u_{i1}(t), u_{i2}(t), u_{i3}(t))$, $i = 1, 2, ...$, subject to the condition

$$\sum_{i=1}^{\infty} (u_{i1}^2(t) + u_{i2}^2(t) + u_{i3}^2(t)) \le \rho^2, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

is referred to as the admissible control of the pursuer.

Definition 2. A function $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t), \dots)$, $t \in [0,T]$, with measurable coordinates $v_i(t) = (v_{i1}(t), v_{i2}(t), v_{i3}(t))$, $i = 1, 2, ...$, subject to the condition

$$\sum_{i=1}^{\infty}(v_{i1}^2(t) + v_{i2}^2(t) + v_{i3}^2(t)) \le \sigma^2, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

is referred to as the admissible control of the evader.

We define $S(\sigma)$ as the set of all admissible controls.

Let

$$A_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, ...,$$

then, we have

$$e^{A_i t} = e^{-\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, ... \tag{4}$$

Let $C(0,T;l_2)$ be the space of continuous functions $\varphi(\cdot)$ such that $\varphi(t) \in l_2$ for each $0 \le t \le T$. We present the following proposition which is proved in [1].

Proposition 1. If $w(\cdot) \in S(\sigma)$, and $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, 2, ...$, then there exists a unique solution $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ...)$ of the infinite system of differential equations (1) in the space $C(0,T;l_2)$.

Of course, for $i = 1, 2, ...$, we have (see [1])

$$\varphi_i(t) = e^{A_i t}\varphi_{i0} + \int_0^t e^{A_i(t-s)}(u_i(s) - v_i(s))ds, \quad i = 1, 2, ...$$

By denoting $\varphi_i(t) = e^{A_i t}\psi_i(t)$, it is not difficult to see that $\varphi(t) = 0$ implies $\psi(t) = 0$, where

$$\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), ...), \quad \psi_i(t) = \varphi_{i0} + \int_0^t e^{-A_i s}(u_i(s) - v_i(s))ds, \quad i = 1, 2, ... \tag{5}$$

Let $\varphi_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, $\varphi_{i0} = (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0})$, $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$.

Definition 3. We call the function

$$(t, \varphi, \xi, \eta, u) \to V(t, \varphi, \xi, \eta, u), \quad V : \mathbb{R}_+ \times l_2 \times [0, \rho] \times [0, \sigma] \times l_2 \to l_2,$$

the strategy of the evader, if, for any admissible control of pursuer $u = u(t)$, $t \in [0,T]$, the system with $v = V(t, \varphi(t), \rho(t), \sigma(t), u(t))$, has a unique solution

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), \dots), \quad i = 1, 2, ...$$

after substitution of the players' controls into it.

Definition 4. We say that the strategy V of evader guarantees evasion on the interval $[0, \tau(V))$ from the initial state $\varphi_0 \in l_2$ if $\varphi(t) \ne 0$, $t \in [0, \tau(V))$, for any pursuer's admissible control $u(t)$, $t \in [0,T]$. We call the number $\tau(V)$ a guaranteed evasion time.

The evader is interested in maximizing the guaranteed evasion time θ by choosing its strategy V but the pursuer tries to minimize θ by using its control $u = u(t)$, $0 \le t \le T$.

Pýheorem 1. For any initial state $\varphi_0 = (\varphi_{10}, \varphi_{20}, \cdots) \ne 0$, the number

$$\theta = \sup_i \theta_i,$$

is a guaranteed evasion time in game (1), where

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{-(\rho-\sigma) + \sqrt{(\rho-\sigma)^2 + 2\lambda_i|\varphi_{i0}|(\rho+\sigma)}}{\rho+\sigma}$$

if $\lambda_i \geq 1$, and

$$\theta_i = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2|\varphi_{i0}|}{\rho+\sigma} + 1 \right)$$

if $0 < \lambda_i < 1$.

References

1. **Ibragimov G. I., Qo'shaqov H.Sh., Turgunov I., Alias I.A.** *The solution of an infinite system of ternary differential equations.* Mathematical Modeling and Computing. 2022. 9(4): 833-841.

2. **Ibragimov G.I., Qo'shaqov X.Sh, Muxammadjonov A.A.** *Optimal pursuit differential game problem for an infinite system of binary differential equations.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No 3, 1131–1144. doi: 10.1134/S1995080224600821.

УДК 517.984

ON ONE ESTIMATE OF THE B-ELLIPTIC OPERATOR

Pirmatov Sh.T.
Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan
shamshod@rambler.ru

The study of boundary value problems for elliptic differential operators with singularities has attracted much attention in recent decades due to both its purely theoretical significance and its applications in mathematical physics, potential theory, and spectral analysis. Of particular interest are problems for Bessel-type operators, which arise, in particular, when considering processes with degeneracies or singularities near hypersurfaces or domain boundaries.

In this paper we consider a singular elliptic Bessel operator of type Δ_B containing a singularity in the coefficient on the hyperplane $x_N = 0$. The aim of this paper is to establish precise estimates for the norm of the operator Δ_B with weights of the form x_N^α .

Denote be the symbol R_N^+ the half-space of points $(\widetilde{x}, x_N)$, where $\widetilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_{N-1}) \in R^{N-1}$ and $x_N > 0$.

Let $D \subset R^{N-1}$ be an arbitrary bounded domain with piecewise smooth boundary ∂D. Consider in the closed domain $\overline{D} = D \cup \partial D$ a function $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ satisfying the following conditions:

$$h \in C^1(\overline{D}), \quad h(\widetilde{x}) > 0 \text{ if } \widetilde{x} \in D, \quad h(\widetilde{x}) = 0 \text{ if } \widetilde{x} \in \partial D.$$

Let us denote by the symbol Ω the region of space R_+^N lying under the graph of the function h:

$$\Omega = \{x \in R_+^N \mid 0 < x_N < h(\widetilde{x}),\ \widetilde{x} \in D\}.$$

Γ^0 is the part of the boundary ∂D lying at x_N.

Denote

$$\widetilde{\Delta} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

In the domain Ω consider a singular Bessel type elliptic differential operator of the form

$$\Delta_B \;=\; \frac{1}{x_N^k}\frac{\partial}{\partial x_N}x_N^k\frac{\partial}{\partial x_N} \;+\; \widetilde{\Delta} \;=\; \frac{k}{x_N}\frac{\partial}{\partial x_N} \;+\; \Delta, \tag{1}$$

where k is a fixed positive number and Δ is is the usual Laplace operator in the variables $x \in R^N$. The theory of boundary value problems for such operators and their spectral properties were studied in detail by I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov (see monographs [1] and [2]).

The domain $D(\Delta_B)$ of the operator Δ_B is the set of functions $u \in C_0^\infty(\Omega \bigcup \Gamma^0)$ satisfying the condition

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} \;=\; 0, \quad x \in \Gamma^0. \tag{2}$$

The following statement is true.

Theorem 1. *Let $u \in D(\Delta_B)$. Then for any $\alpha > 0$ the following estimate*

$$\int\limits_\Omega |\Delta_B u(x)| x_N^\alpha \, dx \;\le\; C_\alpha \int\limits_\Omega \Big(|\Delta u(x)| + |\widetilde{\Delta} u(x)|\Big)\, dx \tag{3}$$

is valid.

Note that the weight x^α in estimate (3) cannot be removed.

Theorem 2. *There is no constant $C > 0$ such that for all $u \in D(\Delta_B)$ the inequality*

$$\int\limits_\Omega |\Delta_B u(x)| \, dx \;\le\; C \int\limits_\Omega \Big(|\Delta u(x)| + |\widetilde{\Delta} u(x)|\Big)\, dx \tag{4}$$

is valid.

The weight x^β cannot be placed on the right side of the estimate (3).

Theorem 3. *Let $\alpha > 0$ and $\beta > 0$. There is no constant $C > 0$ such that for all $u \in D(\Delta_B)$ the inequality*

$$\int\limits_\Omega |\Delta_B u(x)| x_N^\alpha \, dx \;\le\; C \int\limits_\Omega \Big(|\Delta u(x)| + |\widetilde{\Delta} u(x)|\Big) x_N^\beta \, dx \tag{5}$$

is valid.

References

1. **Kipriyanov I.A.** *Singular Elliptic Boundary Value Problems.* Moscow, (1997).
2. **Katrakhov V. V., Sitnik S. M.** *Method of transformation operators and boundary-value problems for singular elliptic equations.* Sovr. Mat., Fund. Napravl, 2018,**64** (2). P. 211–426.
3. **Katrahov V. V.** *The asymptotic properties of the spectral function of singular differential operators.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1974, **214** (2). P. 272–275.
4. **Katrahov V. V.** *The spectral function of certain singular differential operators. I* , Differential equation, 1976, **12** (7). P. 1256–1266.
5. **Katrahov V. V.** *The spectral function of certain singular differential operators. II*, Differential equation, 1976, **12** (9). P. 1605–1618.
6. **Kipriyanova N.I.** *Asymptotics of the spectral function of singular differential operators.* Dokl.AN SSSR, 1978, **239:3** P.523–525.
7. **Stein E.M., Weiss G.** *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton, NJ, Princeton Univ. Press, 1971.

UDC 517.957

INTEGRATION OF A FINITE COMPLEX TODA CHAIN WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE

Ruzmetov M. M.[1], Yusupova SH. R.[2]
[1]Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan; rmurod2002@gmail.com
[2]Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan; shohida1412@gmail.com

The finite complex Toda chain represents a discrete lattice of interacting particles with complex-valued coordinates and momenta [1]. These chains exhibit remarkable integrability properties, allowing for the explicit construction of conserved quantities and exact solutions [2], [3]. By introducing a self-consistent source into the Toda chain, we investigate the interplay between the chain's dynamics and the influence of the source term, leading to a deeper understanding of the system's behavior [4], [5].

We consider the following system of equations

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n \sum\limits_{i=1}^{N} \left((g_n^i)^2 - (g_{n+1}^i)^2 \right), \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) - 2 \sum\limits_{i=1}^{N} g_n^i (a_n g_{n+1}^i - a_{n-1} g_{n-1}^i), \\ J g_n^k = \lambda_k g_n^k, \;\; k = 1, ..., p, \;\; n = 0, 1, ..., N-1 \end{cases} \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$a_{-1} = a_{N-1} = 0 \ . \tag{2}$$

The system (1), (2) is considered subject to the initial conditions

$$a_n(0) = a_n^0, \quad b_n(0) = b_n^0, \quad n = 0, 1, ..., N-1 \ , \tag{3}$$

where a_n^0, b_n^0 are given complex numbers such that $a_n^0 \neq 0$ $(n = 0, 1, ..., N-2)$, $a_{N-1}^0 = 0$, $\lambda_1, \ \lambda_2, ..., \lambda_k$ all the distinct eigenvalues of the matrix J and by $m_1, ...m_p$ their multiplicities, respectively, so that $1 \leq p \leq N$ and $m_1 + m_2 + ... + m_p = N$.

The main aim of this work is to derive representations for the solutions of the finite complex Toda chain with a self-consistent source by means of the inverse spectral problem for the complex Jacobi matrices.

Literature

1. **Huseynov A., Guseinov G.Sh.** *Solution of the finite complex Toda lattice by the method of inverse spectral problem,* App. Math. and Comp. vol. 219, 2010, pp. 5550-5563.
2. **Toda M.** *Theory of Nonlinear Lattices.* Springer, 1981.
3. **Flaschka H.** *The Toda lattice, I* Phys. Rev., B. 9, 1974, pp. 1924-1925.
4. **Babajanov B.A, Feckan M, Urazbayev G.U.** *On the periodic Toda lattice hierarchy with an integral source.* Commun Sci Numer Simul. vol. 52, 2017, pp. 110-123.
5. **Babajanov B.A, Ruzmetov M.M, Sadullaev Sh.O.** *Integration of the finite complex Toda lattice with a self-consistent source.* PDE in Applied Mathematics vol. 7, 2023, 100510.

UDC 517.95

INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR TIME-FRACTIONAL MIXED EQUATION INVOLVING REGULARIZED PRABHAKAR DERIVATIVE

Toshpulatov M.
Andijan State University, Andijan, Uzbekistan;
muzaffar.toshpulatov89@gmail.com

ABSTRACT. We examine the unique solution of the initial-boundary value problem involving the Prabhakar derivative for a mixed equation. To achieve this, we apply the method of separation of variables. As a result, we express the solution using a two-variable Mittag-Leffler function, and then present important estimates for this function.

We consider the following mixed equation

$$\frac{1-sgn(t-a)}{2}\cdot {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}u(t,x)+\frac{1+sgn(t-a)}{2}\cdot {}^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x)-\left[\left(1-x^2\right)U_x\right]_x=0 \quad (1)$$

in a domain $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$, where $J=\{(t,x):t=a,-1<x<1\}$ $\Omega_1=\{(t,x):-1<x<1,$ $0<t<a\}$, $\Omega_2=\{(t,x):-1<x<1,a<t<b\}$, $a,b\in\mathbb{R}^+$ such that $b>a$, $1<\beta_1\leq 2$, $0<\beta_2\leq 1$, $\alpha,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$,

$${}^{PC}D_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y\left(x\right)={}^{P}I_{a\,x}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta}\frac{d^m}{dx^m}y\left(x\right)$$

is a regularized Prabhakar derivative of order β [1],

$${}^{P}I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}f(x)=\int_a^x(x-\xi)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\delta(x-\xi)^{\alpha})f(\xi)d\xi,x>a$$

is the Prabhakar fractional integral of an order β [2].

PROBLEM. To find a regular solution of the equation (1) in Ω, satisfying the following initial and transmitting conditions:

$$u(0,x)=\varphi(x),-1\leq x\leq 1, \quad (2)$$

$$\lim_{t\to a+}{}^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x)=\lim_{t\to a-}u_t(t,x),\quad -1<x<1, \quad (3)$$

such that $u(t,x)$,$u_x(t,x)$ are bounded at $x=-1,x=1$, where $\varphi(x)$ is a given function.

DEFINITION. Function $u(t,x)$ is called a regular solution of equation (1) in Ω, if $u(t,x)\in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}(t,x)\in C(\Omega_1\cup\Omega_2)$, ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}u(t,x)\in C(\Omega_1)$,${}^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x)\in C(\Omega_2)$ and satisfies equation (1) in Ω.

FORMAL SOLUTION. We search for a solution to the problem as follows:

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}V_k(t)\cdot P_k\left(x\right),(t,x)\in\Omega_1, \quad (4)$$

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k(t)\cdot P_k\left(x\right),(t,x)\in\Omega_2. \quad (5)$$

We also expand the given function $\varphi(x)$ into the same series:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot P_k(x), -1 \le x \le 1. \tag{6}$$

We substitute (4) and (5) into (1) and will get the following fractional differential equations:

$$^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta} V_k(t) - \lambda_k V_k(t) = 0, 0 < t < a, \tag{7}$$

$$^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta} W_k(t) - \lambda_k W_k(t) = 0, a < t < b \tag{8}$$

A similar problem was studied in [3]. To write the solution to this problem, we will use the solution of the Cauchy problem, which is described in more detail in [4].

LITERATURE

1. **DвЂ™Ovidio.M, Polito F.** *Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions.* Theory Probab. Appl. 2018. Vol. 62, Issue 4, pp. 552-574.
2. **Prabhakar T.R.** *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel.* Yokohama Math. 1971. vol.19, pp. 7-15.
3. **N.Al-Salti, Karimov E.T.** *Inverse source problems for degenerate time-fractional PDE.* Progr.Fract.Differ.Appl. 2022. Vol.8, No 1, pp. 39-52.
4. **Karimov E., Tokmagambetov N., Toshpulatov M.** *On a mixed equation involving Prabhakar fractional order integral-differential operators.* Trends in Mathematics, Extended Abstracts 2021/2022 Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center2. 2024. pp.221-230.

UDK 517.968

Inverse problem of determining the time coefficient in a multidimensional fractional equation of diffusion

Turdiev H. H.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Bukhara, Uzbekistan; h.h.turdiyev@gmail.com

In this paper, we consider the full fractional diffusion-wave equation with the multi-term time-fractional Hilfer operator and a fractional Laplacian operator

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha_0,\beta_0} u\right)(x,t) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left(D_{0+,t}^{\alpha_j,\beta_j} u\right)(x,t)$$

$$+ (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u(x,t) + q(t)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

with initial and boundary conditions

$$I_{0+,t}^{(1-\alpha_j)(1-\beta_j)} u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_j(x),\ j = 0,1,\dots,m,\ m \in \mathbb{N}\ x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{3}$$

where $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω is an open and bounded domain in $\mathbb{R}^d$, featuring a smooth boundary $\partial\Omega$, and T is a fixed final time ($T = const > 0$), $\mu_j > 0,\ j = 1,2,\dots,m$, $(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}$ is the fractional

Laplacian operator of order $1 < \sigma \leq 2$, $D_{0+,t}^{\alpha_j,\beta_j}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, are Hilfer fractional derivatives in time variable of orders α_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, $0 < \alpha_n < \ldots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0 < 1$ and types $0 \leq \beta_j \leq 1$, $I_{0+,t}^{(1-\alpha_j)(1-\beta_j)}$ denotes the Riemann-Liouville fractional integrals in time variable of orders $(1-\alpha_j)(1-\beta_j)$, $\quad j = 0, 1, \ldots, m, \quad m \in \mathbb{N}$ respectively.

Given functions $q(t)$, $f(x,t)$, $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, m$ and parameters $0 < \alpha_n < \ldots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0 < 1$, $0 \leq \beta_j \leq 1$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $1 < \sigma \leq 2$, the problem of finding the solution to the initial boundary problem (1)-(3) is called as the direct problem.

Inverse problem. For the given functions $f(x,t)$, $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, m$ and numbers $0 < \alpha_n < \ldots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0 < 1$, $0 \leq \beta_j \leq 1$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $1 < \sigma \leq 2$, it is required to determine the function $q(t)$, $t \in [0, T]$ in equation (1), using additional information about the solution to the direct problem (1)–(3)

$$\int_{\Omega} w(x)u(x,t)dx = h(t), \ 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

where $w(x)$, $h(t)$ are given functions.

Definition 1. A function $u(x,t)$ is called a classical solution to initial boundary value problem (1)–(3), for $q(t) \in C([0,T])$ if:

(i) $t^{\gamma}u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, and $t^{\gamma}\left(-\Delta\right)^{\frac{\sigma}{2}} u(\cdot,t) \in C(\overline{Q}_T)$;

(ii) $t^{\gamma}\left(D_{0+,t}^{\alpha_0,\beta_0} + \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i D_{0+,t}^{\alpha_i,\beta_i}\right) u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$;

(iii) $u(x,t)$ satisfies (1)–(3),

where $1 > \gamma > \max\left\{(1-\beta_0)(1-\alpha_0), \max\limits_{0\leq j\leq m}\left[1-\alpha_0+\beta_j(1-\alpha_j)\right]\right\}$.

We consider the weighted spaces of continuous functions

$$C_{\gamma}[a,b] := \{g : (a,b] \to R : (t-a)^{\gamma} g(t) \in C[a,b], \ 0 \leq \gamma < 1,\},$$

$$C_{\gamma}^{\alpha,\beta,\sigma}(Q_T) = \Big\{u(x,t) \in C_{\gamma}(Q_T) : \ D_{0+,t}^{\alpha,\beta}u(x,t) \in C_{\gamma}(Q_T), \ 0 < \alpha \leq 1, \ 0 \leq \beta \leq 1;$$

$$\left(-\Delta\right)^{\frac{\sigma}{2}} u(x,t) \in C_{\gamma}(Q_T); \ x \in [0,l], \ 1 < \sigma \leq 2\Big\}.$$

Fractional differential equations have been widely used in engineering, physics, chemistry, biology, and other fields (see [1]-[4]).

The functions $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $w(x)$, $f(x,t)$ and $h(t)$ satisfy the following assumptions

A1) $\varphi_j(x) \in D_{\kappa}(\Omega)$, $j = 0, 1, \ldots, m$;

A2) $f(x,t) \in C_{\gamma}\left(D_{\kappa}(\Omega), [0,T]\right)$;

A3) $w(x) \in D_{\kappa}(\Omega)$;

A4) $D_{0+,t}^{\alpha,\beta}h(t) \in C_{\gamma}[0,T]$, $D_{0+,t}^{\alpha_j,\beta_j}h(t) \in C_{\gamma}[0,T]$ *and* $|t^{\gamma}h(t)| \geq h_0 > 0$, h_0 *is a given number,*

$$\int_{\Omega} w(x)\varphi_j(x)dx = I_{0+,t}^{(1-\alpha_j)(1-\beta_j)}h(t)\big|_{t=0}, \ j = 0, 1, \ldots, m, \ m \in \mathbb{N}.$$

Theorem 1. *Let $q(t) \in C[0,T]$ and conditions A1) -A2) be satisfied. Then there exists a unique solution of the direct problem (1)–(3), $u(x,t) \in C_{\gamma}^{\alpha,\beta,\sigma}(\overline{Q}_T)$.*

Fix a number $r > 0$ and consider the ball

$$B_r(q_0) := \{q(t) : q(t) \in C[0,T], \ \|q - q_0\|_{C[0,T]} \leq r\}.$$

Theorem 2. Let A1)-A3) be satisfied. Then there exists a number $T^* \in (0,T)$, such that there exists a unique solution $q(t) \in C[0,T^*]$ of the inverse problem (1)-(4), $q(t) \in B_r(q_0)$.

References

1. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev D.I.** *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*,: Gordon and Breach, Science Publishers, 1993.
2. **Hilfer R.** *Applications of Fractional Calculus in Physics*,: World Scientific, 2000.
3. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and application of frac- tional differential equations*,: North-Holland Mathematical Studies, Amsterdam: Elsevier, 2006.
4. **Kubica A., Yamamoto M.** *Initial-boundary Value Problems for Fractional Diffusion Equations with Time-Dependent Coefficients*,: Fractional Calculus and Applied Analysis, 2018, 21, 276-311.

UDC 517.95

The first boundary value problem for a subdiffusion equation with the tempered Caputo derivative

Usmonov D. A.[1], **Murolimova N. A.**[2]
[1]**Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; dusmonov909@gmail.com**
[2]**Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; f.nargiza97@gmail.com**

In domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation

$$u_{xx}(t,x) - {}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma}u(t,x) = 0 \tag{1}$$

where $0 < \alpha \le 1$, $\gamma \ge 0$, $u(t,x)$ is an unknown function, ${}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma}$ is the Caputo tempered fractional derivative [1] with respect to the variable t:

$${}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma}u(t,x) = \frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-z)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial s}\left[e^{\gamma s}u(s,x)\right]ds.$$

For this equation, we consider the following first boundary value problem:

Problem D. Find a function $\{u(t,x)\}$, with the following properties:

1) It satisfies equation (1) in the domain Ω;

2) $u(t,x) \in C(\overline{\Omega})$, $u_{xx}(t,x)$, ${}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma}(t,x) \in C(\Omega)$;

3) It satisfies the following conditions:

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in [0,1];$$

$$u(0,t) = \varphi_0(t),\ t \in [0,T];$$

$$u(1,t) = \varphi_1(t),\ t \in [0,T],$$

where $\tau(x)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ are given functions, such that $\tau(0) = \varphi_0(0)$, $\tau(1) = \varphi_1(0)$.

Theorem 1. Problem D has at most one solution.

This theorem is proved by the integral energy method.

Theorem 2. If $\tau(x) \in C[0,T]$, $\varphi_0(t) \in C[0,T]$, $\varphi_1(t) \in C[0,T]$, $\tau(0) = \varphi_0(0)$, $\tau(1) = \varphi_1(0)$ holds, then the function $u(t,x)$ defined by

$$u(t,x) = e^{-\gamma t}\int\limits_0^1 G_1(t,x;0,\xi)\tau(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t G_\xi(t,x;\eta,0)e^{-\gamma(t-\eta)}\varphi_0(\eta)\,d\eta -$$

$$-\int\limits_0^t G_\xi(t,x;\eta,1)e^{-\gamma(t-\eta)}\varphi_1(\eta)\,d\eta,$$

is the solution to problem D, where $\beta = \alpha/2$,

$$G(t,x;\eta,\xi) = \frac{(t-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(t-\eta)^\beta}\right) - e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(t-\eta)^\beta}\right)\right],$$

$$G_1(t,x;\eta,\xi) = \frac{(t-\eta)^{-\beta}}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(t-\eta)^\beta}\right) - e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(t-\eta)^\beta}\right)\right],$$

$e_{\alpha_1,\beta_1}^{\mu,\delta}(z)$ is the Wright type function defined by [2]:

$$e_{\alpha_1,\beta_1}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha_1 n+\mu)\,\Gamma(\delta-\beta_1 n)},\ \ \alpha_1>\beta_1,\ \ \alpha_1>0.$$

References

1. **Liguo Y., Song Z., Zhouchao W.** *Comparison theorems of tempered fractional differential equations.* Eur. Phys. J. Spec. Top. 2022. Vol. 231, pp. 2477–2485.
2. **Pskhu A.V.** *Partial Differential Equations of Fractional Order.* Nauka, Moscow. 2005. [in Russian]

UDC 517.95

Integral condition problem for determining the time-dependent coefficient in the telegraph equation

Usmonov D. A.[1], Jurayeva D. U.[2]
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; dusmonov909@gmail.com
[2] Fergana State Technical University, Fergana, Uzbekistan; diljora587@gmail.com

Let us denote by D the domain bounded by lines $t-x=0$, $t+x=1$ and $t=0$. Let us consider the following hyperbolic equation in the domain D:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - \lambda^2 u(x,t) = f(t), \tag{1}$$

where $u(x,t)$, $f(t)$ unknown functions.

For this equation, we consider the following non-local problem:

Problem $I_{\lambda,\alpha}$. Find a functions $\{u(x,t), f(t)\}$, with the following properties:

1) It satisfies equation (1) in the domain D;

2) $u(x,t)\in C\left(\overline{D}\right)$, $u_{tt}(x,t)$, $u_{xx}(x,t)\in C(D)$, $f(t)\in C[0,1/2]$;

3) It satisfies the following conditions:

$$u(x,\,0)+\alpha\int\limits_0^x u(1-\xi,0)\,d\xi=\varphi(x),\ 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u_t(x,0)=\nu(x),\ 0<x<1,$$

$$u(t,t)=\psi(t),\ 0\le t\le 1/2,$$

where $\varphi(x)$, $\nu(x)$ are given functions, α is a given nonzero real number.

Theorem. If $|\alpha|<1$, $\nu(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\varphi(x)\in C^2[0,1]$, $\varphi(0)=\psi(0)$,

$$\psi'(0)=\nu(0)+\varphi'(0)-\alpha\varphi(1)-\frac{\alpha^2}{\cos\alpha}\int\limits_0^1[\sin(\alpha s)+\cos(\alpha+\alpha s)]\,\varphi(s)ds$$

then the solution to the problem $I_{\lambda,\alpha}$ exists and is unique.

References

1. **Tikhonov A.N., Samarskii A.A.** *Equations of Mathematical Physics.* Moscow: Nauka. 1972. 737 p.

ISSIQLIK TARQALISH JARAYONI UCHUN CHEGARAVIY TESKARI MASALA

Xajiyev I. O.[1], Rashidova M. A.[2]

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O‘zbekiston[1,2]
kh.ikrom04@gmail.com[1], rashidovamunisaxon@gmail.com[2]

Ushbu ishda issiqlik tarqalish jarayoni uchun chegaraviy teskari masala o‘rganilgan. Bir o‘lchovli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini qaraymiz:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<L,\ 0<t<T, \tag{1}$$

bu yerda $u(x,t)$ - harorat funksiyasi, a^2 - doimiy miqdor bo‘lib, issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti, L - sohaning uzunligi, T - vaqt oralig‘ining chegarasi.

To‘g‘ri masala. (1) tenglamani,

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le L, \tag{2}$$

boshlang‘ich shartni va

$$u(0,t)=\mu(t),\ u(L,t)=v(t),\ 0<t\le T, \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiyani toping.

Teskari masala. (1)-(3) masalada $\varphi(x)$, $\mu(t)$ ma’lum funksiyalar, $v(t)$ - noma’lum funksiya bo‘lsin, hamda qo‘shimcha

$$u(x_0,t)=g(t),\ 0<t\le T,\ 0<x_0<L, \tag{4}$$

ma'lumot berilgan. Berilgan $\varphi(x)$, $\mu(t)$, $g(t)$ funksiyalar asosida noma'lum chegaraviy funksiya $v(t)$ va $u(x,t)$ harorat funksiyasini aniqlash lozim.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi ko'plab real fizikaviy jarayonlarni ifodalaydi. Ayniqsa, teskari masalalar quyidagi sohalarda dolzarb hisoblanadi: geofizikada, yer qatlamlaridagi haroratni yuzaga yaqin o'lchovlar orqali aniqlash; tibbiyotdda, termografiya asosida ichki to'qimalardagi o'zgarishlarni baholash; atrof-muhit muhofazasida, grunt yoki suv havzalari haroratini kuzatish orqali ifloslanishni aniqlash.

Tadqiqot doirasida dastlab klassik issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun to'g'ri boshlang'ich-chegaraviy masala tahlil qilinadi hamda uning yechimi va xossalari o'rganiladi. Chegaraviy shartdagi noma'lum funksiya qo'shimcha shart bilan berilgan sohaning ichki nuqtasida harorat funksiyasining ma'lum qiymati asosida aniqlanadi. Teskari masala yechimining mavjudlik, yagonalik va turg'unlik shartlari nazariy jihatdan isbotlanadi. Bu natijalar tegishli teoremalar va lemma shaklida keltirilib, isbotlari bilan mustahkamlangan.

Teskari (1)-(4) masalaning taqribiy yechimi regulyarlashtirish usuli yordamida topiladi. Shuningdek, aniqlangan algoritm asosida kompyuter dasturi tuzilib, turli kirish ma'lumotlari asosida sonli va grafik natijalar olinadi hamda ular tahlil qilinadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Fayazov K.S., Xajiyev I.O. Nokorrekt va teskari masalalar. O'quv qo'llanma.-T.: "Ma'rifat", 2024. 176 bet
2. Zikirov O.S. Matematik fizika tenglamalari (o'quv qo'llanma.) T.: "Fan va texnologiya". 2017, 320 bet.
3. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач: Учебное пособие. - М.: Изд-во МГУ, 1994. - 207 с.

UDK 517.957

Qator manbali Liuvill tenglamasiga qo'yilgan aralash masala

Xasanov A. B.[1], Xudayorov U. O.[1]
[1]Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston.
ahasanov2002@mail.ru, ulugbekxudayorov@gmail.com

Ushbu ishda

$$q_{xt} = e^q + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k s_1(\pi, \lambda_k, t)(\psi_1^2(x, \lambda_k, t) - \psi_2^2(x, \lambda_k, t)), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{1}$$

ko'rinishdagi qator manbali Liuvill tenglamasining

$$\begin{cases} q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^4(\mathbb{R}) \\ q(x,t)|_{x=0} = q_1(t), q_1(t) \in \mathbb{C}^1(t>0) \cap C(t \geq 0) \\ |q_1(t)| \leq M, \quad M > 0, \quad q_0(0) = q_1(0) \end{cases} \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy cheksiz zonali hamda

$$q(x+\pi, t) = q(x,t) \in C_{x,t}^{1,1}(t>0) \cap C(t \geq 0) \tag{3}$$

silliqlik shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi qaralgan.
Bu yerda $\psi^{\pm}(x,\lambda,t) = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t), \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$, $\psi^+(x,\lambda_k,t) = \psi^-(x,\lambda_k,t) = \psi(x,\lambda_k,t)$ vektor-funksiya ushbu

$$L(\tau,t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & q_x'(x+\tau,t) \\ q_x'(x+\tau,t) & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$x, \tau \in \mathbb{R}, t > 0$ Dirak tenglamalar sistemasining ($\tau = 0$) Floke yechimlari, $\beta_k, k \in \mathbb{Z}$ esa $\beta_k = O(k^{-2}), k \to \pm\infty$ asimptotikani qanoatlantiruvchi sonli ketma-ketlik.

Lemma. Ushbu

$$y_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_x & -2\lambda \\ 2\lambda & q_x \end{pmatrix} y,$$

$$y_t = \left\{ \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & e^q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \frac{s_1(\pi, \lambda_k, t)}{\lambda_k^2 - \lambda^2}\begin{pmatrix} \lambda_k\psi_1\psi_2 & -\lambda\psi_1^2 \\ \lambda\psi_2^2 & -\lambda_k\psi_1\psi_2 \end{pmatrix} \right\} y$$

chiziqli differensial tenglamalarning birgalikdalik sharti, $q(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0$ funksiyaga nisbatan qator manbali Liuvill tenglamasini beradi.

$c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ va $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ vektor-funksiyalar orqali (4) tenglamaning $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ va $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi belgilab olamiz. Bular vektor-funksiyalar orqali tuzilgan $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ funksiyaga ($L(\tau,t)$ Dirak operatorining Lyapunov funksiyasi deyiladi va u τ parametrga bog‘liq bo‘lmaydi. $\lambda_k(t), k \in \mathbb{Z}$ lar orqali (4) tenglamaga qo‘yilgan davriy va yarimdavriy ($y_i(0,\tau,t) = \pm y(\pi,\tau,t), i = 1,2$) chegaraviy masalaning xos qiymatlarini belgilasak, ular $\Delta(\lambda,t) \mp 2 = 0$ tenglamaning ildizlari bilan usma-ust tushadi. $\xi_k(\tau,t), k \in \mathbb{Z}$ lar orqali esa (4) tenglamaga qовЪ^{TM}yilgan Dirixle chegaraviy masalasining xos qiymatlarini belgilasak, ular $s_1(\pi,\lambda,t) = 0$ tenglamaning ildizlari bilan usma-ust tushadi.

(4) Dirak operatorining spektiri faqat uzluksiz bo‘lib, u ushbu

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \le 2\} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right)$$

to‘plamdan iborat bo‘ladi. $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), n \in \mathbb{Z}\backslash 0$ intervallarga lakunalar deyiladi.

$\{\xi_k(\tau,t), \sigma_k(\tau,t) = sgn(s_2(\pi,\xi_k(\tau,t),t) - c_1(\pi,\xi_k(\tau,t),t) = \pm 1\}$ to‘plamga $L(\tau,t)$ Dirak operatorining spektral parametrlari deyiladi. $\{\lambda_k(t), \xi_k(\tau,t), \sigma_k(\tau,t) = \pm 1\}$ to‘plamga esa $L(\tau,t)$ Dirak operatorining spektral berilganlari deyiladi.

$L(\tau,t)$ Dirak operatorining spektral berilganlari yordamida $q(x,t)$ koeffetsiyentini topish masalasiga teskari spektral masala deyiladi.

(1)-(3) aralash masala yechimini $L(\tau,t)$ Dirak operatoriga qo‘yilgan teskari spektral masalalar usuli yordamida topamiz.

Ushbu ishning asosiy natijasi quyidagi teorema orqali bayon qilingan.

Teorema. Agar $q_0(x)$ va $q_1(t)$ funksiyalar mos ravishda $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^4(\mathbb{R})$ va $q_1(t) \in C^1(t > 0) \cap C(t \ge 0)$, $|q_1(t)| \le M, M > 0, q_1(0) = q_0(0)$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda (1)-(3) aralash masalaning

$$q(\tau,t) = q_1(t) + 2\int_0^\tau \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s,t) h_k(\xi(s,t)) \right) ds,$$

$$\psi^{\pm}(\tau,\lambda,t) = c(\tau,\lambda,t) + \frac{s_2(\pi,\lambda,t) - c_1(\pi,\lambda,t) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda,t)} s(\tau,\lambda,t)$$

formulalar orqali aniqlangan yagona $\big(q(\tau,t), \psi_i(\tau,\lambda,t)\big), i = 1,2, \tau \in \mathbb{R}, t > 0$ cheksiz zonali global yechimi mavjud bo‘ladi.

Bu yerda $\xi = \xi(\tau,t) = (...\xi_{-1}(\tau,t), \xi_1(\tau,t), ...)$, $\sigma = \sigma(\tau,t) = (...\sigma_{-1}(\tau,t), \sigma_1(\tau,t), ...)$, $\lambda = \lambda(t) = (...\lambda_{-1}(t), \lambda_1(t), ...)$ vektorlarning koordinatalari quyidagi Koshi masalasani qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial \lambda_n(t)}{\partial t} = 0, \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi(\tau,t)) g_n(\xi(\tau,t)),\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$
$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau),\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Bu yerda $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1,\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ - $L(\tau,0)$ operatorning spektral parametrlari, $h_n(\xi)$ va $g_n(\xi),\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ lar esa quyidagicha aniqlanadi:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t,\tau))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty k\neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{1}{2\xi_n(\tau,t)} q(\tau,t) + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\tau,t)\beta_k s_1(\pi,\lambda_k,\tau,t)}{\xi_n^2 - \lambda_k^2}.$$

Adabiyotlar

1. **J. Liouville** *Sur l'equation aux differences partielles* $\frac{d^2 log\lambda}{dudv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 18 (1853), 71-72.

2. **A.B. Khasanov, Kh. N. Normurodov, U. O. Khudayorov** *Cauchy problem for the nonlinear Liouville equation in the class of periodic infinite-gap functions.* Differ. Equ. 59:10 (2023), 1413–1426.

On the solution of a second-order integrodifferential equation

Yagmyrov A. [1], Gurbanmammedov P.N. [2]

[1] The State Energy Institute of Turkmenistan, Ashgabat, Turkmenistan;

[2] Military Institute of the Ministry of Defense of Turkmenistan named after Saparmurat Turkmenbashi the Great, Ashgabat, Turkmenistan;

In this work

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t), \int_0^t K_1(t,s,x(s),x'(s))ds) \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i x(t_i) + \beta_i x'(t_i)) = A, \sum_{i=1}^{p}(\gamma_i x(t_i) + \nu_i x'(t_i)) = B \tag{2}$$

looking for this problem, where $t_i \in [0,T]$ $(i = \overline{1,m})$ arbitrary points,

$$E = \sum_{i=1}^{m}(D\alpha_i) + C\beta_i) \neq 0,\ \ C = \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i t_i + \beta_i),\ \ D = \sum_{i=1}^{m}(\gamma_i t_i + \nu_i).$$

The work consists of two parts, and in the first part (1), (2) proving that equations have solutions and sufficient condition for its uniqueness. In the second part we are finding sufficient condition for continuous dependencies between unique solution and parameters.

1. Existence and uniqueness of the solution

Theorem 1. Let, $f(t,x,y,z)$ $(0 \le t \le T, x,y,z \in \mathbb{R}^1)$, $K(t,s,x,y)$ $(0 \le t,s \le T, x,y \in \mathbb{R}^1)$ continuous functions respectively

$$|f(t,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) - f(t,x,y,z)| \le L_1(|\overline{x} - x| + |\overline{y} - y|) + L_2|\overline{z} - z|,$$

$$|K(t,s,\overline{x},\overline{y})-K(t,s,x,y)|\le L_3(|\overline{x}-x|+|\overline{y}-y|)$$

satisfies these conditions, where $L_i=const\ge 0\ \ (i=1,2,3)$.

If

$$\beta=(L_1+L_2L_3)(\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}(|\alpha_i\gamma_j-\alpha_j\gamma_i|+|\beta_i\gamma_j-\alpha_j\nu_i|+|D\alpha_i-C\gamma_i|+$$

$$+|D\beta_i-C\nu_i|)+1-(\lambda T-1)e^{-\lambda T})<\lambda^2 \tag{3}$$

there is $\lambda=const>0$ which satisfies the inequality, then (1), (2) equations have twice differentiable unique solutions defined in interval [0, T].

The proof of Theorem 1 is given in [1].

2. Continuous dependence of parameters for solution

In this section

$$x''(t)=f(t,x(t),x'(t),\int_0^t K(t,s,x(s),x'(s),\mu)ds,\gamma)\quad (0\le t\le T), \tag{4}$$

studying solutions that satisfy the conditions (2) of the integrodifferential equation, where $\mu,\gamma\in\mathbb{R}^1$ parameters.

Theorem 2 Let, $f(t,x,y,z,\mu)$ $(0\le t\le T,x,y,z,\mu\in\mathbb{R}^1)$, $K(t,s,x,y,\gamma)$ $(0\le t\le T,x,y,\gamma\in\mathbb{R}^1)$ be continuous functions respectively

$|f(t,\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{\mu})-f(t,x,y,z,\mu)|\le L_1(|\overline{x}-x|+|\overline{y}-y|)+L_2|\overline{z}-z|+L_4|\overline{\mu}-\mu|$,

$|K(t,s,\overline{x},\overline{y},\overline{\gamma})-K(t,s,x,y,\gamma)|\le L_3(|\overline{x}-x|+|\overline{y}-y|)+L_5|\overline{\gamma}-\gamma|$

satisfied conditions, where $L_i=const\ge 0\ \ (i=\overline{1,5})$. If there has $\lambda=const>0$ satisfying (3) condition, then in the equations (4), (2) unique solutions in the $C^2([0,T])$ space depends μ,γ parameters continuously.

Proof: In the **Theorem1** proved that (4), (2) equations in each value of parameters in the $C^2([0,T])$ space has unique solutions. For proving **Theorem2** only needs to show that solutions are depends parameters continuously. First changing equations (4), (2) integrodifferential equation which is equivalent to (4), (2).

$$x(t)=\frac{BC-AD}{E}+\frac{t}{E}\sum_{i=1}^{m}(B\alpha_i-A\gamma_i)+\frac{1}{E}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i\gamma_j-\alpha_j\gamma_i)+D\alpha_i-$$

$$-C\gamma_i)\int_0^{t_i}(t_i-s)f(s,x(s),x'(s),\int_0^s K(s,\tau,x(\tau),x'(\tau),\mu)d\tau,\gamma)ds+\frac{1}{E}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}(\beta_i\gamma_j-$$

$$-\alpha_j\nu_i)+D\beta_i-C\nu_i)\int_0^{t_i}f(s,x(s),x'(s),\int_0^s K(s,\tau,x(\tau),x'(s),\mu)d\tau,\gamma)ds+\int_0^t(t-$$

$$-s)f(s,x(s),x'(s),\int_0^s K(s,\tau,x(\tau),x'(\tau),\mu)d\tau,\gamma)ds \tag{5}$$

Let $x_1(t),x_2(t)\ \ (0\le t\le T)$ be the solutions of equation (5) with parameters $\mu=\mu_1,\gamma=\gamma_1$ and $\mu=\mu_2,\gamma=\gamma_2$ parameters, hence

$$x_k(t)=\frac{BC-AD}{E}+\frac{t}{E}\sum_{i=1}^{m}(B\alpha_i-A\gamma_i)+\frac{1}{E}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i\gamma_j-\alpha_j\gamma_i)+D\alpha_i-$$

$$-C\gamma_i)\int_0^{t_i}(t_i-s)f(s,x_k(s),x_k'(s),\int_0^s K(s,\tau,x_k(\tau),x_k'(\tau),\mu_k)d\tau,\gamma_k)ds+\frac{1}{E}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}(\beta_i\gamma_j-$$

$$-\alpha_j\nu_i)+D\beta_i-C\nu_i)\int_0^{t_i}f(s,x_k(s),x_k'(s),\int_0^s K(s,\tau,x_k(\tau),x_k'(\tau),\mu_k)d\tau,\gamma_k)ds+$$

$$+\int_0^t (t-s)f(s,x_k(s),x_k'(s),\int_0^s K(s,\tau,x_k(\tau),x_k'(\tau),\mu_k)d\tau,\gamma_k)ds \quad (k=1,2)$$

Considering theorem conditions we get from this equalities.

$$||x_1-x_2||_* = \max_{0\le t\le T} e^{-\lambda t}(|x_1(t)-x_2(t)|+|(x_1(t)-x_2(t))'|) \le q||x_1-x_2|| +$$

$$+\frac{L_2L_4}{6|E|}(\sum_{i=1}^m(\sum_{j=1}^m(|\alpha_i\gamma_j-\alpha_j\gamma_i|+|\beta_i\gamma_j-\alpha_j\nu_i|)+|D\alpha_i-C\gamma_i|+|D\beta_i-C\nu_i|)+$$

$$+T^3)|\mu_1-\mu_2|+\frac{L_5}{E}(\sum_{i=1}^m(\sum_{j=1}^m(|\alpha_i\gamma_j-\alpha_j\gamma_i|+|\beta_i\gamma_j-\alpha_j\nu_i|)+|D\alpha_i-C\gamma_i|+|D\beta_i-$$

$$-C\nu_i|)+T)|\gamma_1-\gamma_2|,$$

$$||x_1-x_2||_* \le \frac{1}{(1-q)|E|}(\frac{L_2L_4}{6}(\sum_{i=1}^m(\sum_{j=1}^m(|\alpha_i\gamma_j-\alpha_j\gamma_i|+|\beta_i\gamma_j-\alpha_j\nu_i|)+|D\alpha_i-$$

$$-C\gamma_i|+|D\beta_i-C\nu_i|)+T^3)|\mu_1-\mu_2|+L_5(\sum_{i=1}^m(\sum_{j=1}^m(|\alpha_i\gamma_j-\alpha_j\gamma_i|+|\beta_i\gamma_j-\alpha_j\nu_i|)+$$

$$+|D\alpha_i-C\gamma_i|+|D\beta_i-C\nu_i|)+T)|\gamma_1-\gamma_2|.$$

Proof of **Theorem2** follows from last equation.

References:

1. N.Gurbanmammedov, P.Gurbanmammedov - About one multipoint second order Volterra-Fredholm functional Integrodifferential equations. "Science and education are the buildings of an innovative economy"a brief summary of scientific practice discussion. 24.06.2016y.

UDC 517.95

Inverse problem for a nonlinear partial differential equations of the seventh order

Yuldashev T. K.[1], Babayev M. A.[2], Sarman A.[3]
[1]Tashkent State Transport Universuty, Tashkent, Uzbekistan
tursun.k.yuldashev@gmail.com; [2]Tashkent State Transport Universuty, Tashkent, Uzbekistan babayevm@mail.ru; [3]Zhubanov Aktobe Regional Universuty, Aktobe, Kazakhstan sadrasul8@gmail.com

Partial differential equations of parabolic and hyperbolic types are the base of the equations of mathematical physics. Along with equations of parabolic and hyperbolic types, pseudoparabolic and pseudohyperbolic differential equations are often studied.

Let us consider partial differential equations of the form

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}+(-1)^m\frac{\partial^{k+2m}}{\partial t^k\partial x^{2m}}+(-1)^m\omega\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\right]U(t,x)=f(t,x),$$

where $k=1,2,3,\ \ m=1,2,3,...,n$.

This equation is sometimes called a Barenblatt–Zheltev–Kochina equation at $k=1$. And when $k=2$, it is often called a Boussinesq type differential equation. Many works have been devoted to the study of this equation for $k=1,2$ (see, for example, [1–5]). However, we have not yet encountered a single work on the study of an equation in the case of $k=3$.

In this paper we consider a case $k=3$. For simplicity, we take $m=2$. So, we study the solvability of the inverse mixed problem for a seventh order nonlinear partial differential equation

with identification source function and real parameter. So, in the rectangular domain, $\Omega = \{0 < t < T,\ 0 < x < 1\}$ we consider the following partial differential equation

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{\partial^7}{\partial t^3 \partial x^4} + \omega \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right] V(t,x) = F\left(t, x, \int_0^T \int_0^1 G(s,y)V(s,y)dyds\right), \tag{1}$$

where $F(t,x,\cdot) \in C^{0,2}_{t,x}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, $0 < G(t,x) \in C(\bar{\Omega})$, T is given positive number, ω is a real nonzero parameter, $\bar{\Omega} = \{0 \le t \le T,\ 0 \le x \le 1\}$.

In solving partial differential equation (1), we use the following conditions

$$V(t,1) = 0, \quad V_{xx}(t,0) = 0, \quad V_x(t,0) = V_x(t,1), \quad V_{xxx}(t,0) = V_{xxx}(t,1), \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$V(0,x) = \varphi_1(x), \quad V_t(0,x) = \varphi_2(x), \quad V_{tt}(0,x) = \varphi_3(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

where $\varphi_j(x)$ are enough smooth functions on the segment $[0,1]$.

Direct Problem Statement. To find a function

$$V(t,x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{3,2}_{t,x}(\Omega), \tag{4}$$

which satisfies differential equation (1), conditions (2) and (3).

Inverse Problem Statement. To find a pair of functions $\{V(t,x), \varphi(x)\}$, using conditions (2), (3) and following additional condition

$$V(t_1,x) = \psi(x) \in C^{(IV)}[0,1], \quad 0 < t_1 < T, \tag{5}$$

where $\psi(x)$ is given function.

From the spectral problem of the direct mixed problem we derive the eigenvalues

$$\lambda_n = (2\pi n)^4, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Eigenfunctions, corresponding to these eigenvalues, have the forms

$$\vartheta_0(x) = 2(1-x), \quad \vartheta_{1n}(x) = -2\sin 2\pi nx, \quad \vartheta_{2n}(x) = \frac{e^{2\pi nx} - e^{2\pi n(1-x)}}{e^{2\pi n} - 1} - \cos 2\pi nx.$$

Along with the spectral problem above, we also consider adjoint spectral problem. Solving the adjoint problem, it is not difficult to see that the eigenfunctions have the form

$$\omega_0(x) = 1, \quad \omega_{1n}(x) = \frac{e^{2\pi nx} + e^{2\pi n(1-x)}}{e^{2\pi n} - 1} - \sin 2\pi nx, \quad \omega_{2n}(x) = -2\cos 2\pi nx.$$

We look for a solution to the problem (4)–(4) in the form of following Fourier series:

$$V(t,x) = v_0(t)\, b_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(v_{1,n}(t)\, b_{1,n}(x) + v_{2,n}(t)\, b_{2,n}(x)\right),$$

where

$$b_0(x) = 2(1-x), \quad b_{1n}(x) = -2\sin 2\pi nx, \quad b_{2n}(x) = \frac{e^{2\pi nx} - e^{2\pi n(1-x)}}{e^{2\pi n} - 1} - \cos 2\pi nx,$$

$$v_0(t) = \int_0^1 V(t,y)c_0(y)dy, \quad v_{1,n}(t) = \int_0^1 V(t,y)c_{1,n}(y)dy,$$

$$v_{2,n}(t) = \int_0^1 V(t,y)c_{2,n}(y)dy,$$

$$c_0(x) = 1, \quad c_{1n}(x) = \frac{e^{2\pi nx} + e^{2\pi n(1-x)}}{e^{2\pi n} - 1} - \sin 2\pi nx, \quad c_{2n}(x) = -2\cos 2\pi nx.$$

We consider the functions $\varphi_j(x), \quad j = 1,2,3$ as:

$$\varphi_j(x) = \varphi_{j,0}\, b_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{j,1,n}\, b_{1,n}(x) + \varphi_{j,2,n}\, b_{2,n}(x)\right),$$

where

$$\varphi_{j,0} = \int_0^1 \varphi_j(y)c_0(y)dy, \quad \varphi_{j,\kappa,n} = \int_0^1 \varphi_j(y)c_{\kappa,n}(y)dy, \quad \kappa = 1,2, \quad j = 1,2,3.$$

So, it is considered a seventh order nonlinear partial differential equations (1) with mixed conditions (2) and (3) and with a real parameter ω. The Fourier spectral method of separation of variables is applied. The eigenvalues and eigenfunctions of the spectral (adjoint spectral) problems are calculated. Countable systems of nonlinear functional-integral equations are derived. Theorems on a uniqueness and existence of the solution of direct mixed problem (1)–(4) is proved for all values of parameter. The method of compressing mapping is applied for solving the countable systems in the Banach spaces $C[0,T]$ and $B_2[0,T]$, respectively. The solution of the inverse mixed problem (1)–(5) is obtained in the form of Fourier series. Analogously, the redefinition function is determined as a Fourier series. Theorem on absolute and uniform convergence of Fourier series of direct mixed problem (1)–(4) is proved for all values of the parameter ω. Theorem on absolute and uniform convergence of Fourier series of inverse mixed problem (1)–(5) is proved for regular values of the parameter ω.

Reference

1. **Akhtyamov A.M., Mamedov Kh.R., Sultanaev Ya.T.** *Inverse Sturm–Liouville problems with polynomials in nonseparated boundary conditions.* Baku Math. J., 2022, vol. 1, no. 2, pp. 179–194. https://doi.org/10.32010/j.bmj.2022.19

2. **Aman G.** *Nonlocal quasilinear parabolic equations.* Uspekhi Mat. Nauk, 2005, vol. 60, no. 6 (366), pp. 21–32.

3. **Azizbayov E.I., Mehraliyev Ya.T.** *Nonlinear inverse boundary value problem for a second order parabolic equation with nonlocal boundary conditions.* Baku Math. J., 2023, vol. 2, no. 2, pp. 160–175. https://doi.org/10.32010/j.bmj.2023.1

4. **Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N.** *On finitness conditions in the mechanics of continuous media. Static problems of the theory of elasticity.* Prikl. Mat. i Mekh., 1960, vol. 24, no. 5, pp. 316–322. (in Russian)

5. **Bayramova N.Kh., Gamzaev Kh.M.** *Numerical solution of one inverse problem for a diffusion model of a chemical-technological process.* Baku Math. J., 2023, vol. 2, no. 2, pp. 125–133. https://doi.org/10.32010/j.bmj.2023.11

UDC 517.95

Mixed problem for a pseudoparabolic fractional differential equation with final condition

Yuldashev T. K.[1], Matchanova A. A.[2], Artykova Zh. A.[3]
[1]Tashkent State Transport Universuty, Tashkent, Uzbekistan
tursun.k.yuldashev@gmail.com; [2]Tashkent Universuty of Information Technology, Tashkent, Uzbekistan oygul87-87@mail.ru; [3]Osh State Universuty, Osh, Kyrgystan
jartykova@oshsu.kg

The theory of differential equations always remains one of the most powerful methods of mathematical physics and nonlinear mechanics. Therefore, this theory has developed strongly and is rapidly developing today. The emergence of the theory of fractional calculus gave a strong impetus to the development of the theory of differential equations from a different point of view. A new direction has appeared — the theory of differential equations of fractional order. Today the theory of fractional differential equations and its applications are considered by many scientists (see, for example, [1-5]). Note that boundary value conditions of the Dirichlet type take place in modeling problems of the flow around a profile by a subsonic velocity stream with a supersonic zone. Different mixed and boundary value problems for differential and integro-differential equations of whole order are studied by a large of mathematicians.

In the domain $\Omega = \left\{(t,x,y)\,|\,0<t<T,\,0<x,y<l\right\}$ a partial differential equation of the following form is considered

$$\left[{}_CD^{\alpha}_{0t} - {}_CD^{\alpha}_{0t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - t^{\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]U(t,x,y) = \\ = a(t)\,U(t,x,y) + f(t,x,y) \tag{1}$$

with final point integral condition

$$U(T,x,y) = \varphi(x,y) + \int\limits_0^T\int\limits_0^l\int\limits_0^l R(s,\eta,\xi)U(s,\eta,\xi)d\eta d\xi ds, \quad 0\le x,y\le l, \tag{2}$$

where β, T and l are given positive real numbers, for $0<\alpha\le 1$

$${}_CD^{\alpha}_{0t}\eta(t) = I^{1-\alpha}_{0t}\eta'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{\eta'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds, \quad {}_CD^{1}_{0t}\eta(t) = \eta'(t), \quad t\in(0,T)$$

is Gerasimov–Caputo type fractional operator,

$$I^{\alpha}_{0t}\eta(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{\eta(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, \quad t\in(0,T)$$

is Riemann–Liouville integral operator, $a(t)\in C\left(\Omega_T\right)$ is given function, $\varphi(x,y)$ is given function. WE use the notations: $\Omega_T\equiv[0,T],\ \Omega_l\equiv[0,l]$.

Problem. We find the function $U(t,x,y)$, which satisfies partial differential equation (1), final value integral condition (2), boundary value conditions

$$U(t,0,y) = U(t,l,y) + U(t,x,0) = U(t,x,l) = 0 \tag{3}$$

and class of functions

$$U(t,x,y) \in C(\overline{\Omega}), \quad {}_C D^{\alpha}_{0+} U(t,x,y) \in C(\Omega), \tag{4}$$

where $\overline{\Omega} = \{(t,x,y) \,|\, 0 \le t \le T,\ 0 \le x, y \le l\}$.

We assume that for the given functions are true the following boundary conditions

$$\varphi(0,y) = \varphi(l,y) = \varphi(x,0) = \varphi(x,l) = 0,$$
$$f(t,0,y) = f(t,l,y) = f(t,x,0) = f(t,x,l) = 0.$$

The problem (1)–(4) we reduce to consider the following Fourier series:

$$U(t,x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \vartheta_{n,m}(x,y) \left\{ P_{n,m}\big(\varphi_{n,m}, f_{n,m}\big) E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\mu^2_{n,m} t^{\alpha+\beta}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{1+\lambda^2_{n,m}} \int_0^t K(t,s) f_{n,m}(s) ds + \frac{1}{1+\lambda^2_{n,m}} \int_0^t K(t,s) a(s)\, u_{n,m}(s) ds + \frac{Q_T^{-1}}{1+\lambda^2_{n,m}} \times$$

$$\left. \times \int_0^T \left[\int_0^l \int_0^l R(s,\eta,\xi) \int_0^s K(s,\theta) a\,(\theta)\, u_{n,m}(\theta) d\theta d\eta d\xi - K(T,s) a(s)\, u_{n,m}(s) \right] ds \right\},$$

where

$$P_{n,m}\big(\varphi_{n,m}, f_{n,m}\big) = \varphi_{n,m} Q_T^{-1} + \frac{Q_T^{-1}}{1+\lambda^2_{n,m}} \times$$

$$\times \int_0^T \left\{ \int_0^l \int_0^l R(s,\eta,\xi) \int_0^s K(s,\theta) f_{n,m}(\theta) d\theta d\eta d\xi - K(T,s) f_{n,m}(s) \right\} ds,$$

$$Q_T = E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\mu^2_{n,m} T^{\alpha+\beta}\right) - \int_0^T \int_0^l \int_0^l R(s,\eta,\xi) E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\mu^2_{n,m} s^{\alpha+\beta}\right) d\eta d\xi ds,$$

$\vartheta_{n,m}(x,y) = \dfrac{2}{l} \sin\dfrac{\pi n}{l} x \, \sin\dfrac{\pi m}{l} y$, $n,m = 1, 2, \ldots$, $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\mu^2_{n,m} T^{\alpha+\beta}\right)$ is Mittag–Lefler function,

$$\mu^2_{n,m} = \frac{\lambda^2_{n,m}}{1+\lambda^2_{n,m}}, \quad \lambda^2_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (n^2+m^2).$$

So, in the domain $\Omega = \{(t,x,y) \,|\, 0 < t < T,\ 0 < x, y < l\}$ the unique solvability of mixed problem (1)–(4) for a partial differential equation is considered for the case of α-order Gerasimov–Caputo type fractional operator, $0 < \alpha \le 1$. The solution of the problem is studied in the class of regular functions. The considering equations depend from three independent arguments. First argument is time argument and with respect to this argument considering equation is fractional Gerasimov–Caputo type ordinary differential equation. Second and third arguments are spatial and the equations with respect to these arguments are differential equations of second order. The Fourier series method is used and a countable system of differential equations is obtained.

Reference

1. **Lizama C.** *Abstract Linear Fractional Evolution Equations. Handbook of Fractional Calculus with Applications.* J. A. T. Marchado Ed., DeGruyter, Berlin, 2019, **2**, 465–497.
2. **Kim Myong-Ha, Ri Guk-Chol, Hyong-Chol O.** *Operational method for solving multi-term fractional differential equations with the generalized fractional derivatives.* Fract. Calc. Appl. Anal., 2014, vol. 17, no. 1, pp. 79–95. https://doi.org/10.2478/s13540-014-0156-6.
3. **Patnaik S., Hollkamp J.P., Semperlotti F.** *Applications of variable-order fractional operators: a review.* Proceedings A, Royal Society, 2020, vol. A476, no. 20190498, pp. 1–24. http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2019.0498
4. **Saxena R. K., Garra R., Orsingher E.** *Analytical solution of space-time fractional telegraph-type equations involving Hilfer and Hadamard derivatives.* Integral Transforms and Special Functions, 2015, no. 6. https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1092142.
5. **Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W.** *A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications.* Fract. Calc. Appl. Anal., 2019, vol. 22, pp. 27–59. https://doi.org/10.1515/fca-2019-0003

UDC 517.956

Solvability of a Pseudohyperbolic Equation with Nonlocal Boundary Condition

Zhumagul G.O.[1]
[1]**Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan; e-mail: zhumagul.gaziza@bk.ru**

Introduction. Currently, the study of nonlinear equations of hyperbolic type is of significant interest in mathematics and applied sciences. Such equations arise in mechanics, physics, nuclear physics, optics, and geophysics. In this work, we consider a pseudohyperbolic equation with nonlinear and nonlocal boundary conditions.

Problem Statement. We study the boundary value problem for the pseudohyperbolic equation in the cylinder domain $Q_T = \Omega \times (0, T)$:

$$u_{tt} - \chi \Delta u_t - a\Delta u + cu + |u_t|^{q-2}u_t = b|u|^{p-2}u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

with nonlocal boundary condition:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + K \int_0^t g(t-\tau)|u(\tau)|^{\sigma-2}u(\tau)\, d\tau \Big|_\Gamma = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

and initial conditions:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Main Results. - The existence of a weak generalized solution is proved.
- A theorem on time-locality for existence and uniqueness of the solution is established.
- The uniqueness of the solution is shown using Galerkin's method, a priori estimates, interpolation inequalities, and the inequalities of Young, Hölder, and Minkowski, as well as the Gronwall and Bihari lemmas.

Conclusion. The solvability and uniqueness of a boundary value problem for a nonlinear pseudohyperbolic equation with nonlocal boundary condition are established. The results can be extended to other nonlinear boundary value problems.

Literature

1. **Timoshenko P.S** *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars.* The London, Edinburgh, and Dublin Philos. Mag. J. Sci. 1921. -Vol 41, 744-746 pp.

2. **Haraux A., Zuazua E.** *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems.* Arch. Rational Mech. Anal. 1988, Vol 150, 191-206 pp.

3. **Levine H.** *Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations.* SIAM J. Math. Anal. 1974, Vol 5, 138-146 pp.

4. **Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J.** *Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping.* Math. Methods Appl. Sci. 2001, Vol 24, 1043-1053 pp.

5. **Showalter R.E.** *Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space.* SIAM J. Math. Anal. 1972, Vol 3, No.3, 527-543 pp.

УДК 517.984

О существовании трехчастичного собственного значения оператора Шредингера системы трех бозонов

Абдуллаев Ж.И.[1],Муйдинова Ш.Н.[2]

[1,2]Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан;
jabdullaev@mail.ru

Спектральные свойства операторов Шредингера системы трех частиц на решетке изучались в работах [1-3]. Мы изучаем число собственных значений оператора Шредингера системы трех бозонов на одномерной решетке.

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ – одномерный тор, $L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$– гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$ и симметричных относительно перестановки любых двух переменных. В импульсном представлении системы трех одинаковых частиц (бозонов) с парным контактным потенциалом действует соответственно в гильбертовом пространстве $L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$ по формулам [2]

$$(H_\mu f)(k_1,k_2,k_3) = (\varepsilon(k_1)+\varepsilon(k_2)+\varepsilon(k_3))f(k_1,k_2,k_3) -$$

$$-\frac{\mu}{8\pi^3}\sum_{\alpha=1}^{3}\int_{\mathbb{T}^3}\delta(k_\alpha - k'_\alpha)\delta(k_\beta+k_\gamma-k'_\beta-k'_\gamma)f(k'_1,k'_2,k'_3)dk'_1dk'_2dk'_3.$$

Здесь $\{\alpha,\beta,\gamma\} = \{1,2,3\}$, $\varepsilon(p) = 1-\cos p$, $\delta(k)$ дельта-функция Дирака.

Оператор H_μ разлагается в прямой интеграл [3]

$$H_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus H_\mu(K)dK,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1+V_2+V_3)$, $K \in \mathbb{T}$, действует в гильбертовом пространстве $L^{2,s}(\mathbb{T}^2)$ по формуле

$$H_\mu(K)f(p,q) = \varepsilon_K(p,q)f(p,q) - \frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}[f(K-p-q,s)+f(p,s)+f(s,q)]ds.$$

Здесь $E_K(p,q) = \varepsilon(K-p-q)+\varepsilon(p)+\varepsilon(q)$.

Существенный спектр оператора $H_\mu(\pi)$ состоит из объединения двух отрезков

$$\sigma_{ess}(H_\mu(\pi)) = \left[2-\mu, 4-\sqrt{\mu^2+4}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 6\right].$$

Теорема. Существует $\mu_1 > 0$ такое, что при всех $\mu > \mu_1$ оператор $H_\mu(\pi)$ имеет ровно два собственных значения, лежащие левее существенного спектра.

Литература

1. **Mogilner A. I.** *Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schrödinger operators: problems and results* // Adv. Sov. Math. 1991. T. 5, P. 139–194.

2. **Лакаев С. Н., Абдуллаев Ж. И.** *Спектр разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке*//Математические заметки. 2002. Т. 71, № 5. С. 686 – 696.

3. **Лакаев С. Н., Халмухамедов А. Р., Халхужаев А. М.** *О связанных состояниях оператора Шредингера системы трех бозонов на решетке.* // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 188, № 1. С. 994 –1005.

УДК 517.956.6

О единственности решения задачи с недостающим условием смещения для уравнения Геллерстедта с особыми коэфициентами.

Амонов Б. Б .

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
amonovbobur91@mail.ru

Постановка задачи ЖНП.

Пусть Ω- конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой σ_0 с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$ заданной уравнением $x^2 + 4(m + 2)^{-2}y^{(m+2)} = 1$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянные $m > 0, \quad \beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 -точка пересечения характеристики AC с характеристикой исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in J = AB = (-1, 1)-$ интервал оси $y = 0$. На отрезке $[-1, 1]$ введем линейную функцию $p(x) = ax + b$ которая отображает отрезок $[-1, 1]$ на отрезок $[-1, c]$, где $p(-1) = -1, \ p(1) = c, \ a = (c + 1)/2, \ b = (c - 1)/2$.

В задачах со смещением [1],[2] в отличие от задачи Трикоми ([3], с.29), характеристики AC и BC были равноправны в смысле носителей краевых данных, т.е. все точки характеристики AC и BC были охвачены краевым условием. В данной работе в области Ω для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом исследуется корректность задачи, где условия смещения задается на части граничной характеристике AC_0 и на характеристике BC, а части C_0C характеристики AC освобождены от краевых условий, и это недостающие условие смещения заменено аналогом условия Франкля [4,с.200] на отрезке вырождения AB.

Задача ЖНП . Требуется найти в области Ω функцию $u(x, y)$ удевлетворяющую следующим условиям:

1. Функция $u(x, y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{\Omega^+}$ и $\overline{\Omega^-}$;

2. Функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3. Функция $u(x, y)$ является обобщенным решением класса $R_1[11, c.35; 12]$ в области Ω^-;

4. На интервале вырождения AB выполняется условия сопряжения [4,с.110]

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x\in(-1,1)/\{c\},\tag{2}$$

причем пределы в (2) при $x=\pm 1$, $x=c$ могут имеет особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)\in(0,1/2)$.

5. Выполнены условия

$$u(x,y)\big|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in[-1,1],\tag{3}$$

$$(1+x)^{\beta}D^{1-\beta}_{-1,x}u[\theta_0(p(x))]=(1-x)^{\beta}\mu(x)D^{1-\beta}_{x,1}u[\theta_1(x)]+\rho(x),\quad x\in(-1,1),\tag{4}$$

$$u(p(x),0)-u(x,0)=f(x)\,,\ x\in[-1,1];\tag{5}$$

где

$$\theta_0(p(x_0))=\frac{p\,(x_0)-1}{2}-i\bigg(\frac{(m+2)\,(1+p\,(x_0))}{4}\bigg)^{2/(m+2)},$$

$$\theta_1(x_0)=\frac{x_0+1}{2}-i\bigg(\frac{(m+2)\,(1-x_0)}{4}\bigg)^{2/(m+2)},$$

$D^{1-\beta}_{-1,x}$ $D^{1-\beta}_{x,1}-$ операторы дифференцирования дробного порядка $1-\beta$ [3,с.17], $\theta_0(p(x))$ и $\theta_1(x)$ соответственно аффиксы точек пересечения характеристик AC_0 и BC с характеристиками исходящей из точки $M_1(p(x_0),0)$, и $M_2(x_0,0),\ \ x_0\in[-1,1]$:

Заданные функции $\varphi(x)$, $\rho(x)$, $\mu(x)$, $f(x)$ – непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, а функция $\varphi(x)$ представима в виде $\varphi(x)=(1-x^2)\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)\in C^1(\bar{J})$.

Используя обозначение $u\,(x,0)=\tau\,(x)$, условие (5) запишем в виде

$$\tau\,(p\,(x))-\tau\,(x)=f\,(x)\ \ ,\ x\in[-1,1],\ \ p(x)\in[-1,c].\tag{6}$$

2. Единственность решения задачи ЖНП.

Теорема 1. *Решение задачи ЖНП при однородных краевых данных:* $\varphi(x)\equiv 0,\ \ \rho(x)\equiv 0,\ \ f(x)\equiv 0,$

$$\mu(x)<0\tag{7}$$

своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в области $\overline{D}^{+}$ *принимает только в точках кривой* $\overline{\sigma}_0$.

Доказательство теоремы проводится методом работ [5],[6],[7].

Литература

1. **Жегалов В.И.** *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обоих характеристиках и с разрывами на переходной линии.* // Учен.зып. Казанск.ун-та. 1962, том 122, No3, с.3-16.

2. **Нахушев А.М.** *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа.* Дифференциальные уравнения. 1969, том 51, No1, с.44-59.

3. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М. 1985. 304 с.

4. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005 "Университет" -224 с.

5. **Мирсабуров М.** *Задача с недостающим условием смещения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.* Известия вузов. Математика. 2018, No6, с.52-63.
6. **Мирсабуров М.** *Задача с аналогом условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* Дифференц. уравнения. 2017, 53(6), с.778–788.
7. **Салахитдинов М.С, Мирсабуров М.** *О некоторых краевых задачах со смешением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на границе.* Известия Академии наук Уз ССР. 1980, No1, с.16-21.

УДК 517.9

Рациональная параметризация резонансных многообразий в системах Гамильтона с тремя степенями свободы

Батхин А.Б.[1], Хайдаров З.Х.[2]
[1]Технион - Израильский технологический институт, Израиль; e-mail: batkhin@technion.ac.il
[2]Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова, Самарканд, Узбекистан; e-mail: zafarxx@gmail.com

Аннотация. Исследование формальной устойчивости положений равновесия многопараметрической гамильтоновой системы в случае общего положения традиционно проводится с использованием её нормальной формы при условии отсутствия резонансов небольших порядков. В работе предлагается способ символьного вычисления условия существования резонанса произвольного порядка для системы с тремя степенями свободы. Показано, что это условие для каждого резонансного вектора может быть представлено в виде рациональной алгебраической кривой. Методами компьютерной алгебры получена рациональная параметризация этой кривой для случая общего резонанса. Рассмотрен модельный пример некоторой двупараметрической системы маятникового типа.

Ключевые слова: символьное вычисление, условие резонанса, система Гамильтона, формальная устойчивость, нормальная форма.

Введение

Для многих механических систем наличие резонанса между собственными частотами приводит к появлению сложной динамики, когда энергия колебаний «перекачивается» между теми степенями свободы, чьи соответствующие частоты находятся в резонансе. Однако наличие нетривиальных решений резонансного уравнения позволяет получить дополнительные формальные первые интегралы и, как следствие, провести анализ устойчивости положения равновесия или асимптотически проинтегрировать систему уравнений движения, приведённую к нормальной форме.

Цель работы состоит в описании схемы исследования формальной устойчивости положения равновесия (ПР) системы Гамильтона с тремя степенями свободы, а также в получении явного представления условий существования резонансов кратности 1 в терминах коэффициентов характеристического многочлена линейной части гамильтоновой системы.

Методы

Рассматривается автономная гамильтонова система с аналитической функцией $H(z;\mathbf{P})$, ПР которой совпадает с началом координат. Гамильтониан раскладывается в ряд:

$$H(z;\mathbf{P}) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(z;\mathbf{P}),$$

где $\mathbf{P}$ — вектор параметров. Исследуется множество устойчивости Σ линейной системы, определяемое условиями вещественности и неположительности корней полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ матрицы линейного системы Гамильтона, где $\mu = \lambda^2$.

Для исследования формальной устойчивости (устойчивости по Мозеру) используется нормальная форма (НФ) системы. НФ гамильтониана имеет вид:

$$h(u,v) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} u^{\mathbf{p}} v^{\mathbf{q}},$$

и содержит только резонансные члены, удовлетворяющие условию $\langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \lambda\rangle = 0$.

Основная задача — описание в пространстве параметров областей, свободных от сильных резонансов (порядков 2, 3 и 4). Для этого вводится понятие резонансного многообразия $R_n^{\mathbf{p}}$ — алгебраического многообразия в пространстве коэффициентов $a_1,\dots,a_n$ многочлена $f(\mu)$, на котором выполняется резонансное соотношение $\langle \mathbf{p}, \lambda\rangle = 0$ для фиксированного целочисленного вектора $\mathbf{p}$.

Основные результаты

Предложен способ символьного вычисления условия существования резонанса произвольного порядка. Для резонансного вектора $\mathbf{p}^* = (r,q,1)$ условие резонанса представляется в виде квадратичной формы от корней μ_k:

$$R_3^{(r,q,1)}(\mu_j) \equiv q^4\mu_2^2 - 2q^2r^2\mu_1\mu_2 + r^4\mu_1^2 - 2q^2\mu_2\mu_3 - 2r^2\mu_1\mu_3 + \mu_3^2 = 0.$$

С помощью степенного преобразования и методов компьютерной алгебры получена полиномиальная параметризация резонансного многообразия:

$$\mu_3 = vr^2(u+2q)^2,$$
$$\mu_2 = vr^2u^2,$$
$$\mu_1 = v((q+1)u+2q)^2,$$
$$a_1 = -v[(2r^2+(q+1)^2)u^2 + 4q(r^2+q+1)u + 4q^2(r^2+1)],$$
$$a_2 = v^2[(r^2+2(q+1)^2)u^4 + 4q(r^2+q^2+4q+3)u^3 + 4q^2(r^2+q^2+6q+7)u^2 + 16q^3(q+1)u + 16q^4],$$
$$a_3 = -r^4v^3u^2(u(q+1)+2q)^2(u+2q)^2.$$

Доказана следующая теорема: **Теорема 1.** Резонансное многообразие $R_3^{(r,q,1)}$, где $r,q \in \mathbb{Q}$, допускает полиномиальную параметризацию.

Для сильных резонансов получены явные уравнения резонансных многообразий в пространстве коэффициентов. Например, для двухчастотного резонанса с вектором $\mathbf{p}^* = (q,1,0)$ резонансное многообразие задается уравнением:

$$f_1 \equiv (q^4+q^2+1)^3a_3^2 + q^4(q^2+1)^2a_2^3 + q^4(q^2+1)^2a_1^3a_3 - q^6a_1^2a_2^2 - q^2(q^4+q^2+1)(q^4+4q^2+1)a_1a_2a_3 = 0.$$

Для трёхчастотного резонанса $\mathbf{p}^* = (1,1,1)$: $R_3^{(1,1,1)} \equiv a_1^2 - 4a_2 = 0$.

Пример

Рассмотрена модель трёх математических маятников, соединённых пружинами. Пространство параметров $\Pi \equiv (\alpha, \beta)$ двумерно. Для этой системы найдены уравнения резонансных кривых, соответствующих двухчастотному ($R_3^{(3,1,0)}$) и трёхчастотному ($R_3^{(2,1,1)}$) резонансам 4-го порядка:

$$
\begin{aligned}
R_a^{(3,1,0)} &\equiv \beta = \frac{8\alpha}{2+\alpha}, \\
R_b^{(3,1,0)} &\equiv \beta = 8, \\
R_c^{(3,1,0)} &\equiv \beta = \frac{4\alpha}{1-4\alpha}, \\
R_a^{(2,1,1)} &\equiv \beta = 4\alpha^2 + 4\alpha, \\
R_b^{(2,1,1)} &\equiv \beta = \frac{8\alpha(2-\alpha)}{(3\alpha-2)^2}.
\end{aligned}
$$

Проведён анализ взаимного расположения этих кривых и особых точек.

Заключение

Для системы Гамильтона с тремя степенями свободы предложен способ символьного вычисления резонансного многообразия, соответствующего резонансу общего вида, и доказано, что это многообразие допускает полиномиальную параметризацию. Разработана схема исследования областей формальной устойчивости ПР.

Литература

1. **Мозер Ю.** Новые аспекты в теории устойчивости гамильтоновых систем // Comm. Pure Appl. Math. 1958. Т. 11, № 1. С. 81–114.
2. **Батхин А.Б., Хайдаров З.Х.** Символьное вычисление условия резонанса произвольного порядка в системе Гамильтона //Труды Института системного программирования РАН. 2023. Т.35. № 4. С. 197–218. - DOI: 10.15514/ISPRAS-2023-35(4)-12.
3. **Брюно А.Д.** О формальной устойчивости систем Гамильтона // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 325–330.
4. **Батхин А.Б., Хайдаров З.Х.** Вычисление условия сильного резонанса в системе Гамильтона // ЖВМиМФ. 2023. Т. 63, № 5. С. 697–714.

УДК 517.911.5

К общей теории систем Пфаффа

Бегалиев А. О.
Термезиский университет экономики и сервиса, Термез, Узбекистан azizuzmu@mail.ru

В теории дифференциальных уравнений особое положение занимает системы Пфаффа, относящиеся к системам переопределенного типа [2]. Такие системы служат важным инструментом в термодинамике и имеют существенные приложения в дифференциальной геометрии. После создания в середине прошлого века теории слоений, системы Пфаффа нашли новые эффективные приложения в этой теории.

Система Пфаффа в форме Э. Картана имеет вид

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) dx_k = 0 \tag{1}$$

и определяет поле плоскостей коразмерности m в области $D \subset \mathbb{R}^n$ ($a_k(x)$ — m-мерные вектор-функции, $m \leq n$). Обычно требуется гладкость $a_k(x)$ и невырожденность поля. Если существует гладкое слоение (той же коразмерности), для которого (1) является полем касательных, то (1) называется интегрируемой. Имеется несколько критериев интегрируемости (1), по существу, переформулировок классического критерия Фробениуса [1]. Все они относятся к случаю гладких систем Пфаффа и являются локальными условиями интегрируемости. Для систем Пфаффа можно поставить задачу Коши и при выполнении критерия Фробениуса она будет иметь единственное решение. Вместе с тем само понятие интегрируемости имеет смысл и в случае, когда коэффициенты системы (1) только непрерывны. Очевидно, для таких систем критерий Фробениуса и его варианты теряют смысл.

Оказывается, что если систему (1) привести к форме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f\,(x, u)\,, \tag{2}$$

где $(x, u) \in F \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $m > n$, $f : F \to Lin(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ — непрерывная матрично-значная функция, то задачу Коши для (2) удается заменить переопределенной системой интегральных уравнений Вольтерра специального типа. Это позволяет перенести практически все теоремы общей теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) на систему (2), включая методы приближенного построения интегралов и уравнения вариаций. При этом, обнаруживаются свойства, существенно отличающиеся от случая СОДУ, например, область максимального продолжения решения может оказаться неоднозвязной.

Литература

1. **Тамура И.** *Теория слоений.* М. Мир, 1979. с. 320.

1. **Азамов А.А., Бегалиев А.О.** *Теорема существования и метод приближенного решения для уравнения Пфаффа с непрерывными коэффициентами.*Труды Института математики и механики УрО РАН (Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN). 2021. Том 27(3). –С. 12-24.

УДК 517.956.45

Нелокальная задача для уравнения теплопроводности с двумя свободными границами

Бегалиев О. [1], **Норхонова М.** [1]

[1]Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан;
norxonovamohichexra@gmail.com

Настоящее время в современной науке рассматривается новые классы задач со свободной границей типа Стефана и Флорина с двумя свободными границами, которые возникают в природных моделях, описывающие биологические, экологические, химические и технологические процессы [1].

В работе [2] изучена задача со свободной границей типа Стефана для уравнения теплопроводности с двумя свободными границами, а в работе [3] рассмотрена задача со свободной границей Стефана для уравнения реакции диффузии, которая описывает математические модели замерзания переохлажденной жидкости.

Нелокальные задачи со свободной границей с двумя свободными границами для параболического уравнения относятся к категории неизученных, эти задачи имеются конкретными приложениями [3].

В настоящей работе изучается нелокальная задача со свободной границей типа Флорина с двумя свободными границами для уравнения теплопроводности

Постановка задачи. Требуется найти функций $s(t)$, $u(t,x)$ в области $D=\{(t,x): 0<t\le T,\ 0<x\le s(t)\}$, удовлетворяющие условиям

$$u_t(t,x)=u_{xx}(t,x),\ (t,x)\in D \tag{1}$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad 0\le x\le s_0, \tag{2}$$

$$\alpha u(t,x_1)=u(t,s(t)),\quad 0<x_1<s_0,\quad 0\le t\le T \tag{3}$$

$$u(t,0)=\mu(t),\quad 0\le t\le T \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t))=P,\quad 0\le t\le T \tag{5}$$

где $x=s(t)$ -свободные (неизвестные) граница, которая определяется вместе с функцией $u(t,x)$.

(I) $\varphi(x)$ дважды непрерывная функция, а также $\varphi^{''}(x)$ удовлетворяют условию Гельдера;

(II) постоянные α,β,x_1,s_0 удовлетворяют следующим неравенствам

$$-1<\alpha\le 0,\quad 0<x_1<s_0,\quad s(0)=s_0>0,\quad s(0)=0.$$

(III) Выполнены условия согласования в угловых точках (в т.ч., в рассматриваемых вспомогательных задачах). В частности $\alpha\varphi(x_1)=\varphi(s_0),\ \varphi^{'}(s_0)=P$

(IV) $\lim\limits_{x\to\ s_0}\frac{\varphi(x)}{s_0-x}=0$. Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $s(t)$ и $u(x,t)$ их производные. Чтобы оценить $u_x(t,x)$, а также исследовать характер и гладкость, свободные граница $s(t)$ мы перейдем кзадаче типа Стефана.

Продифференцировав уравнение (1) в D по x для $u_x(t,x)=v(t,x)$ получим следующую задачу

$$v_x(t,x)=v_{xx}(t,x),\quad (t,x)\in D, \tag{6}$$

$$v(0,x)=\varphi^{'}(x),\quad 0\le x\le s_0, \tag{7}$$

$$v(t,s(t))=P,\quad 0\le t\le T, \tag{8}$$

$$P\dot{s}(t)=\alpha v_x(t,x_1)-v_x(t,s(t)),\quad 0\le t\le T. \tag{9}$$

Далее, устанавливается эквивалентность задач (1) и (6). На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемой промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученный и первоначальной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера [4,5].

Использованная литература:

1. Guo J.S., Wu C.H.Dynamics for a two-species competition-diffusion model with two free boundaries. Nonlinearity. 28 (2015), pp.1-27.
2. Lincoln chayes and inwon c. kim.Communications in Partial Differential Equations, vol.33, 2008. pp. 2225–2256.
3. TWang M.X., Zhang Y.Two kinds of free boundary problems for the diffusive prey-predator model, Nonlinear Anal.: Real World Appl., 24 (2015), no.2, pp.73-82.
4. Тахиров Ж.О. Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей. Ташкент, 2014. 240 с. Turaev R.N. Florin problem for quasilinear diffusion equation taking into account nonlinear convection.UzMJ.,2019,No1.c.165-174.

УДК 517.956.6

ПРИНЦИП ЗАРЕМБА-ЖИРО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ.

Бегимова Ш. Ч.,
Термезский университет экономики и сервиса, Термез, Узбекистан;

В полуплоскости $y > 0$ рассмотрим эллиптический оператор с сингулярным коэффициентом

$$E(u) = (y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

где $m > 0,\ \beta_0 \in (-m/2, 1)$[1], [2].

Имеет место

Лемма. Пусть: 1) непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $u(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \bigcap^2(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $E(u) \geq 0\ (\leq 0)$ и принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение в некоторой точке $(x_0, 0)$, $x_0 \in J$; 2) значение $u(x,y)$ на кривой Γ меньше (больше) , чем $u(x_0,\ 0)$. Тогда

$$\lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} < 0 \quad (> 0),$$

при условии, что этот предел существует[3].

Доказательство. Рассмотрим случай положительного максимума. Очевидно, что

$$\lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial y} > 0$$

не может быть . Допустим, что

$$\lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial y} = 0.$$

Обозначим через d диаметр области Ω и, не нарушая общности , положим $u(x_0, 0) = 1$. В силу условия леммы $\max\limits_{(x,y) \in \Gamma} u(x,y) \leq 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим функцию

$$\upsilon(x,y) = u(x,y) / A(y),$$

где

$$A(y) = e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon e^{y^{1-\beta_0}},$$

$d-$ диаметр области Ω , $0 < \varepsilon < 1$. На кривой Γ

$$\upsilon(x,y) \leq \frac{1-\varepsilon}{e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon e^{y^{1-\beta_0}}} \leq \frac{1-\varepsilon}{e^{d^{1-\beta_0}}(1-\varepsilon)} < \frac{1}{e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon},$$

на отрезке [-1,1]

$$\upsilon(x,0) \leq \frac{1}{e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon}$$

,

$$\upsilon(x_0,0) = \frac{1}{e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon}.$$

Нетрудно вычислить , что

$$E(u) = A(y) E_1(\upsilon),$$

где

$$E_1(\upsilon) = y^m \upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} + \frac{1}{y}(\beta_0 + 2A_y)\upsilon_y + \frac{1}{A}\left(\frac{\beta_0}{y}A_y + A_{yy}\right)\upsilon,$$

$$A_y = -\varepsilon(1-\beta_0) e^{y^{1-\beta_0}} y^{-\beta_0},$$

$$A_{yy} = -\varepsilon(1-\beta_0)^2 e^{y^{1-\beta_0}} + \varepsilon\beta_0(1-\beta_0) e^{y^{1-\beta_0}} y^{-\beta_0-1},$$

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\beta_0}{y}A_y + A_{yy}\right) = -\frac{\varepsilon}{A}(1-\beta_0)^2 e^{y^{1-\beta_0}} y^{-2\beta_0} < 0. \tag{2}$$

Функция $\upsilon(x,y)$ удовлетворяет неравенству $E_1(\upsilon) \geq 0$, кроме того, в силу нашего допущения

$$\lim_{y\to 0} y^{\beta_0} \frac{\partial \upsilon(x_0,y)}{\partial y} = \frac{\varepsilon(1-\beta_0)}{\left(e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon\right)^2} > 0,$$

следовательно, функция $\upsilon(x,y)$ принимает наибольшее значение внутри области Ω, что невозможно в силу (2).Аналогично рассматривается случай отрицательного минимума.

Лемма доказана.

Доказанная лемма применяется при доказательстве единственности решения краевых задач для уравнений смешанного типа таких задач как задачи Трикоми, задачи Геллерстедта, задача со смешением[4],[5].

Литература

1. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005 "Университет" -224 с.

2. **Mirsaburov M.** *Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun Trikomi masalasi* Termiz. 2022 "Surxon-nashr". 239 с.

3. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М. 1985. 304 с.

4. **Мирсабуров М.** *Задача с аналогом условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом. //* Дифференциальные уравнения. 2017, том 53 №6, С.778-788.

5. **Мирсабурова У.М.** *Задача с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения смешанного типа. //* Дифференциальные уравнения. 2021, том 57 №6, С.735-751.

Критерии неосцилляции кнезеровского типа для эллиптических уравнений

Гуйджова Дж.[1],Гылыджов С.[2]
[1,2] Туркменский государственный архитектурно-строительный институт, Ашхабад, Туркменистан;

Аннотация: В докладе будут изложены новые критерии кнезеровского типа нового вида для эллиптических уравнений.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, неколебимость, кнезеровского типа.

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{i,j}\left(x\right) u_{x_i}\right)_{x_j} + a\left(x\right) u = 0 \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $a_{i,j}\left(x\right) = a_{j,i}\left(x\right)$, $a\left(x\right)$ – измеримые и локально ограниченные функции. Обозначим через $\overset{\circ}{W_2{}'}(R^n)$ замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^{\infty}\left(R^n\right)$ по метрике пространства Соболева $W_2^{'}\left(R^n\right)$.

Определение. Уравнения (1) называется осциляционным в $\left(R^n\right)$, если $\forall\ a > 0$ в $R_a^n = \{x \in R^n;\ |x| > a\}$ области оно имеет нетривиальное решение $u\left(x\right) \in \overset{\circ}{W_2{}'}\left(R^n\right)$ а неосцилляцилонным в противном случае.

Осциляционным свойствам уравнения [1] посвящены достаточное количество работ [1]. Это потому что с одной стороны это важно для теории самых дифференциальных уравнений с другой стороны различными приложениями, например в квантовой механике. Известный критерии кнезеровского типа, в которых мажорантной функцией служат функции вида $f\left(r\right)$, $r = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$.

В настоящей работе получены критерии кнезеровского типа, когда мажорантной функцией является функция вида $f\left(v_1\right)$ где $v_1 = x_1^{2p_1} + x_2^{2p_2} + \ldots + x_n^{2p_n}$, $p_i > 0\ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$, $\frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2p_2} + \ldots + \frac{1}{2p_n} = \frac{n}{2}$

В уравнении (1) проводим замены $x_1^{2p_1} = v_1\left(1 - v_2\right)$, $x_2^{2p_2} = v_1 v_2\left(1 - v_2\right), \ldots,$ $x_{n-1}^{2p_{n-1}} = v_1 v_2 \ldots v_{n-1}\left(1 - v_n\right)$, $x_n^{2p_n} = v_1 v_2 \ldots v_n$ Положим $p = \max\left\{P_1, P_2, \ldots P_n\right\}$.

Мы использовали теорему сравнения из работы [2], а также необходимое и достаточное условие неколебимости для уравнения вида:

$$-\left(q\left(x\right) y'\right)' + N\left(x\right) y = 0$$

из работы [1,с.13]

Пусть выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left(x\right) \xi_i \xi_j \geq v_1^{\alpha}\ |\xi|^2 \quad \xi \in R^n, \quad \alpha = const, \quad a\left(x\right) \geq a_1\left(v_1\right), \tag{2}$$

тогда согласно теореме сравнения [2] уравнение [1] неосцилляционное в R^n если уравнение

$$-\frac{d}{dv_1} v_1^{\frac{n+2}{2} - \frac{1}{p} + 2} \frac{du}{dv_1} + v_1^{\frac{n-2}{2}} a_1\left(v_1\right) = 0$$

неосцилляционное R^n. Теперь к уравнению [2] применяем необходимое и достаточное условие неколебимости из работы [1]. В результате получаем:

Теорема 1. Пусть выполнены условие [2] и $a\left(x\right) \geq a_1\left(v_1\right)$, $\alpha > 0$.

Если $\frac{n}{2}-\frac{1}{p}\neq 0$ $a_1(v_1)\geq -\frac{\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{p}\right)^2}{v_1^{\frac{1}{p}}}-\frac{1}{v_1^{\frac{1}{p}}\ ln^2 v_1}$,
то уравнение [1] неосцилляционное R^n.

2) Если $a_1(v_1)\geq -\frac{\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{p}+\alpha\right)^2}{v_1^{\frac{1}{p_1}-\alpha}}$, то уравнение [1] несцилляционное в R^n.

Если $P_1=P_2=\ldots=P_n=1$, то из 1) и 2) получаем соответствующие результаты работы [1].

Литература

1. **Тораев А.** *Осцилляционные свойства решений эллиптических уравнений.* // Ашхабад 1985, с.110.
2. **Тораев А.** *В теоремах сравнения для эллиптических уравнений.* // Наука, техника и инновационные технологии в эпоху великого возрождения. С. 331-334, Ашхабад, 2010.

УДК 517.956.6

Об одной коэффициентной обратной задаче с полунелокальными условиями для трехмерного уравнения Трикоми в параллелепипеде

Джамалов С. З.[1], Шакиров А. А.[2]
[1]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; siroj63@mail.ru
[2]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; shokirov.abduvosiq96@gmail.com

В области

$$G=Q\times(0,\ell)=\{(x,t,y)|\ -1<x<1,\ 0<t<T,\ 0<y<\ell\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu=xu_{tt}-au_{xx}-u_{yy}+\alpha(x,t)u_t=c(x,t)u+\psi(x,t,y), \tag{1}$$

где $\psi(x,t,y)=g(x,t,y)+h(x,t)\cdot f(x,t,y)$, здесь $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ заданные функции, а функции $c(x,t)$ и $h(x,t)$ подлежат определению.

Найти функции $\{u(x,t,y),\ h(x,t),\ c(x,t)\}$ удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в области G, такие, что $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) полунелокальные краевые условия

$$\gamma D_t^p u|_{t=0}=D_t^p u|_{t=T},\quad p=0,1 \tag{2}$$

$$u_x|_{x=-1}=u_x|_{x=1}=0, \tag{3}$$

$$u|_{y=0}=u|_{y=\ell}=0 \tag{4}$$

где γ некоторая постоянная число, отличная от нуля;

2) дополнительные условия

$$u(x,t,\ell_0)=\varphi_0(x,t) \tag{5}$$

$$u(x,t,\ell_1)=\varphi_1(x,t), \tag{6}$$

$$0<\ell_0<\ell_1<\ell<+\infty$$

и вместе с функциями $h(x,t)$, $c(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \left\{(u,\ h,\ c)|\ u \in W_2^{2,3}(G),\ h \in W_2^2(Q),\ c \in W_2^2(Q)\right\}.$$

Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизотропное пространство Соболева с нормой

$$|||u|||^2_{W_2^{l,3}(G)} = \sum_{k=1}^{\infty} (1+\lambda_k^2)^3 \|u_k\|^2_{W_2^l(Q)}, \qquad l = 0,1,...$$

где $W_2^l(Q)$ пространство Соболева, $u_k(x,t)$ означает коэффициенты Фурье функции $u(x,t,y)$ по системе $\{sin\lambda_k y\}$, $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}, k = 1,2,3...$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(6) будем называть функции $\{u,h,c\} \in U$, удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в G, с условиями (2) - (6).

Пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части уравнения (1) и заданных функций $\varphi_i(x,y)$:

Условие 1:
нелокальные условия: $\alpha(x,0) = \alpha(x,T)$, $\alpha(-1,t) = \alpha(1,t)$;

$$\gamma g(x,0,y) = g(x,T,y), \gamma f(x,0,y) = f(x,T,y);$$

гладкость: $f(x,t,\ell_i) = f_i(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})$, $g(x,t,\ell_i) = g_i(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})$,

$$f \in W_2^{3,3}(G), g \in W_2^{2,3}(G).$$

Кроме того, пусть $2\alpha(x,t) + \mu K(x) > \delta_0 > 1, |H| = |\varphi_0 f_1 - \varphi_1 f_0| \geq \eta > 0$.

Условие 2:

$$\varphi_i \in W_2^5(Q), \quad \gamma D_t^p \varphi_i|_{t=0} = D_t^p \varphi_i|_{t=T}, \quad \varphi_{ix}|_{x=-1} = \varphi_{ix}|_{x=1} = 0,$$

$$\varphi_i \neq 0, \quad p = 0,1.$$

Введем обозначение $q \equiv \varepsilon_{\varphi,g} + c_1 |||g|||^2_{1,3} + c_2 |||f|||^2_{2,3}$, где $\varepsilon_{\varphi,g}, c_1, c_2$ положительные числа, $\varepsilon_{\varphi,g}$ зависит от φ и g.

Основной результат:

Теорема. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены указанные выше условия 1 и 2, а для коэффициентов уравнения и их следов выполняются следующая неравенство:

$$q < \frac{1}{2}.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)-(6) из класса U.

Замечание. Мы можем добиться неравенства $q < \frac{1}{2}$, выбрав область малой и взяв g_i малым вместе с его производными, а также взяв малыми производные φ_i.

Теорема доказывается методами $\varepsilon-$ регуляризации, априорных оценок и последовательностями приближений.

Литература

1. **Джамалов С.З.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* // Монография. Ташкент.2021г, с.176.

УДК 517.956.6

ОБ ОДНАЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ ПОЛУНЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Джамалов С. З.[1], Юсупов Ш. Б.[2], Халхаджаев Б. Б.[3]

[1]Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; siroj63@mail.ru

[2]Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; sherzod.yusupov2020@inbox.ru

[3]Филиал РГУ Нефти и газа имени И. М. Губкина, Ташкент, Узбекистан; b.khalhadjaev@gubkin.uz

Как известно, локальные краевые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка исследовались функциональными методами в работах [1,2]. Однако задачи с нелокальными краевыми условиями изучены значительно меньше. Частично восполнить данный пробел мы попытаемся в рамках настоящей работы. Здесь, опираясь на результаты исследований [3,4] и применяя модифицированный метод Галеркина, методы априорных оценок и "ε-регуляризации", изучается вопрос об однозначной разрешимости регулярного обобщенного решения одной полунелокальной краевой задачи для уравнения Трикоми четвертого порядка в пространстве Соболева.

В области

$$Q = (0,1) \times (0,T) = \{(x,t)\,;\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T < +\infty\}$$

рассмотрим уравнение Трикоми четвертого порядка:

$$L_2 u = Pu + Mu = f(x,t), \tag{1}$$

где

$$Pu = \sum_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u, \quad Mu = a u_{xxxx} - b u_{xxtt} - c u_{xx},$$

$$D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}, \quad i = 0,1,2,3,4, \quad D_t^0 u = u, \quad a,b,c > 0 \text{ — постоянные.}$$

Условия для коэффициентов:

$$K_4(x,t) = K_4(x) = x, \quad K_3(x,0) = K_3(x,T), \quad K_2(x,0) = K_2(x,T), \quad K_0(x,0) = K_0(x,T).$$

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в $\overline{Q}$.

Полунелокальная краевая задача. Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \quad p = 0,1,2,3, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \qquad u_{xx}\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

где γ - величина, отличная от нуля, которая будет уточнена ниже. Обозначим через C_L класс гладких функций из пространства $W_2^4(Q)$, удовлетворяющих условиям (2), (3).

Определение 1. Назовем функцию $u(x,t)$ регулярным решением задачи (1)–(3), если $u \in C_L$ и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в области Q.

Теорема 1. Пусть выполнены выше перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1), и $K_1(x,t) > 0$ - достаточно большая функция. Кроме того, пусть для коэффициентов уравнения (1) выполняются неравенства

$$-(2K_3 + 3\lambda x) \ \geq \ \delta_3 > 0, \qquad 2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \ \geq \ \delta_2 > 0, \qquad \lambda K_0 - K_{0t} \ \geq \ \delta_1 > 0,$$

для любых $(x,t) \in \overline{Q}$, где

$$\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0, \qquad |\gamma| > 1, \qquad x \in [0,1].$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^1(Q)$, такой, что $\gamma f(x,0) = f(x,T)$, существует единственное регулярное решение задачи (1)–(3) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$.

Литература

1. **Врагов В.Н.** *О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа* // Математический анализ и смежные вопросы математики. - Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. 5-13 с.

2. **Егоров И.Е., Федоров В.Е.** *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка.* - Новосибирск, 1995. 133 с.

3. **Джамалов С.З.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* - Монография. - Ташкент, 2000. 173 с.

4. **Джамалов С.З., Халхаджаев Б.Б., Юсупов Ш.Б.** *Об однозначной разрешимости полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка* // БИМ. - 2024. - No 7. 35-41 с.

Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа второго рода в области - эллиптическая часть которой вертикальная полуполоса

Зуннунов Р. Т.[1], **Худоёров А. А.**[2]
[1]**Институт математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан; Филиал РГУ Нефти и Газа (НИУ) имени И.М. Губкина в г. Ташкенте; zunnunov@mail.ru**
[2]**Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии Наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;; anvarxudoyorov1984@gmail.com**

Как известно,новым этапом в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа являются работы А.В. Бицадзе и А.М. Нахушева где рассматриваются задачи со смещением когда на гиперболической части границы задается нелокальное условие поточечно связывающее значение искомого решения или его производной , вообще говоря дробной, определенного порядка , а на эллиптической части условие Дирихле. Следует отметить, что подавляющая часть работ по уравнениям смешанного типа относится к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа первого рода. Краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода, то есть таких уравнений, у которых линия вырождения является одновременно характеристикой изучены сравнительно мало, тем более в неограниченных областях.

В данной работе исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + signy|y|^m u_{yy} + \alpha|y|^{m-1}u_y = 0, \quad 1 \le m < 2, m-1 < \alpha < 2 \tag{1}$$

Параболическая линия вырождения этого уравнения ось $y = 0$,которая является огибающей семейств его характеристик

$$AC:\ x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0, BC:\ x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

выходящих из точки $C\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$.

Уравнение (1) рассмотрим в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_0 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < +\infty\}$, $l_0 = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси Ox, а также характеристиками AC и BC уравнения (1).

Введем обозначения

$$\beta = \frac{m}{2\,(m-2)}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0,$$

$$l_1 = \{(x,y) : x = 0,\ 0 < y < +\infty\}, l_2 = \{(x,y) : x = 1,\ 0 < y < +\infty\}.$$

Задача S^∞. Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:
1) $u(x,y) \in C\left(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \overline{l_1} \cup \overline{l_2} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}\right) \cap C^2(\Omega_1)$;
2) в области Ω_2 является обобщенным решением из класса R_2 [1];
3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(1,y) = \varphi_2(y), 0 \le y < +\infty,$$

$$\lim_{y \to +\infty} u(x,y) = 0, \text{ равномерно по } x \in [0,1],$$

$$\frac{du\left[\theta_0(x)\right]}{dx}+b\frac{du\left[\theta_1(x)\right]}{dx}=c(x),0<x<1$$

где $c(x)-$ заданная непрерывная функция, которая имеет кусочно-непрерывную производную первого порядка на отрезке $x\in[0,1]$; $\varphi_i(y)\in C[0,+\infty)$ $(i=1,2)$ и $\lim\limits_{y\to+\infty}\varphi_i(y)=0$, а $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)-$ аффикксы точек пересечения характеристик , выходящих из точки $x\in(0,1)$ с характеристиками AC и BC соответственно,$b=const\neq 0$.

На линии $y=0$ параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\lim_{y\to+0}y^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},\ 0<x<1$$
$$u(x,-0)=u(x,+0),$$

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения методом функций Грина и интегральных уравнений.

Литература

1. М.С. Салахитдинов, А.К.Уринов. Уравнения смешанного типа. Ташкент "Университет"2007, 277 С.

УДК 517. 956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В СМЫСЛЕ КАПУТО

Исломов Б.И [1,2], Ахметов К. Н [3]

[1]Национальный Университет Узбеистана имени М. Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан;

[2]TashkentPerfect University, г. Ташкент, Узбекистан;

e-mail islomovbozor@yandex.com

[3]Ташкентский институт текстильной и лёгкой промышленности, г.Ташкент, Узбекистан;

e-mail don10061992@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases}u_{xx}-x^{p}\ {}_cD_{0y}^{\alpha}u, & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_{xx}-(-y)^{m}u_{yy}, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\tag{1}$$

где Ω_1- область, ограниченная отрезками AB, AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=0$, $x=1$, $y=1$, соответственно при $x>0$, $y>0$, а Ω_2- характеристический треугольник, ограниченный характеристиками $AB:\ y=0,\ 0<x<1$, $AC:x-(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=0$, $BC:\quad x+(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=1$, уравнения (1) при $x>0$, $y<0$, здесь $2\beta=m/(m-2)$, причем

$$p>0,\quad 0<m<1,\quad p+2\beta>0,\quad -1<2\beta<0\,.\tag{2}$$

Здесь ${}_cD_{0y}^{\alpha}-$оператор дробного дифференцирования по y в смысле Капуто порядка $\alpha\in(0,\,1]$, определяемый по формуле [1]:

$${}_cD_{0y}^{\alpha}f(y)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y(y-t)^{-\alpha}f'(t)dt, & 0<\alpha<1,\\ \frac{d}{dy}f(y), & \alpha=1.\end{cases}$$

Введем следующие обозначения: $J = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$.

Аналог задачи Трикоми и нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа первого рода с дробной производной Римана-Лиувилля и Капуто изучены в работах[2-4].

Данная работа в области Ω исследуется аналог задачи Трикоми с разрывными условиями склеивания для уравнения (1).

Задача AT_p**.** Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$, $\quad y^{1-\alpha}u_y \in C(\Omega_1 \cup J)$, $\quad u_y \in C(\Omega_2 \cup J)$;

2) $u(x,y) \in C_x^2(D_1 \cup D_2) \cap C_y^2(D_2)$, $\ {}_cD_{0y}^{\alpha}u \in C(D_1)$ и является регулярным решением уравнения (1) в области D_1, а в области D_2 - обобщенным решением из класса R_2[5, с.229];

3) на линии вырождения J выполняется условие склеивания

$$u(x,+0) = a_1(x)u(x,-0) + b_1(x),\ \ (x,0) \in \bar{I},$$

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = a_2(x) \lim_{y\to-0} u_y(x,y) + b_2(x),\ \ (x,0) \in I;$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y),\ \ 0 \le y \le 1\,, \quad u(x,y)|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi(0) = 0, \quad \varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C\,[0,1] \cap C^{\,1}(0,1), \quad \psi(x) \in C^2\left[0,\,\frac{1}{2}\right], \tag{3}$$

$$a_j(x),\ \ b_j(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I), \quad a_j(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0,1]\,,\ \ (j = 1,2). \tag{4}$$

Теорема. *Если выполнены условия (2), (3) и (3), то в области* Ω *решение задачи* AT_p *существует и единственно.*

Единственность решения задачи AT_p доказывается с использованием интегралов энергии и принципа экстремума для параболо-гиперболических уравнений, а существование-методом интегральных уравнений.

Литература

1. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск. Наука Техника.1987. 688 с.

2. **Килбас А.А., Репин О.А.** *Оразрешимости краевой задачи задача для уравнения смешаного типа с частной дробной производной Римана-Лиувилля.* Дифференциальные уравнения. 2010. **46**(10).С.1453-1460.

3. **Килбас А.А., Репин О.А.** *Аналог задачи Трикоми для дифференциального уравнения с частными производными, содержащего уравнение диффузии дробного порядка.* Доклады АМАН. 2010. **12**(**??**). С.31-39.

4. **Islomov B., Ubaydullayev U.Sh** *On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020. **41**(9). P. 1801-1810.

5. **Смирнов М.М.** *Уравнение смешанного типа.* М.: Высшая школа. 1985. 304 с.

УДК 517.956

Начально-краевая задача для вырождающегося дифференциального уравнения высокого четного порядка с оператором Бесселя

Каримов К. Т.[1,2], Орипов Д. Д.[3]
[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан; karimovk80@mail.ru
[2]Институт математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
[3]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан; dastonbekoripov94@gmail.com

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t):\ 0<x<1,\ 0<t<T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t} + bu + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}\right) = f(x,t), \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$ - неизвестная функция, $f(x,t)$ – заданная функция, а $\alpha \in (0,1)$, $0 \le \gamma < 1/2$, $b \ge 0$, $n \in N$.

Исследуем следующую начально-краевую задачу:

Задача U. Найти функцию $u(x,t)$, которая:

1) $\left(\partial^j/\partial x^j\right) u$, $\left(\partial^j/\partial x^j\right)\left[x^\alpha\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)u\right] \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $j = \overline{0,2n-1}$, $t^{2\gamma}u_t \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)\left[x^\alpha\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)u\right]$, $\left(u_{tt} + \frac{2\gamma}{t}u_t\right) \in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) выполняются следующие начальные и краевые условия

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \lim_{t\to+0}\left[t^{2\gamma}u_t(x,t)\right] = \varphi_2(x), \ \ x \in [0,1],$$

$$\left.\begin{gathered} \frac{\partial^j}{\partial x^j}u(0,t) = (-1)^j \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}}u(0,t), \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t)\right)\Big|_{x=0} = (-1)^j \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t)\right)\Big|_{x=0}, \\ \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}}u(1,t) = 0, \ \ \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t)\right)\Big|_{x=1} = 0, \ \ j = \overline{0,n-1}, \ \ t \in [0,T], \end{gathered}\right\}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные непрерывные функции.

К решению задачи U применим метод Фурье, основанный на разделении переменных. При формальном применении этого метода к задаче U возникает следующая спектральная задача:

$$M[v] \equiv \left(x^\alpha v^{(2n)}(x)\right)^{(2n)} = \lambda v(x), \ 0<x<1;$$

$$\left.\begin{gathered} v^{(j)}(x), \quad \left(x^\alpha v^{(2n)}(x)\right)^{(j)} \in C[0,1], \ j = \overline{0,2n-1}; \\ v^{(j)}(0) = (-1)^j v^{(n+j)}(0), \ \ \left[x^\alpha v^{(2n)}(x)\right]^{(j)}\Big|_{x=0} = (-1)^j\left[x^\alpha v^{(2n)}(x)\right]^{(n+j)}\Big|_{x=0}, \\ v^{(n+j)}(1) = 0, \quad \left[x^\alpha v^{(2n)}(x)\right]^{(n+j)}\Big|_{x=1} = 0, \ \ j = \overline{0,n-1}. \end{gathered}\right\}$$

Доказано, что эта спектральная задача имеет счетное число положительных собственных значений, а соответствующие им собственные функции образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$. Решение задачи U найдено в виде суммы ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи.

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{c} g^{(j)}(x),\ \left[x^\alpha g^{(2n)}(x)\right]^{(j)},\ [Mg(x)]^{(j)} \in C[0,1],\ j=\overline{0,2n-1}; \\ x^{\alpha/2}[Mg(x)]^{(2n)} \in C(0,1)\cap L_2(0,1); \\ g^{(j)}(0)=(-1)^j g^{(n+j)}(0),\quad \left[x^\alpha g^{(2n)}(x)\right]^{(j)}\Big|_{x=0}=(-1)^j\left[x^\alpha g^{(2n)}(x)\right]^{(n+j)}\Big|_{x=0}, \\ g^{(n+j)}(1)=0,\ \left[x^\alpha g^{(2n)}(x)\right]^{(n+j)}\Big|_{x=1}=0, \\ [Mg(x)]^{(j)}\Big|_{x=0}=(-1)^j[Mg(x)]^{(n+j)}\Big|_{x=0},\ [Mg(x)]^{(n+j)}\Big|_{x=1}=0,\ j=\overline{0,n-1}, \end{array}\right\} \quad (2)$$

а функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям (2) по аргументу x равномерно по t, где $Mg(x)\equiv\left[x^\alpha g^{(2n)}(x)\right]^{(2n)}$. Тогда существует единственное решение задачи U.

Теорема 2. Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для решения задачи U справедливы оценки

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)} \le K_0\left[\|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right],$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \le K_1\left[\left\|\varphi_1^{(2n)}(x)\right\|_{L_{2,r}(0,1)}+\|\varphi_2(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}+\|f(x,t)\|_{L_2(\Omega)}\right],$$

где $\|g(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}=\left[\int\limits_0^1 x^\alpha[g(x)]^2dx\right]^{1/2}$ и $r=r(x)=x^\alpha$, а K_0 и K_1 -некоторые действительные положительные числа.

Отметим, что уравнение (1) при $n=1$, $\alpha=0$ совпадает с уравнением колебания балки [1]. Некоторые начально-граничные задачи для уравнения (1) при $\forall n\in N$ и $\alpha\in(0,1)$ поставлены и изучены в работа [2]. Для уравнения (1) при $\gamma=0$ и $b=0$ в работах [3,4] были сформулированы и исследованы некоторые начально-краевые задачи.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

2. Уринов А.К., Орипов Д.Д., О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т.27, No 4. С. 621–644.

3. Орипов Д.Д. Исследование одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка // Bull. Inst. Math., 2024, Vol.7, No 5, pp. 105-116.

4. Urinov A.K., Oripov D.D. On an initial boundary–value problem for a degenerate equation of high even order// Ural mathematical journal. 2025. Vol. 11, No. 1. pp. 132 – 144.

УДК 517.956.6

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЧНОЙ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЕЙ ВНУТРЕННЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА.

Каримов Ш. Т.[1], **Мирсабурова Д. М .** [2]
[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
shaxkarimov@gmail.com
[2]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; dmirsaburova@mail.ru

Постановка задачи GM. (Геллерстедта - Моисеева)

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I-$ неограниченная область плоскости переменных x и y, где D^+- полуплоскость $y > 0$, D^- конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC, уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 |y|^{(m-2)/2} u_x + (\beta_0/y) u_y = 0, \tag{1}$$

где $m > 0,\ \beta_0 \in (-m/2, 1),\ \alpha_0 = -(m + 2\beta_0)/2$ некоторые действительные числа.

Пусть C_0 и C_1 точки пересечения соответственно характеристик AC и BC с характеристиками исходящих из точки $E(c, 0)$, где $-1 < c < 1$ и пусть $J = (-1, 1),\ J_1 = (-\infty, -1),\ J_2 = (1, +\infty)-$ интервалы оси $y = 0$.

3. Существование решения задачи GM В работе, [1] была приведена постановка и доказана единственность решения задачи GM(Гелерстедта-Моисеева),где в неограниченной смешенной области D требуется найти функцию с данными Гелерстедта-Моисеева на граничной и параллельной ей внутренней характеристиках:

$$u(x, y)|_{AC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [-1, (c-1)/2], \quad u(x, y)|_{EC_1} = \psi_1(x), \quad x \in [c, (c+1)/2], \tag{2}$$

и видоизмененному условию Хольмгрена на интервалах $J_1 = (-\infty, -1]$ и $J_2 = [1, +\infty)$ оси $y = 0$. Настоящая работа посвящена доказательству сушествования решения задачи GM. В силу формулы Дарбу [2,с.38,формула (1.145)], даюшее решение видоизмененной задачи Коши, из краевых условий (2) имеем

$$\nu(x) = \gamma D_{-1,x}^{1-\beta} (1 + x)^\beta \tau(x) + F_0(x),\ x \in (-1, c), \tag{3}$$

$$\nu(x) = \gamma D_{-1,x}^{1-\beta} (x - c)^\beta \tau(x) + F_1(x),\ x \in (c, 1), \tag{4}$$

где $\gamma = \left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}$, $D_{c,x}^{1-\beta}-$оператор дифференцирования дробного порядка [3,с.20] $F_0(x), F_1(x)-$ известнье функции.

Соотношения (3) и (4) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенные на интервалы $(-1, c)$ и$(c, 1)$ из области D^-.

Формула Хольмгрена даюшее в полуплоскости $y > 0$ решение уравнения (1) удовлетворяюшее условию $\lim\limits_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x)$ имеет вид

$$u(x, y) = -k_1 (1 - \beta_0) y^{1-\beta_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nu(t) \left(r_0^2\right)^{-a_0} \exp\left(2a_0 \arcsin \frac{t - x}{r_0}\right) dt, \tag{4}$$

$$-\infty < x < +\infty,\ y \geq 0,$$

$$k_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2a_0}\frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\bar{\delta})}{\Gamma(\delta+\bar{\delta})},\ \delta = a_0 - a_0 i,\ \bar{\delta} = a_0 + a_0 i,$$

$$r_0^2 = (x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},\ a_0 = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}.$$

Из формулы (4) при $y = 0$ имеем

$$\tau(x) = -k_1 e^{2a_0}\Gamma(1-2a_0)D_{-1,x}^{2a_0-1}\nu(x) - k_1 e^{-2a_0}\Gamma(1-2a_0)D_{x,1}^{2a_0-1}\nu(x) + \Phi(x),\ x \in J \qquad (5)$$

Соотношение (5) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенное на интервал J из области D^+.

В силу (5) из уравнений (3) и (4) исключая $\tau(x)$ имеем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\nu(x) = -\lambda e^{-2a_0}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{1-2a_0}\frac{\nu(s)ds}{s-x} - \tilde{F}_0(x),\ x \in (-1,c), \qquad (6)$$

$$\nu(x) = \lambda e^{2a_0}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-s}{x-c}\right)^{1-2a_0}\frac{\nu(s)ds}{s-x} - \lambda e^{-2a_0}\int_{c}^{1}\left(\frac{s-c}{x-c}\right)^{1-2a_0}\frac{\nu(s)ds}{s-x} + \tilde{F}_1(x),\ x \in (c,1), \qquad (7)$$

Дальнейшее исследование задачи GM проводиться методом работы [4]

Теорема 1. Задача GMпри выполнении условия

$$e^{-\frac{1}{4a_0}}\left(\frac{\sin(\delta\pi)}{\sin(a_0+\delta)\pi}\right)^2 < 1, \qquad (8)$$

однозначно разрешима, где $\delta = arctg(\lambda_0\pi)/\pi$, $\lambda_0 = \lambda e^{-2a_0}$.

Литература

1. **Каримов Ш. Т., Мирсабурова Д.М.** *О единственности решения задачи с локальными условиями на граничной и параллельной ей внутренней характеристиках для одного класса уравнений смешанного типа.* Материала международной научной конференции "Математическая физика и смежные вопросы современного анализа". Бухара(Узбекистан) 2025-г 10-11 октября.

2. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М. 1985. 304 с.

3. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005 "Университет" -224 с.

4. **Уринов А. К., Мирсабурова Д.М.** *Gellerstedt-Moiseev problem with data on parallel characteristics in the unbounded domain for a mixed type equation with singular coefficients* Lobachevskii journal of mathematics. 2024 T.45, No3. pp 1318-1332

УДК 517.95

Об одном методе решения начальных и начально-граничных задач для уравнения колебаний балки

Каримов Ш. Т.[1], Тулашева Ё. И.[2]
[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
shaxkarimov@gmail.com
[2]Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан;
yorqinoytulasheva@gmail.com

В области $\Omega = \{(x, y) : x \in R,\ y \in R,\ y > 0\}$ рассмотрим следующую задачу

Задача Коши. Найти решение $V(x, y) \in M$ уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\,(x, 0) = \varphi\,(x)\,,\ \ u_t\,(x, 0) = 0,\ \ x \in R, \tag{2}$$

где $\varphi\,(x)$ - заданная гладкая функция, через M обозначен класс функций, которые непрерывно дифференцируемы один раз по y и дважды по x в замкнутой области $\bar{\Omega} = \{(x, y) : x \in R,\ y \in R,\ y \geq 0\}$, и непрерывно дифференцируемы два раза по y и четыре раза по x в области Ω.

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 1. Для того, чтобы функция $V(x, y) \in M$ была решением задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы функция

$$U(x, y) = V(x, y) + i \int\limits_0^y V_{xx}(x, \tau) d\tau, \tag{3}$$

была решением уравнения

$$U_y - iU_{xx} = 0,\ \ (x, y) \in \Omega, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$U(x, 0) = \varphi(x), x \in R, \tag{5}$$

где i-мнимая единица.

Из теоремы вытекает

Следствие.Пусть функция $U(x, y) \in M$ является решением задачи (4), (5), где $\varphi(x)$ - действительная функция. Тогда функция $V(x, y) = \mathrm{Re}\, U(x, y)$ является решением задачи (1), (2), где $\mathrm{Re}\, U$ - означает действительную часть функции $U(x, y)$.

Для решения задачи (1), (2) применим следствие теоремы 1. В этом случае уравнение (4) переходит в одномерное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial U}{\partial y} - i\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0.$$

Решение задачи (4), (5) в данном случае примет вид [2]

$$U(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, y) d\xi,$$

где $G(x,\xi,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\exp\left[i\left(\frac{(x-\xi)^2}{4y}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Тогда, в силу следствия теоремы 1, решение задачи (1), (2), имеет вид

$$V(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G_1(x,y,\xi)d\xi, \tag{6}$$

где $G_1(x,y,\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\cos\left[\frac{(\xi-x)^2}{4y}-\frac{\pi}{4}\right]$.

Начально-граничная задача. Найти решение $V(x,y)\in M$ уравнения (1) удовлетворяющее начальным условиям (2) и однородным граничным условиям

$$V_x(0,y)=0,\quad V_{xxx}(0,y)=0,\quad x\in R. \tag{7}$$

Имеется решение задачи (1)-(2).

Для решения задачи (1),(2),(7) нельзя непосредственно воспользоваться формулой (6), так как для отрицательных значений аргумента функция $\Phi(x)$ не определена. Продолжим функцию $\varphi(x)$ четным образом на отрицательную часть оси Ox и обозначим через $\varphi_0(x)$ продолженную функцию. Таким образом, мы обеспечим выполнение однородного граничного условия (7) и правом пользования формулой (6), которая имеет вид

$$V(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(\xi)\cos\left[\frac{(\xi-x)^2}{4y}-\frac{\pi}{4}\right]d\xi. \tag{8}$$

Учитывая четность функции $\varphi_0(x)$ равенство (8) представим в виде

$$V(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\xi)G_1(x,y,\xi)d\xi, \tag{9}$$

где

$$G_1(x,y,\xi)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos(y\eta^2)\cos(x\eta)\cos(\xi\eta)d\eta.$$

В работах [3], [4] авторы использовали эти задачи в качестве вспомогательных.

Литература

1. **Karimov Sh.T.** *The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order.* Sib. Electron. Math. Izv. **15**, 853-862(2018).

2. **Polyanin A.D.** *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists.* Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, 2002.

3. **Sitnik S.M., Karimov Sh.T., Tulasheva Y.I.** *The Cauchy problem for the degenerate beam vibration equation.* Journal of Mathematical Sciences (New York, Springer), Vol. 277, No.3, st, 458-466 Desember 7. 2023.

4. **Тулашева Ё.И.** *Приложения операторов преобразования к решению начально-краевой задачи для уравнения колебания Балки содержащий квадрат оператора Бесселя.* Научный вестник Наманганского Государственного Университета, №12, ст 95, 2024.

Краевая задача для смешанных уравнений третьего порядка в прямоугольной области

Г.К. Кылышбаева
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан
kalbaevna85@mail.ru

В прямоугольной области $D = \{(x,y): \ 0<x<1, \ -p<y<q \}$, рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0, \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1u \equiv u_{xx}-u_y-\lambda^2u, & y>0, \\ L_2u \equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda^2u, & y<0, \end{cases} \tag{2}$$

$p>0, q>0$, $\lambda-$ действительные числа, a, b и $c-$заданные вещественные числа, $a^2+b^2\neq 0$. Введем обозначения: $J=\{(x,y): \ 0<x<1, \ y=0\}$, $D_1 = D \bigcap \{(x,y): \ x>0, \ y>0\}$, $D_2 = D \bigcap \{(x,y): \ x>0, \ y<0\}$, $D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup J$.

Через $C_\theta^k(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производных по θ до $k-$го порядка включительно в области M. Пусть в уравнение (1) параметры a, b, c удовлетворяет условию $a=0$, $b\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $c\in(-\infty,+\infty)$, тогда в области D исследуем следующую задачу.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y)\in C^1(\overline{D}), \ \ u\in C_y^2(\bar{D}_2), \ \ u\in C_x^2(\bar{D}), \ \ u_{xxy}\in C(D_1\cup D_2), \quad u_{yyy}\in C(D_2), \tag{3}$$

$$\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0, \quad (x,y)\in D_1\cup D_2, \tag{4}$$

$$u(0,y)=0, \quad u(1,y)=0, \quad -p\le y\le q, \tag{5}$$

$$u(x,q)=\varphi(x), \quad 0\le x\le 1, \tag{6}$$

$$u(x,-p)=\psi(x), \quad u_y(x,-p)=g(x), \quad 0\le x\le 1 \tag{7}$$

где $\varphi(x), \psi(x), g(x)$ -заданные достаточно гладкие функции.

Уравнение (1) в области D равносильно уравнению параболо- гиперболического типа второго порядка с неизвестной правой частью

$$Lu(x,y)\equiv f(x,y)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right), \quad (x,y)\in D_1\cup D_2, \tag{7}$$

где

$$f(x,y)=\begin{cases} f_1(x) & y>0, \\ f_2(x) & y<0. \end{cases} \tag{9}$$

Тогда задача 1 сводится к следующей обратной задаче.

Задача 2. Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям (3), (5)-(7) и уравнению (8) где

$$f_j(x)\in C(0,1)\cap L_2[0,1]. \tag{10}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1.Если существует решение обратной задачи (3) ,(5)- (8), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия при всех $k \in N$.

$$\Delta_{pq}(k) = \frac{b\left(c^2 + b^2\rho_k^2\right)}{c - b\rho_k^2}\left(e^{(\frac{c}{b}-\rho_k^2)q} - 1\right) sin\rho_k p + b^2\rho_k e^{-\frac{c}{b}p} - b^2\rho_k cos\ \rho_k p + bcsin\rho_k p \neq 0.$$

Используя методы работ [3, 4, 5] доказаны существования решения задачи 1 и 2. Решения задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлено, что однозначная разрешимость обратной задачи существенным образом зависит от выбора границы прямоугольной области. Получены оценки, позволяющие обоснование сходимости рядов в классе регулярных решений данного уравнения и устойчивость решения обратной задачи 1и 2 от граничных данных.

Литература

1. **Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С.** *К теории уравнений смешанно-составного типа.* Новосибирск..: "Сибирский математический журнал". - 1961. Т.II. No1. С. 7-19.
2. **Джураев Т.Д., Сопуев А.** *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* Т.: ФАН. 1986. 220 с.
3. **Сабитов К.Б.** *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области.* "Доклады РАН"2007. Т.413. No 1. С. 23-26.
4. **Сабитов К.Б.** *Краевая задача для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области.* "Дифференциальные уравнения". 2011. Т.47. No5. С.705-713.
5. **Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.** *Об оценке решения одной задачи для параболо-гиперболического уравнения с помощью рядов Фурье.* "Дифференциальные уравнения". 2003. Т.39.No 5. С.656-662.

УДК 517.956.6

Краевая задача с разрывными условиями склеиванием для уравнения параболо-эллиптического типа.

Мадрахимова З.С [1], Рустамова М.Р [2]
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкентский университет информационных технологий;
zilolaxonmadrahimova@gmail.com rustamovamunisa109@gmail.com

Краевые задачи типа задачи Трикоми для уравнения второго порядка параболо-гиперболического типа с вырождением типа и порядка внутри области исследованы в работах Б.Исломова и З.С.Мадрахимова [1], З.С.Мадрахимова [2].

В данной работе изучается краевая задача с разрывными условиями склеиванием для уравнения параболо - эллиптического типа с вырождением типа и порядка внутри области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} xu_{xx} + \alpha_1 u_x - u_y, & x > 0,\ y > 0, \\ -xu_{xx} + (-x)^n u_{yy} + \alpha_2 u_x, & x < 0,\ y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$0 < \alpha_1 < 1, \quad n > 1, \quad \frac{1-n}{2} < \alpha_2 < 1. \tag{2}$$

Пусть D - область ограниченная при $x<0$, $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0 : (y-\frac{1}{2})^2 + \frac{4}{(n+1)^2}(-x)^{n+1} = \frac{1}{4}$ с концами в точках $O(0,0)$ и $A(0,1)$, а при $x>0$, $y>0$ прямыми $y=0$, $x=1$, $y=1$.

Введем обозначения: $D_1 = D \cap (x>0, y>0)$, $D_2 = D \cap (x<0, y>0)$, $I = (x,y) : x=0, 0<y<1$.

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача T_p. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$; $(-x)^{\alpha_1}u_x \in C(D_1 \cup I)$, $x^{\alpha_2}u_x \in C(D_2 \cup I)$;

2) $u(x,y) \in C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^{2,2}_{x,y}(D_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях D_j $(j=1,2)$;

3) на линии вырождения I выполняются условия склеивания

$$u(+0,y) = a_1(y)u(-0,y) + b_1(y), \quad (0,y) \in \overline{I},$$

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{\alpha_1}u_x(x,y) = a_2(y)\lim_{x\to+0}(x)^{\alpha_2}u_x(x,y) + b_2(y), \quad (0,y) \in I;$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \le x \le 1; \quad u(x,y)|_{x=1} = \varphi_2(y), 0 \le y \le 1;$$

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\sigma_0},$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x,y)$, $a_i(y)$, $b_i(y)$ $(i=1,2)$ -заданные функции, причем $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$, $\varphi_1(0) = \psi(0,0)$

$$a_i(y), b_i(y) \in C(\overline{I}) \cap C^1(I) \quad (i=1,2), \quad a_1(y)a_2(y) > 0, \quad \forall (0,y) \in \overline{I}, \tag{3}$$

$$\varphi_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \quad \varphi_2(y) \in C(\overline{I}) \cap C^1(I), \tag{4}$$

$$\psi(x,y) \in (-x)^{\varepsilon+1}\widetilde{\psi}(x,y), \quad \widetilde{\psi}(x,y) \in C(\overline{\sigma_0}), \quad \varepsilon > 0; \tag{5}$$

Теорема. Если выполнены (2)-(5), то в области D решение задачи T_p существует и единственно.

Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума[3], а существования - методом интегральных уравнений.

Литература

1. **Исломов Б., Мадрахимова З.С.** *Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.* «Ёш математикларнинг Янги теоремалари-2009». 2009.Наманган. С. 103- 104.

2. **Мадрахимова З.С.** *Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с вырождением типа и порядка внутри области.* «Узбек. мат. журнал». 2010. № 3. С. 44-51.

3. **3. Бицадзе А.В.** *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: «Наука». 1981. 448с.

УДК 517.55

Дифференциальные игры с импульсными управлениями

Мамадалиев Н. А.[1], Мустапокулов Х. Я.[2]
[1,2]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
[1]Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
[2]Международный университет Нордик, Ташкент, Узбекистан;
[1]m_numana59@mail.ru, [2]m_hamdam@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^m$, рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой линейных дифференциальных уравнений [1]

$$\dot{z} = Az - u + v,\ t \geq 0,\ \ z \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где z — фазовый вектор, A — постоянная квадратная $(m \times m)$ матрица, u, v — параметры управления преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Классом допустимых управлений преследующего игрока является множество импульсных функций, которые выражаются через дельта-функцией Дирака [1]. Пусть n — произвольное натуральное число и $M(r)$, $0 \leq r \leq \tau_n$ — произвольное компоктнозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $\int\limits_0^{\tau_n} M(r)dr \subset M_1$. Пусть $v(t)$, $t \geq 0$ — допустимое управление убегающего игрока.

Введем следующие множества

$$\widehat{W_i}\Big(n, M_i(n), v(\cdot)\Big) = \Big[M_i(n) + \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A}P\Big] - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_n - r)A}v(r)dr,$$

$$W_i\Big(n, M_i(n)\Big) = \Big[M_i(n) + \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A}P\Big] \stackrel{*}{-} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_n - r)A}Qdr,$$

$$W_i(n) = \bigcup_{M_i(\cdot)} W_i\Big(n, M_i(n)\Big),$$

где $M_i(n) = \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} M(r)dr$, $v(\cdot) \in Q[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, 2, ..., n$.

Предположение 1. Множества $W_i(n)$ непусты при всех n, i, $n \in N$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Теорема 1. Пусть для системы (1) при импульсном управлении преследователя (2) выполнено предположение 1, множества M_1 и P выпуклы и для начального положения $z_0 \notin M$ и некоторого набора w $N(z_0, w) < +\infty$. Тогда в игре (1)-(2) из заданного начального положения $z_0 \notin M$, возможно завершение преследования за конечное время $\tau_{N(z_0,w)}$.

Литература

1. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** *Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков.* Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. 11:1. 212-224.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ В ТРЕХ ТОЧКАХ ГРАНИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ВЫРОЖДАЮШЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ.

Мирсабуров М.[1], Маматмуминов Д. Т . [2], Турдиев Х. Х.[3]

[1] Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru

[2,3] Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; dilshod310797mdt@mail.ru, xayrullaturdiyev1988@gmail.com

Постановка задачи A**.**

Пусть $D-$ конечная односвязная область полуплоскости $y<0$, ограниченная отрезком AB оси $y=0$, характеристиками AC и BC уравнения

$$-(-y)^m u_{xx}+u_{yy}-\frac{m}{2y}u_y=0, \tag{1}$$

где постоянная $m>0, A=A(-1,0), B=B(1,0)$.

В задачах со смешением [1],[2],[3],[4] условие смещения задается в двух точках граничных характеристик. В настоящей работе в характеристическом треугольнике, для вырождающегося гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом исследуется корректность задачи с условием смешения в трех точках граничных характеристик.

На отрезке AB рассмотрим точку $E=E(c,0)$, где $c\in I=(-1,1)-$ интервал оси $y=0$, и введем линейные функции $p(x)=ax-b$ и $q(x)=a-bx-$ отображающие отрезок $[-1,1]$ на отрезки $[-1,c]$ и $[c,1]$ соответственно, причём $p(-1)=-1$, $p(1)=c$, $q(-1)=1$, $q(1)=c$, т.е. $a=(1+c)/2$, $b=(1-c)/2$

Задача А. В области D найти регулярное решение $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^2(\bar{D})$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\quad x\in[-1,1], \tag{2}$$

$$u[\theta_0(x)]=\mu_2 u[\theta_1(q(x))]-\mu_1 u[\theta_1(p(x))]+\rho(x),\quad x\in[-1,1], \tag{3}$$

где μ_1,μ_2- некоторые положительные постоянные, $\tau(x),\rho(x)\in C^2(\bar{I})-$ заданные функции,

$$\theta_0(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{m+2}{4}(1+x_0)\right]^{2/m+2}$$

-аффикс точка пересечения граничной характеристика AC с характеристикой исходяшей из точки $x_0\in[-1,1]$, а $\theta_1(p(x_0))$ и $\theta_1(q(x_0))$ -аффиксы точек пересечения граничной характеристики BC с характеристиками исходяшей из точек $(p(x_0),0)$ и $(q(x_0),0)$ соответственно.

2. Исследование задачи А.

Формула Даламбера [5],[6], дающей в области D для уравнения (1) решение видоизменной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0)=\tau(x), x\in\bar{I};\qquad \lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in I;$$

имеет вид

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau\left(x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)+\tau\left(x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)\right]-$$

$$-\frac{(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\int_{-1}^{1}\nu\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)dt. \tag{4}$$

С помощью формулы Даламбера (4) нетрудно вычислить значения

$$u[\theta_0(x)]=\frac{1}{2}[\tau(-1)+\tau(x)]-\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\nu(t)dt, \tag{5}$$

$$u[\theta_1(p(x))]=\frac{1}{2}[\tau(1)+\tau(p(x))]-\frac{1}{2}\int_{p(x)}^{1}\nu(t)dt, \tag{6}$$

$$u[\theta_1(q(x))]=\frac{1}{2}[\tau(1)+\tau(q(x))]-\frac{1}{2}\int_{q(x)}^{1}\nu(t)dt. \tag{7}$$

Подставляя теперь (5),(6) и (7) в краевое условие (3) и вычислив производную по x, с учетом равенства (2) имеем функционалное уравнение

$$\nu(x)=\delta_1\nu(p(x))+\delta_2\nu(q(x))+F(x), \tag{8}$$

где

$$F(x)=\tau'(x)-a\mu_1\tau'(p(x))+b\mu_2\tau'(q(x))-2\rho(x),$$

известная функция. Уравнения (8) является функциональным уравнением с двумя сдвигами $p(x)$ и $q(x)$

Теорема 1. *Задача A при выполнении условия*

$$\delta_1+\delta_2<1, \tag{9}$$

однозначна разрешима, где $\delta_1=a\mu_1,\ \ \delta_2=b\mu_2$

Доказательство теоремы проводится методом работ [5],[6].

Литература

1. **Жегалов В.И.** *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии.* // Учен.зып. Казанск.ун-та. 1962, том 122, №3, с.3-16.
2. **Нахушев А.М.** *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа.* Дифференциальные уравнения. 1969, том 51, №1, с.44-59.
3. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М. 1985. 304 с.
4. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005 "Университет" -224 с.
5. **Мирсабурова Г. М.** *Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений.* Известия вузов. Математика. 2022, № 6, с.54-59.
6. **Мирсабуров М., Маматмуминов Д.Т.** *адача с аналогом условия Бицадзе-Самарского на отрезке вырождения и параллельном ему внутреннем отрезке области для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений.* Известия вузов. Математика. 2025, № 3, с.25-29.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С НЕДОСТАЮЩИМ УСЛОВИЕМ ТРИКОМИ НА ГРАНИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ И АНАЛОГОМ УСЛОВИЯ ФРАНКЛЯ НА ОТРЕЗКЕ ВЫРОЖДЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Мирсабуров М.[1], Тураев Р.Н. [2], Мирзаев Ф.С.[3]

[1] Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан; miraburov@mail.ru

[2] Термезский государственный университет инженерии и агротехнологий, Термез, Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru

[3] Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан; fayzullamirzayev95@gmail.com

Постановка задачи A. Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\Gamma:\ x^2 + \dfrac{4}{(2-m)^2}y^{2-m} = 1$, с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y < 0-$ характеристиками

$$AC:\ x - \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2} = -1 \quad \text{и} \quad BC:\ x + \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения

$$u_{xx} + (signy)|y|^m u_{yy} + \alpha|y|^{m-1}u_y = 0, \tag{1}$$

где $m, \alpha-$ постоянные, причем

$$0 < m < 2, \quad m - 1 < \alpha < m/2. \tag{2}$$

В задаче Трикоми во всех точках характеристики задается значение искомой функции: $u(x,y)\ |_{AC_0} = \psi(x)$. В настоящей главе исследуется корректность задачи, где часть характеристики освобождена от краевого условия и это недостающее условие Трикоми заменено аналогом нелокального условия Франкля [1] на отрезке вырождения AB.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие, соответственно, в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1, соответственно, точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)$ -интервал оси $y = 0$. Пусть $p(x)$ линейная функция множества точек отрезка $[-1,c]$ во множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$: то есть $p(x) = a - bx$, где $b = (1-c)/(1+c)$, $a = 2c/(1+c)$.

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области Ω^+;

3) $u(x,y)-$ обобщенное решение уравнения (1) из класса R_1 $[2, c.113]$ в области $\Omega^- \setminus (EC_0 \bigcup EC_1)$;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\ |_{\overline{\Gamma}} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Gamma}, \tag{3}$$

$$u(x,y)\ |_{AC_0} = \psi(x), \quad x \in [-1,(c-1)/2], \tag{4}$$

$$u(p(x),0) = \mu u(x,0) + f(x), \quad x \in [-1,c]; \tag{5}$$

5) $y^\alpha u_y(x,y) \in C\left(\Omega^+ \bigcup J_1 \bigcup J_2\right)$, $(-y)^\alpha u_y(x,y) \in C\left(D^- \bigcup J_1 \bigcup J_2\right)$ и на $J_1 \bigcup J_2$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\lim_{y\to+0}y^{\alpha}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},\quad (x,0)\in J_1\bigcup J_2,$$

где $\varphi(x,y),\ \psi(x), f(x)-$ заданные функции, причем $\varphi(-1,0)=\psi(-1)=0$,

$$\mu=const<0, \tag{6}$$

$$\varphi(x,y)=y^{\varepsilon+1}\varphi_1(x,y),\ \varphi_1(x,y)\in C(\overline{\Gamma}),\ \varepsilon>0,$$

$$f(x)\in C^1[c;1]\bigcap C^2[c;1),\ \psi(x)\in C^1[-1;(c-1)/2]\bigcap C^2[-1;(c-1)/2),$$

причем $f''(x)$ и $\psi''((x-1)/2)$ соответственно может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-\beta$ при $x\to c$, где $2\beta=(2\alpha-m)/(2-m)$.

Где условия (3) является условием Дрихле на , условие (4) является неполным усмловием Трикоми на характеристике AC_0, условие (5) есть аналог условия Франкл на отрезке вырождения AB.

Введем обозначения

$$u(x,0)=\tau(x),\quad (x,0)\in\overline{J}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu^-(x),\qquad \lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu^+(x),\ (x,0)\in J$$

тогда условие (6) примет вид

$$\nu^-(x)=-\nu^+(x),\quad x\in J.$$

Единственность решения задачи A.

Теорема 1. *Если выполнены условия (2), (6) то задача A не имеет более одного решение.*

Теорема 1 доказывается методом работ [3, 4]

Литература

1. **Мирсабуров М.** *Задача с недостающим условием Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа.* Дифференциальные уравнения. 2014. т. 50, №1. С. 78–87.

2. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М. :Высшая школа. 1985. -304 с.

3. **Мирсабурова Г.М.** *Комбинированная задача с условиями Трикоми и Франкля для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.* Известия вузов. Математика. - 2013. №7. - С. 16-30.

4. **Мирсабуров М., Исломов Н. Б.** *Об одной задаче с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа второго рода.* Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. №10. С. 1384-1396.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С НЕПОЛНЫМ УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Мирсабуров М.[1], Рузиева З. Ф.[2]
[1]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru
[2]Денауский институт предпринимательства и педагогики, Денау, Узбекистан;
zuxraruziyeva00@gmail.ru

Постановка задачи BSF (Бицадзе, Самарского, Франкля)

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$,D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0),\ B(1,0)$. J=(-1,1)-интервал оси $y = 0$. В уравнение (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяюшие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < (m+2)/2,\ -m/2 < \beta_0 < 1$.

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах уравнения. На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^* B_0^* C_0^*$ ограниченный прямыми

$$A_0^* C_0^* : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2,\ B_0^* C_0^* : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2,\ A_0^* B_0^* : \beta_0 = 1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1)[1].

Рассмотрим случай $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta A_0^* B_0^* C_0^*$,.Обозначим через C_0 и C_1точки пресечения граничних характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходяшими из точки $E(c, 0)$,где c -некоторое число,принадлежашее интервалу J=(-1,1) оси $y = 0$ Пусть $p(x) \in C^1[-1, c]$-диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1, c]$ во множества точек отрезка $[c, 1]$,причем $p'(x)<0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = d - kx$, где $k = \frac{1-c}{1+c}$, $d = \frac{2c}{1+c}$.

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R, 0),\ B_R = B_R(R, 0)$:

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2,\ -R \le x \le R,\ 0 \le y \le ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $J_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1,\ y = 0\},\ J_2 = \{(x, y) : 1 < x < +\infty,\ y = 0\}$, $D_R = D_R^+ \cup D^- \cup J$,$D_R$ -подобласть неограниченной области D.

Задача BSF. В неограниченной области D требуется найти функцию $u(x, y)$ удовлетворяюшим условиям :

1) функция $u(x, y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R^+$, неограниченной области D;

2) $u(x, y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x, y)$ является обобшенным решением класса R_1 [1.с.35] в области D^-;

4) на интервале вырождения J имеет место следуюшее условие сопряжения

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial\, u}{\partial y},\ x \in J,$$

причем эти пределы при $x \to \pm 1$, $x \to c$, могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha = (m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2))$, $\beta = (m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2)), \alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta < 1$;
5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to+\infty} u(x,y) = 0,$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x) \quad x \in \overline{J}_1, u(x,0) = \varphi_2(x) \quad x \in \overline{J}_2,$$

$$D^{\alpha}_{-1,x}(1+x)^{\alpha+\beta-1}u\left[\theta_0\left((x)\right)\right] = a(x)u(x,0) + b(x) \quad x \in (-1,c), \tag{2}$$

$$u\left(p(x),-0\right) - \mu(x)u\left(x,-0\right) = f(x), \ x \in (-1,c), \tag{3}$$

Введя обозначение $u\left(x,0\right) = \tau(x), \ x \in \overline{J}$, условия (3) запишем в виде

$$\tau(p(x)) - \mu(x)\tau(x) = f(x), \ x \in \overline{J}.$$

$D^{l}_{-1,x}, -$ оператор дифференцирования дробного порядка Римана-Лиувилля. $\theta_0(x)$-аффикс точки пересечения граничной характеристики AC с характеристикой исходяшей из точки $(x_0,0)$, $x \in (-1,c)$, где, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, $a(x), b(x)$, $f(x)$ -заданные непрерывно дифференцируемие функции, в замыкании множества их определение, причем $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_1(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_2(x) = 0$, Заметим, что условие (2) является непольным условием Бицадзе-Самарского [2. с.223], на характеристике AC_0 и на отрезке AE условие (3) есть аналог условия Франкля на отрезке вырождения AB. Единственность решения задачи BSF докажим в работе [3].

Существование решения задачи BSF.

Теорема 1. Задача BSF при выполнении равенств $a_1(x) > 0, a_1'(x) > 0$, $0 < \mu(x) < 1$,

$$\left.\begin{array}{l} \mid A^*(x) \mid \\ \mid B^*(x) \mid \end{array}\right\} \leq \frac{A_0^*\pi \mid lnk \mid}{\sqrt{k}} = \frac{k^{\delta_1+1/2}A_0(c)\mu(c)(1+c)^{2a_0-\delta_0}\Gamma(\delta_1+1)\Gamma(2a_0-\delta_0)}{\Gamma(\delta_1+1+2a_0-\delta_0)} < 1$$

и при

$$\mu_0 - \mu_1 cos(2a_0\pi) - a_1(x) > 0$$

однозначно разрешима Доказательство Теоремы 1 проводиться методами работы [1]

Литература

1. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент: 2005"Университет-224с

2. **Смирнов М.М** *уравнения смешанного типа.* М.,1985,-304С

3. **Мирсабуров.М.,Рузиева.З.Ф** *О единственности решения задачи с неполным условием Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа*Материалы международной конференции "XXI asrda ilm-fan taraqqiyotining asosiy tendensiyalari va xususiyatlari"Денау(Узбекистан)2025йил.

УДК 517.55

Об одной задаче импульсного преследования

Мустапокулов Х. Я.[1], Бекниязов А. Б.[2]
[1,2]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
[1]Международный университет Нордик, Ташкент, Узбекистан;
[1]m_hamdam@mail.ru

Конфликтно управляемый процесс задается уравнением [1]

$$\dot{z} = az - u + v, \tag{1}$$

где $a-$ произвольная константа, $z, u, v \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что $M = lS$, $P = \rho S$, $Q = \sigma S$, где $l-$ неотрицательная, ρ и $\sigma-$ положительные константы, $S-$ единичный шар с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда $M_0 = \{0\}$ и $M_1 = lS$. Поэтому $L = \mathbb{R}^m$, $\pi-$ тождественный (единичный) оператор. Так как $A = aE$, где $E-$ единичная матрица порядка $m \times m$, то фундаментальная матрица имеет вид $e^{tA} = e^{at}E$.

Рассмотрим вначале случай, когда управление преследователя имеет импульсный характер, а управление убегающего $v = v(t)$ является измеримой функцией времени со значениями из σS. Предположим, что точки τ_i расположены равномерно с периодом Δ, т.е. $\tau_i = i\Delta$, тогда управление преследователя примет вид:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - i\Delta),\ u_i \in \rho S.$$

Пусть $n-$ произвольное натуральное число и $M(r) = \frac{l}{n\Delta}S$, $0 \le r \le n\Delta$, $M_i(n) = \int\limits_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} M(r)dr = \frac{l}{n}S,\ i = 1, 2, ..., n.$

Цель настоящей работы - найти новые достаточные условия при выполнении которых из начального положения $z_0 \notin M$, догоняющий может гарантировать завершение преследования при любом допустимом поведении убегающего игрока за конечное время.

Утверждение 1. Пусть $\rho > I_i(1)e^{-a(n-i)\Delta}\sigma$, $i = 1, 2, ..., n$. Если $a \le 0$ или $a > 0$, $l < \|z_0\| < \left(\rho - \frac{e^{a\Delta}-1}{a}\sigma\right)/(e^{a\Delta} - 1)$, то в игре (1) возможно завершение преследования из произвольной начальной точки $z_0 \notin lS$ за конечное время $\tau_{N(z_0,w)}$.

Утверждение 2. Пусть $\rho \le I_i(1)e^{-a(n-i)\Delta}\sigma$, $i = 1, 2, ..., n$. Если $a \ge 0$, то из $z_0 \notin lS$ точки нельзя завершить преследование. При этом убегающему игроку предлагается управление вида $v(t) = \sigma\frac{z_0}{\|z_0\|}$.

Литература

1. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** *Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков.* Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. 11:1. 212-224.

УДК 517.956

Об одной задаче Стефана для реакционно-диффузионной системы

Расулов М. С.[1], Умирхонов М. Т.[2]
[1]Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
rasulovms@bk.ru
[2]Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан;
masudxonumirxonov@mail.ru

В этом исследовании мы рассматриваем систему реакции-диффузии с двумя свободными границами, которая моделирует динамику заживления ран:

$$u_t = (d_1(u,v)\,u_x)_x + f_1(u,v), \quad 0 < t \le T, \quad h(t) < x < s(t), \tag{1}$$

$$v_t = (d_2(u,v)\,v_x)_x + f_2(u,v), \quad 0 < t \le T, \quad -l < x < l, \tag{2}$$

$$u(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \notin (h(t), s(t)), \tag{3}$$

$$v_x(t,-l) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$v_x(t,l) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$s'(t) = -d_1(0,v)u_x(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$h'(t) = -d_1(0,v)u_x(t,h(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad -s_0 \le x \le s_0, \tag{8}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad -l \le x \le l, \tag{9}$$

$$s(0) = s_0 < l, \quad h(0) = h_0 = -s_0, \tag{10}$$

где $x = s(t)$ и $x = h(t)$ – свободные границы, представляющие фронт распространения раны. При этом $u(t,x)$ обозначает плотность здоровых тканей вне раны, а $v(t,x)$ – концентрацию химических и биологических препаратов [1].

Предположим, что данные задачи удовлетворяют следующим условиям:

a) $d_i(u,v) \ge d_{i0} > 0$, d_{i0}, $i = 1,2$;

b) если $0 \le u(t,x) \le M_1$, $0 \le v(t,x) \le M_2$, то определим множество

$$\Omega = \{(u,v) : 0 \le u(t,x) \le M_1,\ 0 \le v(t,x) \le M_2\},$$

причем $0 < M_2 \le M_1$, $d_i(u,v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, $d_{iu}(u,v) \le 0$, $f_{iu}(u,v) \le 0$, $f_{iv}(u,v) \le 0$, $i = 1,2$;

c) $f_1(u,v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$; $f_1(u,v) > 0$ если $u(t,x) \le 0$ и $f_1(u,v) \le 0$ если $u(t,x) \ge M_1$ при любом $v(t,x)$;

d) $f_2(u,v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$; $f_2(u,v) \ge 0$ если $v(t,x) \le 0$, и $f_2(u,v) \le 0$ если $v(t,x) \ge M_2$ при любом $u(t,x)$;

e) $u_0(x) \in C^{2+\alpha}, 0 < u_0(x) < M_1, -s_0 \le x \le s_0$; $u_0(s_0) = u_0(-s_0) = 0$, $u_0'(s_0) < 0$, $u_0'(-s_0) > 0$; $v_0(x) \in C^{2+\alpha}[-l,l], 0 \le v_0(x) \le M_2$; $v_0'(-l) = v_0'(l) = 0$.

В [2] рассмотрена задача (1)-(10) с одним свободным граничным условием и нелокальным граничным условием.

Литература

1. **Chen X., Friedman A.** *A free boundary problem arising in a model of wound healing.* SIAM J.Math.Anal., **32**, No. 4, 788-800 (2000).
2. **Takhirov J. O., Rasulov M. S.** *Problem with free boundary for systems of equations of reaction- diffusion type.* SIAM J.Math.Anal., Ukr. Math. J., **69**, No. 12, 1968-1980 (2018).

УДК 35J15, 35J25, 35J70, 35J75

Об одной краевой задаче для уравнения Хольмгрена с сингулярными коэффициентами

Рузиев М. Х.[1], Казакбаева К. Б.[2]
[1,2]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
[1]ruzievmkh@gmail.com
[2]qalligul96@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{y^{1-m/2}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

где m, α_0 and β_0 – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < \frac{m+2}{2}$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$ в полуплоскости $\Omega = \big\{(x,y) : -\infty < x < \infty, y > 0\big\}$.

Введем следующие обозначения: $J = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$, $J_1 = \{(x,y) : -\infty < x < 0, y = 0\}$, $J_2 = \{(x,y) : 1 < x < \infty, y = 0\}$.

В области Ω рассматривается следующая нелокальная краевая задача.

Задача. Найти функцию $u = u(x,y)$ в области Ω, которая удовлетворяют следующими условиями:

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, где $\bar{\Omega} = \big\{(x,y) : -\infty < x < \infty, y \geq 0\big\}$;

2) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in (-\infty; 0], \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in [1; \infty), \tag{3}$$

$$a_0(x) \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} u_y(x,y) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} \omega(x)_j u(x,0) + a_{n+1}(x) u(x,0) = \Psi(x), \quad 0 < x < 1; \tag{4}$$

3) выполняется условие

$$\lim_{R \to \infty} u(x,y) = 0,$$

где $R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}$, $\quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0$;

4) $\lim\limits_{y \to +0} y^{\beta_0} u_y(x,y)$ при $x = 0$ может стремиться к бесконечности порядка меньше чем $1 - 2\delta$, а при $x = 1$ остаётся ограниченной, где $\delta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$.

В граничных условиях (2)–(4), $a_0(x)$, $a_j(x)$ $(j = 1, \dots n)$, $a_{n+1}(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\Psi(x)$ – заданные функции, причём $a_0(x)$, $a_j(x)$, $\omega_j(x)$, $a_{n+1}(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$, $\Psi(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$, $\sum\limits_{i=0}^{n+1} a_i^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{J}$.

Функция $\varphi_1(x) \in C(J_1)$ может стремиться к бесконечности порядка меньше $1-2\delta$ при $x=0$, функция $\varphi_2(x) \in C(J_2)$ ограничена при $x=1$, и для достаточно больших $|x|$выполняется неравенство $|\varphi_i(x)| \le M|x|^{-1-\sigma}$, where σ, $M=\text{const}$, $\sigma>0$.

Здесь

$$D_{0x}^{\alpha_j} f = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha_j)} \int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+\alpha_j}}, & \alpha_j < 0, \\ \frac{d}{dx} D_{0x}^{\alpha_j - 1} f, & \alpha_j > 0 \end{cases}$$

операторы дробного интегрирования порядка α_j при $\alpha_j<0$ и дробного дифференцирования порядка α_j при $\alpha_j>0$, $\left|\alpha_j\right|<1$. Функция $\Gamma\big(x\big)$ – гамма-функция Эйлера [1].

Очевидно, не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha=\alpha_1>\ldots>\alpha_p>\ldots>\alpha_n$, $\alpha_i>0$, $i=1,\ldots p$, $\alpha_k<0$, $k=p+1,\ldots n$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$a_0(x)\neq 0,\ \frac{a_{n+1}(x)}{a_0(x)} \le 0,\ \omega_j(x)\neq 0,\ j=1,\ldots,n,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{a_j(x)}{a_0(x)\omega_j(x)}\right] \ge 0,\ \frac{a_j(1)}{a_0(1)\omega_j(1)} \le 0, \quad j=1,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j}\omega_j(x) + a_{n+1}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J}.$$

Тогда задача не может иметь более одного решения.

Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергий [2].

Теорема 2. Пусть выполнены условия: а) $\alpha = \max\limits_{(1\le j\le n)} \{\alpha_j\} < \frac{2(1-\beta_0)}{m+2}$; б) $\alpha = \frac{2(1-\beta_0)}{m+2}$. Тогда решение задачи существует.

Доказательство теоремы 2 проводится методом интегральных уравнений [3].

Литература

1. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции.* М.: Наука. – 1974. – т. 2. – 296 с.

2. **Усантешвили М. А.** О задаче с наклонной дробной производной для уравнения Хольмгрена //Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, (1). 144–152 с.

3. **Мусхелишвили Н. И.** *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука. – 1968. – 512с.

УДК 517.956.6

Об одной задачи с интегральным условием для уравнения третьего порядка.

Сагдуллаева М. М.[1,2],

[1]Национальний университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент

[2]Ташкентский университет информационных технологий имени ал-Хоразми,Ташкент

e-mail: sagdullayevam@mail.ru

В $D=\{(x,t): 0<x<l, 0<t<T\}$ рассматрим уравнение в частных производных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c\,(x,t)\ u = f\,(x,t) \tag{1}$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ – заданные функции.

В данной работе для уравнения (1) изучаем нелокальную задачу с интегральным условием в следующей постановке: *Найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le \ell, \tag{2}$$

граничным

$$u_x(0,t)=\mu_1(t), \qquad u_x(l,t)=\mu_2(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{3}$$

и интегральному условию

$$u(0,t)=\lambda(t)\int\limits_0^{\ell} u(x,t)dx+\int\limits_0^{t}\rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau+\mu_3(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ и $\mu_i(t)$ $(i=1,2,3)$, а $\lambda(t)$ и $\rho(t,\tau)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi'(0)=\mu_1(0), \quad \varphi'(\ell)=\mu_2(0), \quad \varphi(0)=\lambda(0)\int\limits_0^{\ell}\varphi(x)dx+\mu_3(0).$$

Известно, что в работе [1] изучены различные краевые задачи для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. Отметим что, нелокальное условие (4) предложено впервые в работе А.И.Кожанова [2], и физически оно выражает расход влаги в почвенном слое от 0 до ℓ.

При определенных условиях гладкости на заданных функциях доказывается регулярная разрешимость поставленной нелокальной задачи (1)-(4).

Литература

1.Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка. // *Дифференц. уравнения.* 1991. – том 27, №10. – С. 1734–1745.

2.Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера.// *Дифференц. уравнения.* 2004. – том 40, №6. – С. 763–774.

УДК 517.95

О продолжении решений задачи Коши для уравнения Пуассона в ограниченной трехмерной области

Сатторов Э.Н.[1], Эрмаматова З.Э.[2], Отамуродов М.Б.[3]
[1,3]Самаркандский государственный педагогический институт, Самарканд, Узбекистан;
[2] Зармед университет, Самарканд, Узбекистан;
[1]Sattorov-e@rambler.ru, [2]ermamatova@mail.ru, [3] mehrojiddinotamurodov@gmail.com

Хорошо известно, что многие физические задачи приводятся к стационарному уравнению математической физики. С точки зрения анализа, основные свойства гармонических, субгармонических и супергармонических функций используются при изучении разрешимости классической задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Уравнения Лапласа и его неоднородная форма – уравнение Пуассона являются основной моделью линейных эллиптических уравнений.

Пусть R^3 вещественное трехмерное евклидово пространство и $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$, $\alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$, $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2$.

Ω - ограниченная односвязная область в R^3 с границей $\partial\Omega$ состоящей из части плоскости $y_3 = 0$ и гладкой дуги кривой S Ляпунова, лежащей в полуплоскости $y_3 \geq 0$.

В работе рассматривается задача восстановления решения уравнения Пуассона [3], [4]

$$-\Delta U(x) \equiv -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = f(x), \tag{1}$$

в области по ее известным значениям и значениям ее нормальной производной на части границы

$$\begin{cases} U(x) = f_1(x), & x \in S, \\ \frac{\partial U(x)}{\partial \nu} = f_2(x), & x \in S, \end{cases} \tag{2}$$

т.е. дается явная формула продолжения решения задачи Коши.

Решение задачи Коши (1)-(2) будем строить в области Ω, когда данные Коши заданы на части S границы. Задача Коши для уравнения Пуассона относится к числу некорректно поставленных задач [1], [2].

Будем предполагать, что решение задачи существует (тогда оно единственно) и принадлежит классу $H(\Omega) \cap C(\Omega)$ и данные Коши заданы точно. В этих условиях устанавливается явная формула продолжения, которая является аналогом классической формулы Б. Римана, В. Вольтера и Ж. Адамара, построенной ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений. Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданным уклонением в равномерной метрике, при этом если решение и его нормальная производная ограничены на части T границы заданным положительным числом, то предлагается явная формула регуляризации.

Метод получения указанных результатов основан на конструкции в явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на T, когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве $y_m > 0$ $(m = 2, 3)$. Следуя М. М. Лаврентьеву, фундаментальное решение с указанным свойством назовем функцией Карлемана для полупространства [1]. После построения функции Карлемана в явном

виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши, выписываются в виде разности обобщенных потенциалов простого и двойного слоев. Полученная формула продолжения позволяет сформулировать критерий разрешимости задачи Коши.

Классическая интегральная формула Грина показывает, что любая функция из $C^2(\overline{\Omega})$ в области [5, с. 26] с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ может быть представлена в виде суммы гармонической функции и ньютонова потенциала от ее лапласиана. Поэтому неудивительно, что изучение уравнения Пуассона в значительной степени может быть осуществлена с помощью изучения ньютонова потенциала f. Если функцию f предполагать только непрерывной, то ньютонов потенциал

$$W(x) = \int_{\Omega} h(y-x)f(y)dy, \tag{3}$$

где $h(y-x) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|y-x|}$ фундаментальное решение уравнения Лапласа, может не быть дважды дифференцируемым. Классом функций полезным и удобным при изучении ньютонов потенциала, является класс непрерывных функций по Гёльдеру.

Литература

1. **Адамар Ж.** *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* М.: Наука, 1978. - 352 с.
2. **Айзенберг Л.А.** *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения.* Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. - 248 с.
3. **Соболев С.Л.** *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1989. - 424 с.
4. **Уэрмер Дж.** *Теория потенциала.* М.: Мир, 1980. - 136 с.
5. **Гилбарг Д., Трудингер Н.** *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989. - 464 с.

УДК 517.956.45

Краевая задача для нелинейного параболического уравнения

Тураев Р. Н.[1], Хуррамов А. Т.[2]
[1]Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан;
rasul.turayev@gmail.com1
[2]Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан;
xurramovabbos625@gmail.com2

В математической физике параболические уравнения играют важную роль, так как они используются для моделирования многих физических процессов.Эти уравнения описывают системы, связанные с теплопроводностью, диффузией и другими изменениями, зависящими от времени.Параболические уравнения делятся на два основных типа: линейные и нелинейные.Их характер и практическое применение в различных областях приводит к заметным различиям.

Линейные уравнения часто применяются для моделирования теплопроводности, распространения частиц или в финансовых моделях.Их решения гораздо проще и чаще всего находятся с помощью аналитических методов.Нелинейные параболические уравнения, как следует из их названия, описывают более сложные системы, поскольку взаимосвязи между их переменными носят нелинейный характер.Это означает, что переменные взаимосвязаны

сложным образом, и производные не ограничиваются простыми линейными коэффициентами.Во второй половине прошлого века наблюдалась бурная активность и развитие в области нелинейной теории диффузии, что иллюстрируется проблемами Стефана для нелинейного параболического уравнения [1].В данной работе рассматривается краевая задача для более простой квазилинейной параболической задачи.

Постановка задачи. Расмотрим уровнения

$$u_t(x,t) = a(u)u_{xx}(x,t) \quad (x,t) \in D \tag{1}$$

в конечной односвязной области $D = \{(x,t) : 0 < x \leq l,\ 0 < t \leq T\}$ в области D требуется найти $u(x,t) \subset (\overline{D})$ удовлетворяющую следующим условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq l \tag{2}$$

$$u(0,t) = mu(x_0,t),\ 0 < t \leq T,\ 0 < x_0 < l, \tag{3}$$

$$u(l,t) = \mu(t),\ 0 \leq t \leq T \tag{4}$$

Здесь $u(x,t)^-$ это физический параметр, изменяющийся в среде (например, интенсивность тепла или концентрация), t^- время, а x^- пространственная координата, $m \in (0,1)-$ постаянное число.

В данной задаче будем считать, что выполняются следующие условия:

1. $a(u)$ функция, зависящая от свойств процесса, и $0 < a_0 \leq a(u)$;
2. $\varphi(t)$ $\psi(t)$ и $\mu(t)$ заданные непрерывные функции;
3. Пусть выполняются следующие условия согласования: $\varphi(0) = \psi(0),\ \ \varphi(l) = \psi(0)$.

Сначала устанавливаются априорные оценки для решения $u(x,t)$ и его производных.

Лемма 1. Если выполняются условия $1. - 3.$ то для задачи $(1) - (4)$ априорная оценка

$$|u(x,t)| \leq M \tag{5}$$

имеет место, здесь $M = max|\max\limits_x|\varphi(x)|, \max\limits_t|\psi(t)|, \max\limits_t|\mu(t)||$.

Лемма 1 доказывается методом работ [2, 3].

Далее устанавливаются априорные оценки в норме Гельдера типа Шаудера. На основе установленных априорных оценок доказываются теорема единственности и существование решения.

Использованная литература:

1. Готтштайн Г. Физико-химические основы материаловедения. Пер. с англ. /-Москва: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2011. - 400 с.
2. Takhirov J.O., Turaev R.N. The free boundary problem without initial condition. Journal of Mathematical Sciences, (New York), Vol.187, No.1, (2012). pp. 86-100.
3. Turaev R.N. Nonlocal Florin problem for quasilinear diffusion equation taking into account nonlinear convection. Bulletin of University of Karaganda. 2020. No 4. P.12-21.

УДК 517.956.6

ОБ ОБЩИХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Тураев Х.
Термезский государственный педагогический институт, Термез, Узбекистан;
haydarturayev1950@gmail.com

Аннотация: В настоящей работе изучается вопросы при замене независимого переменного $t = \varphi(\xi)$, где φ есть произвольная функция, имеющая обратную функцию $\xi = \psi(t)$ не изменимость линейности и однородности данного уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t) \overset{(k)}{\overline{x}} = g(t),$$

для которого рассматривается на множестве E.

Ключевые слова: общее, уравнения, периодические, переменная, обратное, общее свойство, функциональное уравнение, средное производное

В этой работе изучена общие свойства линейное функциональное уравнение n-го порядка вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t) \overset{(k)}{\overline{x}} = g(t), \tag{1}$$

где $t \in R_1,\ a_k(t),\ g(t),\ \sigma(t) \neq t, k = 1, ...n, (a_n(t) \neq 0), t \in R_1,\ \sigma(t) = t,\ \sigma_k(t) = \sigma_{k-1}(t)$-известные функции ; $\bar{x}(t) = \frac{x(\sigma(t))-x(t)}{\sigma(t)-t}$,

$$\bar{\bar{x}}(t) = \overline{x(t)} = \frac{1}{1-\sigma(t)}\left[\frac{x(\sigma_2(t)) - x(\sigma(t))}{\sigma_2(t) - \sigma(t)} - \frac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\sigma(t) - t}\right], ..., \overset{(k)}{\overline{x}} = ... \overset{(k-1)}{\overline{x}} = ...$$

соответственно средние производные от функции $x(t)$ по функции $\sigma(t)$, где $\overset{(0)}{\overline{x}}(t) = x(t)$ [1].

Отметим следующие его общие свойства: Уравнение (1) остаётся линейным при замене независимого переменного . В самом деле, преобразуем независимое переменное подстановкой

$$t = \varphi(\xi) \tag{2}$$

где φ есть произвольная функция, имеющая обратную функцию $\xi = \psi(t)$ на множестве E. Вычисляя выражения средних производных x по t через средние производные по новому независимому переменному, находим, что

$$\bar{x}(t) = \frac{x(\sigma(\xi)) - x(\xi)}{\sigma(\xi) - \xi} \cdot \bar{\xi}(t) = \bar{x(\xi)} \cdot \bar{\xi}(t),$$

$$\bar{\bar{x}}(t) = \bar{\bar{x}}(\xi) \cdot \bar{\xi(\sigma(t))} + \bar{\xi} \cdot \bar{\bar{x}}(t)...$$

Легко видеть, что вообще, $\overset{(k)}{\overline{x}}$ выразится линейно (и однородно) через $\bar{x}(\xi),\ \bar{\bar{x}}(\xi), ..., \overset{(k)}{\overline{x}}(\xi)$, с коэффициентами, являющимися функциями от ξ; вставляя эти выражения в уравнение (1) и производя в коэффициентах $a_k(t)$ и в свободном члене $g(t)$ замену (2), мы опять получим линейное уравнение вида $\sum_{k=0}^{n} b_k(\xi) \overset{(k)}{\overline{x}}(\xi) = d(\xi)$, причём $b_n(\xi) \neq 0$.

Примичание. Очевидно, подстановка (2) преобразует однородное линейное уравнение снова в однородное.

Литература

1. **Тураев Х, Хусанов. Д. Х.** *Структура общего решения линейных дифференциально-функциональных уравнений первого порядка нейтрального типа* // Докл. АН УзССР. Сер. Физ. Мат. наук. 1989. №2.с.11-13

Обобщенные операторы дробного интегрирования с ядром гипергеометрической функций Гаусса

Хасанов А.
Институт математики им. В.И. Романовского, г. Ташкент

Рассматривается право и лево сторонние обобщенные операторы интегрирования

$$F_{0x}^{-c}(a,b;c)\,\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int\limits_0^x\varphi(t)(x-t)^{c-1}F\left(a,b;c;\frac{x-t}{x}\right)dt,\quad c>0, \tag{1}$$

$$F_{x\infty}^{-c}(a,b;c)\,\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int\limits_x^\infty\varphi(t)(t-x)^{c-1}F\left(a,b;c;\frac{x-t}{x}\right)dt,\quad c>0, \tag{2}$$

$$F(a,b;c;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m m!}x^m, \tag{3}$$

$$(a)_m=\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}=a(a+1)(a+2)\cdots(a+m-1), \tag{4}$$

$F(a,b;c;x)$ - гипергеометрическая функция Гаусса и $(a)_m$ - обозначения Похгаммера и $x\in(0,\infty)$, $a,b,c\in\mathbb{C}$, причем $\operatorname{Re}c\neq 0,-1,-2,...$, $\varphi(x)\subset S(R_+)$ пространство Шварца.

Изучаются свойства право и лево сторонних операторов обобщенного интегрирования (1) и (2), находится суперпозиция указанных операторов, указывается обратные операторы и связь между право и лево сторонними обобщенными операторами.

Литература

1. **Love E.R.** *Some integral equations involving hypergeometric functions.* Proc. Edinburgh. Math. Soc. 15, (3), 1967, pp. 169-198.
2. **Jet Wimp.** *Two integral transform pairs involving hypergeometric functions.* Proc. Glasgow Math. Assoc. 7 (1965), 42-44.
3. **McBride Adam C** *Solution of hypergeometric integral equations involving generalized functions.* Proc. Edinburgh. Math. Soc. 19, (3), 1975, pp. 265-285.
4. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** *Fractional intearals and derivatives: theorv and applications.* Gordon and Breach Science Publishers, USA, 1993.
5. **Хасанов А.** *Об одной смешанной задаче для уравнения* $sign y|y|^m u_{xx}+x^n u_{yy}=0$. Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, № 2, 1982, 28-32.
6. **Салахитдинов М.С, Хасанов А.** *Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения.* Дифференциальные уравнения, 19

(1), 1983, 110-119.

УДК 517.957

Задачи Коши для нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с источником интегралного типа

Хоитметов.У,А.[1], **Хасанов.Т,Г.**[2]

[1]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан; e-mail1 x_umid@mail.ru

[2]Ташкентский Международный Университет Кимё Филиал Самарканд, Самарканд, Узбекистан; e-mail2 temur.xasanov.2018@mail.ru

Аннотация: В этой работе построен алгоритм интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и источником интегрального типа в классе быстроубывающих функций.

Ключевые слова: уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами, оператор Штурма- Лиувилля, решения Йоста, интегральное уравнение Гельфанда- Левитана-Марченко.

В данной работе рассматривается система нелинейных нагруженных уравнений вида:

$$u_t + P(u(x_0,t))\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) + Q(u(x_1,t))u_x = 2\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\eta,t)\varphi(x,-\eta,t)d\eta, \qquad (1)$$

$$L(t)\varphi = \eta^2\varphi \qquad (2)$$

где

$$u = u(x,t), \quad L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t),$$

и $P(u(x_0,t))$, $Q(u(x_1,t))$- некоторые многочлены от $u(x_0,t)$ и $u(x_1,t)$ соответственно, а x_0, $x_1 \in R$. Система нелинейных уравнений (1)-(2) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in R \qquad (3)$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладают следующими свойствами:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u_0(x)|\,dx < \infty. \qquad (4)$$

2) Оператор $L(0) := -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ имеет равно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$, ..., $\lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче функция $\varphi(x,\eta,t)$- решение уравнения (2), определяемое асимптотикой $\varphi(x,\eta,t) = h(\eta,t)e^{-i\eta x}$, при $x \to \infty$, где $h(\eta,t)$- изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta,t)h(-\eta,t)d\eta < \infty, \;\; t > 0. \qquad (5)$$

Пусть функции $u(x,t)$ и $\varphi(x,\eta,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своими пределами при $x \to \pm\infty$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[(1+|x|)\,|u(x,t)| + \sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^3}\right|\right]dx < \infty, \quad t > 0, \qquad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(|\varphi(x,\eta,t)|^2+|\varphi(x,-\eta,t)|^2+\left|\frac{\partial\varphi(x,\eta,t)}{\partial\eta}\right|^2\right)d\eta<\infty. \tag{7}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения точных решений $u(x,t)$, $\varphi(x,\eta,t)$, $x\in R$, $t>0$ задачи (1)-(7) сведением её к обратной задаче теория рассеяния для оператора $L(t)$. Уравнеия (1) изучался в работах [1]-[4] в классе периодических функций. Кроме того, в работе [4] уравнеия (1) исследована с другим источником.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Если функции $u(x,t)$, $\varphi(x,\eta,t)$, $m=\overline{1,N}$, $x\in R$, $t>0$ является решением задачи (1)-(7), то данные рассеяния $\left\{r^+(k,t),\ \lambda_n(t),\ B_n(t),\ n=\overline{1,N}\right\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$, удовлетворить следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt}=0 \tag{8}$$

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt}=\left(8ik^3P(u(x_0,t))-2ikQ(u(x_1,t))-\right.$$
$$\left.-2iV.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(\eta)|^2}{\eta-k}d\eta-2\pi\,|h(k)|^2\right)r^+(k,t) \tag{9}$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt}=\left(8\chi_n^3P(u(x_0,t))+2\chi_nQ(u(x_1,t))-\right.$$
$$\left.-2\chi_n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(\eta,t)|^2}{(\eta^2+\chi_n^2)\left(1-|r^+(\eta)|^2\right)}d\eta\right)B_n(t),\ \ n=1,2,3,...,N \tag{10}$$

Замечание. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(7).

Пусть задана функция $u_0(x)\,(1+|x|)\in L^1(R)$. Тогда решение задачи (1)-(7) находится с помощью следующего алгоритма.

1. Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ получаем данные рассеяния $\left\{r^+(k),\ \chi_n,\ B_n,\ n=\overline{1,N}\right\}$ для оператора $L(0)$.

2. Используя теорему 1, находим данные рассеяния для $t>0$

$$\left\{r^+(k,t),\ \chi_n(t),\ B_n(t),\ n=\overline{1,N}\right\}.$$

Используя метод, опирающийся на интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим $u(x,t)$ из данных рассеяния для $t>0$, полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение $\varphi(x,\eta,t)$ уравнения $L(t)\varphi_m(x,\eta,t):=-\varphi_m''(x,\eta,t)+u(x,t)\varphi_m(x,\eta,t)=\lambda_m\varphi_m(x,\eta,t)$, $m=1,2,...,N$.

Приведем пример иллюстрирующий изложенный алгоритм.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} u_t+p(t)\,(u_{xxx}-6uu_x)+q(t)u_x=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\eta,t)\varphi(x,-\eta,t)d\eta \\ L\varphi\equiv-\varphi''(x,\eta,t)+u(x,t)\varphi(x,\eta,t)=\eta^2\varphi(x,\eta,t) \end{cases}$$

$$u(x,0) = -\frac{2}{ch^2 x},\ x \in R,,$$

Здесь

$$p(t) = -\frac{t}{8},\ \ q(t) = \frac{3t}{2} + \frac{\pi}{8},\ \ h(\eta,t) = \frac{1}{\sqrt{\eta^2+1}}.$$

Используя изложенный алгоритм можно найти решение задачи:

$$u(x,t) = -2\frac{d}{dx}K_+(x,x,t) = -\frac{2}{ch^2\left(x - \frac{t^2}{2}\right)},\ \ \varphi_1(x,t) = \frac{i\eta + th(x - \frac{t^2}{2})}{(1+i\eta)\sqrt{\eta^2+1}}e^{-i\eta x}.$$

Литература

1. **Khasanov A.B., Khasanov T.G.** *The Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation in the class of periodic infinite-gap functions.* Zap. Nauchn. Sem. POMI. vol.:506 (2021), 258–278.
2. **Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г.** *Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом и источником.* Сибирский журнал индустриальной математики, № 2(90), (2022), 127–142.
3. **Khasanov A.B., Khasanov T.G.** *Cauchy Problem for the Loaded Korteweg-de Vries Equation in the Class of Periodic Functions.* Differential equations vol.:59, No.12, (2023), 1678–1690.
4. **Hoitmetov U.A., Khasanov T.G.** *Integration of the Korteweg-de Vries equation with loaded terms and a self-consistent source in the class of rapidly decreasing functions.* Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. vol.:33, issue 1, (2023), 156–179.

УДК 517.95

Об оценке неотрицательных решений уравнения теплопроводности с сингулярным потенциалом

Худайкулиев Б.А.[1]
[1] Туркменский государственный институт финансов, Ашхабад, Туркменистан;

Эллиптические и параболические уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами являются важной областью математических исследований, бросающей вызов классической теории и требующей специализированных инструментов для анализа. Особенность коэффициентов – когда они могут быть неограниченными или вырождаться в определенной точке или границе – может кардинально изменить поведение решений и их регулярность.

Задачи, связанные с сингулярными коэффициентами, возникают во многих областях науки и техники, например, в финансовой математике, в квантовой физике и в математической биологии.

В работе изучается поведение неотрицательных обобщенных решений в окрестности начала координат первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t - \Delta u = V(x)u + f(x,t),\quad x \in B,\quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0,\quad x \in \partial B,\quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad x \in B \tag{1}$$

в цилиндре $B \times (\ 0,\ \ T\ )$, где $B = B(0,r) \subset R^n (n \geq 3)$ – шар радиуса $r \leq 1$ с центром в начале координат и $T > 0$.
В качестве решения уравнения (1) понимается обобщенная функция $u(x,t) \in D^{/}(B \times (\ 0,\ \ T\ ))$ такая, что $u(x,t) \geq 0$, $Vu \in L^1_{loc}(B \times (\ 0,\ \ T\ ))$.
Предполагается, что $0 \leq V \in L^1_{loc}(B)$, $0 \leq u_0 \in L^1(B)$, $0 \leq f \in L^1(B \times (0,T))$. Условие (3) выполняется в смысле
$ess \lim\limits_{t \to +0} \int_B u(x,t)\psi(x)dx = \int_B u_0(x)\psi(x)dx$ при любой $\psi \in D(B)$.
Пусть $V_0(x) > 0$ такая функция, что $V_0 = -\Delta\varphi/\varphi$, где

$$\varphi > 0, \quad \Delta\varphi \in L^1_{loc}(B), \quad \int_B u_0(x)\varphi(x)dx < \infty \tag{4}$$

и при некотором $p \geq 2$ выполняется неравенство Соболева с весом $\varphi(x)$:

$$\left(\int_B |h|^p \varphi^2(x)dx \right)^{2/p} \leq C \left(\int_B |\nabla h|^2 \varphi^2(x)dx + \int_B |h|^2 \varphi^2(x)dx \right) \tag{5}$$

при любой функции $h \in C^1(B)$, где $C = Const > 0$.
В случае $\varphi = |x|^{-\alpha}$ поведение неотрицательных решений задачи (1)-(3) изучено в работе [1]. Кроме того, задача (1)-(3) изучаются также в работах [2-5].
Основным результатом настоящей работы является следующая теорема:
Теорема. Пусть $V(x) > 0$, $V \in L^1_{loc}(B)$ и пусть $V_0(x) = -\Delta\varphi/\varphi$, где $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (4) и (5). Если $V > V_0$ и $u_0(x) > 0$ в области $B \times (0,\varepsilon)$ при любом $\varepsilon \in (0,T)$, то для любой подобласти $\Omega^{/} \subset\subset B$ существует постоянная $C = C(\varepsilon, \Omega^{/}) > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$u(x,t) \geq C\varphi(x). \tag{6}$$

Литература

1. **Baras P., Goldstein J.A.** *The heat equation with a singular potential.* // Trans. Amer. Math. Soc.,1984,v.284, no 1,p.121-139.. M.: Наука. – 1974. – т. 2. – 296 с.
2. **Goldstein J.A., Qi S. Zhang.** *Linear parabolic equations with strong singular potentials.* // Trans. Amer. Math. Soc., 355:1 (2002),197-211.
3. **Худайгулыев Б.А.** *Уравнение теплопроводности с сингулярным потенциалом.* // Дифференциальные уравнения. 33:4 (1997),567-569.
4. **Худайгулыев Б.А.** *Параболическое уравнение с сингулярным потенциалом.* // Дифференциальные уравнения. 44:6 (2008).
5. **Hudaykuliyev B.A.** *On a nonnegative solutions of the heat equation with singular potential in the conical domain.* // //TWMS journal of Pure and Applied Mathematics. 1:2 (2010).

УДК 517.95

Об одной краевая задаче типа задачи Бицадзе-Самарского для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения Геллерстеда с сингулярными коэффициентами

Чориева С.Т.[1], Тошмуродова М.[2]
[1,2]Термезский государственный университет, г.Термез, Узбекистан;
sanamchoriyeva3@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$-|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 |y|^{m/2-1} u_x + (\beta_0/y) u_y = 0. \tag{1}$$

В уравнении (1) предполагается, что постоянные $m > 0$, α_0 и β_0 удовлетворяют условиям $-(m/2) \le \beta < 1$, $0 \le \alpha_0 < (m+2)/2$.

Корректность постановки краевых задач для (1) существенно зависит от его параметров α_0 и β_0 при младших членах [1-3].

На плоскости параметров $\alpha_0 \circ \beta_0$ рассмотрим треугольник $S_0B_0C_0$ ограниченный прямыми

$$S_0B_0 : \beta_0 = 1, B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -(m/2), C_0S_0 : \alpha_0 = 0.$$

Пусть Ω - конечная односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная характеристиками

$$\left.\begin{matrix} AC_1 \\ BC_1 \end{matrix}\right\} : x \pm \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = \pm 1, \ y > 0$$

$$\left.\begin{matrix} AC_2 \\ BC_2 \end{matrix}\right\} : x \pm \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = \pm 1, \ y < 0$$

уравнения (1).

Пусть $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta S_0B_0C_0$, т.е. $\alpha \ge 0, \beta < 1, 0 \le \alpha + \beta < 1, \beta < \alpha$ где

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = \frac{m + 2(\beta_0 \pm \alpha_0)}{2(m+2)}.$$

Приведем определение операторов дробного интегрирования и дифференцирования [4] которых мы используем ниже: пусть $f(x)-$ произвольная функция из класса $L(a,b)$, $a < b < \infty$. Введём обозначения

$$D^l_{a,x} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+l}}, \text{ при } l > 0 \\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D^{l-(n+1)}_{a,x} f(x), \text{ при } l < 0 \end{cases}$$

$$D^l_{x,b} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1+l}}, \text{ при } l > 0 \\ (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D^{l-(n+1)}_{x,b} f(x), \text{ при } l < 0 \end{cases}$$

где $D^l_{a,x}$ и $D^l_{x,b}$ представляют собой операторы дробного интегрирования порядка l, при $l < 0$ и обобщенные производные в смысле Лиувилля порядка l при, $l > 0, n = [1]$ - целая часть числа l.

Задача Г. Найти в области Ω регулярное решение

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y),\ (x,y)\in\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\},\\ u_2(x,y),\ (x,y)\in\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\},\end{cases}$$

уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2)\cap C^2(\Omega\setminus AB)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_j[\theta^{(j)}(x)]=\Sigma_{i=1}^{n}\mu_i u_j[\theta_{k_i}^{(j)}(x)]+\delta_j(x),\ \forall x\in I=AB,\ j=1,2 \tag{2}$$

здесь $j=1$ соответствует области Ω_1, а $j=2-$ области Ω_2, и условиям сопряжения [4]

$$\lim_{y\to+0}u_1(x,y)=c\lim_{y\to-0}u_2(x,y),\quad \forall x\in\overline{I}, \tag{3}$$

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u_1}{\partial y}=\rho(x)\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u_2}{\partial y}+\lambda(x),\quad \forall x\in I, \tag{4}$$

где $\theta^{(j)}(x)-$аффиксы точки пересечение характеристики BC_j с характеристикой исходящие из точки $M(x_0,0)\in I$, $\theta_{k_i}^{(j)}(x)$,аффиксы точки пересечение кривой $x+[2k_i/(m+2)]\ |y|^{(m+2)/2}=1$ с характеристикой исходяшей из точке $M(x_0,0)\in I$, т.е.

$$\theta^{(j)}(x_0)=\frac{1+x_0}{2}+(-1)^{j-1}i\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_{k_1}^{(j)}(x_0)=\frac{1+k_1x_0}{1+k_1}+(-1)^{j-1}i\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(k_1+1)}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_{k_2}^{(j)}(x_0)=\frac{1+k_2x_0}{1+k_2}+(-1)^{j-1}i\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(k_2+1)}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\ldots$$

$$\theta_{k_n}^{(j)}(x_0)=\frac{1+k_nx_0}{1+k_n}+(-1)^{j-1}i\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(k_n+1)}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$c=const\neq0;\ \mu_1,\mu_2=const;\ \delta_j(x),\ \rho(x),\ \lambda(x)$ заданные функции из класса $C^2(\overline{I})\cap C^3(I)$, причем $\rho(x)-c\neq0,\ k_1>k_2>....>1,\ \delta_j^{(n)}(1)=0,\ \lambda^{(n)}(1)=0$,$n=0,1,2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальние задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005. Universitet. Yangiyo‘l poliyrafservis -224 с.

2. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнения, вырождающегося внутри области. //Дифференц. уравнения.1981.Т.17.№1.С.129-136

3. Мирсабуров М. Об одной нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. Известия.АН Узбекистана серия физ-мат. Наук. 1984. №5. С.32-34.

4. Mirsaburov M., Chorieva S.T. On a problem with three variants of shift conditions for mixed type equation. Iz.Vuz.Mat.2016,No4,pp.32-45

УДК 532.135

Численное исследование обтекания плоского клина вязкоупругим потоком

Г.Н. Шукуров
Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача об обтекании клина стационарным потоком несжимаемой полимерной жидкости. Течение вязкоупругой полимерной жидкости описывается при помощи реологической модифицированной модели Виноградова–Покровского [1].

Обтекание плоского клина стационарным потоком является классической задачей гидродинамики. Известны стационарные решения такой задачи, содержащие поверхности сильного разрыва, симметрично расположенные по обеим сторонам клина. Для того, чтобы исследовать аналогичные решения у задачи о течении вязкоупругой жидкости и соединить набегающий на клин стационарный поток с условиями прилипания на поверхности клина, используются соотношения на сильном разрыве для модели Виноградова–Покровского [2].

Литература

1. Алтухов, Ю.А., Гусев, А.С., Пышнограй, Г.В. *Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем.* Барнаул: АлтГПА, 2012.
2. Блохин, А.М., Семенко, Р.Е. Исследование соотношений на стационарном плоском сильном разрыве для полимерной жидкости // *Математическое моделирование*, 2021, Т.33, №1.

Моделирование информационных потоков в логистической информационной системе

Ядгаров Т. Г.[1], Пайзиева М.Т.[2]
[1] Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан;
[2] Ренессанс Таълим Университети, Ташкент, Узбекистан;
t.yadgarov52@mail.ru

Системы искусственного интеллекта имеют силы потока сетевой информации. Но надо согласится, что современным информационным потокам присущи многовариантность и многофакторность. В настоящее время можно рассматривать как один из удивительных феноменов тот факт, что содержательные, семантически наполненные результаты формируется без непосредственного привлечения методов искусственного интеллекта [5,6].
Формализация концептуальной модели, то есть моделирование информационного потока для определения характеристик передачи информации разрабатывается по общей структуре учебного контента и информационных потоков относительно запросам.

Реальность моделирование исходить из идеального моделирования, при котором реальному объекту противопоставляется описание его в форме графики, таблиц и математических выражений.

В чем заключается постановка задачи? Объектом является LM - логистическая модель. LM имитирует или воспроизводит требуемые характеристики (свойства, признаки)

логистической системы LS.

При разработке учебного процесса должен быть: - анализ учебного процесса; - моделирование; - предсказание.

В процессе моделирования содержится следующий учебный контент: - дисциплины; - профессорско-преподавательский состав; - зарубежные и национальные источники литератур; - видео и презентационные источники; - некоторые вспомогательные инструкции по направлениям. Заметим, что контент содержит большой объем исходных данных. Важную и трудоемкую работу выполняет обработка запросов в логистическом процессе, которые необходимы для предсказания. Передача информационного потока, адресованного получателем (LMS, HEMIS ...), которое осуществляется отправителем требует соответствующий маршрут. Все передаваемые данные происходит в реальном времени и обозначим через $r = r(t)$.

С предыдущих более ранних информаций, характер временной зависимости определяется по аналогичной модели Бартона-Кеблера[6]:

$$r = r(t) = 1 - ae^{-t} - be{-}2t \tag{1}$$

С учетом обновления логистической системы LS сопровождается рост количества учебного контента по всем исходным материалам и определяется по формуле (2) приведенная ниже. Естественно, в этой формуле важную роль играет параметр T, являющий верхней границей интеграла. Запросы по контентам происходит через специальные разработанные коды, которые и определяют защищённость.

$$\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{M} k_i(t) \right) dt = NT \tag{2}$$

Здесь приведены следующие обозначении, $k_i(t)-$ общее количество исходных материалов учебного контента в единицу времени, а M − общее количество всех возможных материалов. После нормирования параметров пороговой величины N, уравнение для первой области имеет вид:

$$\frac{du(t-r)}{dt} = pu(t-r)\big(1 - qu(t-r)\big) + du(t-r) \tag{3}$$

Решение:

$$u(t) = \frac{u_s}{1 + \left(\frac{u_s}{n_0} - 1\right) \exp\big[-(p + d(t-r))\big]} \tag{4}$$

Формула обобщенного графика информационного потока определяется следующем:

$$\theta(t_i) = \sqrt{\frac{1}{i} \sum_{n=0}^{i} \big\{u(t_n) - \big(u(t_0) + u(t_i - t_0)\big)\big\}^2} \tag{5}$$

Временной прием запросов при передачи информации осуществляется через коды (Begin –

End). Возникновения нового запроса вызывает процесс (точнее говоря, комплекс процессов) перераспределения информационных ресурсов в связи с появлением актуальных сюжетов.

Литература

1.PHP and MySQL for Dynamic Web Sites Fourth Edition, Larry ULLman 1249 Eighth Street, Berkeley, CA 94710, 2012 y.
2.PHP5 and MySQL Bible Tim Converse and Joyce Park with Clark Morgan, Wiley Publishing, Inc., Indianapolis, Indiana 2004.
3. Избачков Ю. С., Петров В. Н., Васильев А. А., Телина И. С. И74 Информационные системы: Учебник для вузов. 3-е изд. - СПб.: Питер, 2011. -544 с.: ил.ISBN 978-5-49807-158-9.
4. Ядгаров Т.Г., Аликулов А.Х. Технология создания информационной базы данных в среде yii framework для использования в кредитной системе обучения. ТАТУ Мухаммад ал-Хоразмий авлодлари 2019й, 5 бет.
5.Yadgarov T.G., Aliqulov A.X. Development of an information and logistics system “InfLog-CredSys” for managing big data in the yii framework for use in a credit training system. International Conference on information Science and Communication Technologies ICISCT 2019 Applications, Trends and Opportunities Tashkent University of information Technologies Named after Muhammad Al-Khwarazmi 2019 nowember 4-6.
6.Ландэ Д.В. Основы интеграции информационных потоков: Монография. – К.: Инжиниринг, 2006. - 240 с.

5 – SHO‘BA. HISOBLASH MATEMATIKASI VA MATEMATIK MODELLASHTIRISH

СЕКЦИЯ 5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

UDK 519.644

Constructing an optimal quadrature formula with derivative and parameter σ in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a,b)$

Abduaxadov A. A.[1,2]

[1]Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan; e-mail: a.a.abduaxadov@buxdu.uz
[2]Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan; e-mail: alibek.abduaxadov@tiumail.uz

The construction of optimal quadrature formulas is a fundamental problem in numerical analysis and approximation theory.Numerical integration plays a crucial role in many applied fields such as computational physics, engineering, and data science, where efficient and accurate evaluation of integrals is essential. In this paper, we investigate quadrature formulas of the form

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_{0k} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} A_{1k} f'(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

in the Sobolev-type space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a,b)$ and develop an approach based on the φ-function method. The optimality is studied in the sense of Sard, where the task reduces to minimizing the error functional. Explicit formulas are obtained for the coefficients of the quadrature formula, and the corresponding φ-functions are derived on each subinterval. Furthermore, we compute the exact norm of the φ-function, which provides an upper bound for the error. The results demonstrate that the proposed method yields optimal coefficients and ensures the efficiency of quadrature formulas in $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a,b)$. The optimal quadrature formula in this work is exact on any linear combination of a constant term and the function $e^{-\sigma x}$, where σ is a nonzero real parameter. This study contributes to the further development of optimal numerical integration methods in functional spaces

References

1. **Ghizzett A. and Ossicini A.**, *Quadrature Formulae*, Academie Verlag, Berlin, 1970.
2. **Lanzara F.**, *On optimal quadrature formulae*, Journal of Ineq. Appl., Vol. 5, 201–225 (2000).
3.**Cătinaş T. and Coman Gh.**, *Optimal quadrature formulas based on the φ-function method*, Stud. Univ., Babeş-Bolyai Math., Vol. 51(1), 49–64 (2006).

UDC 519.644.3

Optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with highly oscillation in the Sobolev space

Akhmedov D.M.[1,2], Buvasherov D.S.[1,3]
[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;
[3]Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan;
dilshodbuvasherov@gmail.com

Hadamard-type hypersingular integrals with oscillatory kernels arise in mathematical physics, boundary value problems, and numerical analysis of integral equations. Their evaluation is particularly challenging due to the simultaneous presence of hypersingularity and rapid oscillation. Standard quadrature formulas fail to achieve satisfactory accuracy and stability in such cases.

In this work, we investigate the construction of optimal quadrature formula for the numerical evaluation of Hadamard-type hypersingular integrals with high oscillations

$$I = f.p. \int_0^1 \frac{e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx}{(x-t)^2}.$$

in the Sobolev space $L_2^{(1)}(0,1)$. In SardвЂ™s sense of optimality, the norm of the error functional is minimized by the Lagrange multipliers method, which leads to a system of equations for the optimal coefficients. To solve this system, SobolevвЂ™s method is used: the discrete analogue of the differential operator is constructed, convolution relations are applied, and the coefficients are obtained explicitly. This approach provides an effective solution and ensures stable and accurate quadrature formulas for hypersingular oscillatory integrals.

We consider a quadrature formula for the numerical evaluation of the integral

$$\int_0^1 \frac{e^{2\pi i\omega x}\,\varphi(x)}{(x-t)^2}\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} A_\beta\,\varphi(x_\beta),$$

where $0 < t < 1$, $e^{2\pi i\omega x}$ is the oscillatory weight function, $h = \frac{1}{N}$ with $N \in \mathbb{N}$, and the quadrature nodes are defined by $x_\beta = h\beta$, $\beta = \overline{0,N}$, $\varphi(x) \in L_2^{(1)}(0,1)$, while the coefficients A_β of the quadrature formula.

The difference between the integral and the quadrature sum

$$(R_N,\varphi) \;=\; \int_0^1 \frac{e^{2\pi i\omega x}\,\varphi(x)}{(x-t)^2}\,dx - \sum_{\beta=0}^{N} A_\beta\,\varphi(x_\beta),$$

is called the error of the quadrature formula. The corresponding error functional is given by

$$R_N(x) \;=\; \frac{\varepsilon_{[0,1]}(x)\,e^{2\pi i\omega x}}{(x-t)^2} - \sum_{\beta=0}^{N} A_\beta\,\delta(x-x_\beta),$$

where $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ denotes the indicator function of the interval $[0,1]$, and $\delta(x)$ is the Dirac delta-function.

Theorem 1. *The norm of the error functional of the quadrature formula in the Sobolev space*

$$\|R_N\|^2_{L^{(1)*}_{0,1}} = -\Bigg[\int_0^1\int_0^1 \frac{\cos\big(2\pi\omega(x-y)\big)|x-y|}{2(x-t)^2(y-t)^2}\,dx\,dy - \sum_{\beta=0}^{N}\int_0^1 \frac{A^R_\beta\cos(2\pi\omega x)+A^I_\beta\sin(2\pi\omega x)}{(y-t)^2}|y-h\beta|\,dy + \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}\left(A^R_\beta A^R_\gamma + A^I_\beta A^I_\gamma\right)\frac{|h\beta-h\gamma|}{2}\Bigg],$$

where $A_\beta = A^R_\beta + iA^I_\beta$.

Minimizing the error functional norm by Lagrange multipliers' method, we get

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\gamma=0}^{N} A_\gamma\frac{|h\beta-h\gamma|}{2} + \lambda = f_\omega(h\beta), \quad \beta = 0,1,\dots,N \\ \displaystyle\sum_{\gamma=0}^{N} A_\gamma = g_\omega, \end{cases}$$

where g_ω and $f_{1,\omega}(h\beta)$ are known.

The solution of the system determines the optimal coefficients A_β, $\beta = \overline{0,N}$, of the quadrature formula that minimizes the error in the Sobolev space $L_2^{(1)}(0,1)$. The coefficients are obtained by applying the Sobolev method to the corresponding system.

Theorem 2. *The coefficents* A_β *of quadrature formula with the error functional are determined by the following expressions:*

$$A_\beta = \begin{cases} h^{-1}\left(\frac{h}{2}g_\omega + f_{1,\omega}(h) - f_{1,\omega}(0)\right), & \beta = 0 \\ h^{-1}\left(f_{1,\omega}(h(\beta-1)) - 2f_{1,\omega}(h\beta) + f_{1,\omega}(h(\beta+1))\right), & 1 \le \beta \le N-1 \\ h^{-1}\left(f_{1,\omega}(h(N-1)) - f_{1,\omega}(hN) + \frac{h}{2}g_\omega\right), & \beta = N. \end{cases}$$

In conclusion, we obtained an optimal quadrature formula in the sense of Sard for Hadamard-type hypersingular integrals with highly oscillatory kernel in the Sobolev space $L_2^{(1)}(0,1)$.

References

1. **Akhmedov D.M., Buvasherov D.S.** *An optimal quadrature formula for Hadamard-type hypersingular integrals with high oscillation in the Sobolev space.* Problems of Computational and Applied Mathematics. - Tashkent, 2025, No. 4(68), pp.65-74.

2. **Akhmedov D.M., Buvasherov D.S.** *Error Functional Norm Of Hadamard-Type Hypersingular Integrals With High Oscillation In The Sobolev Space*, Modern Methods of Mathematical Physics and Their Applications, Tashkent, 2025. pp.274-275.

3. **Akhmedov D.M., Buvasherov D.S.** *Optimal coecients of the quadrature formula for the approximate calculation of Hadamard-type integral.* Contemporary problems in the field of differential equations and related areas of mathematics, Fergana, 2025. pp.158-159.

UDC 519.65

Application of a local cubic spline interpolation model in the digital processing of gastroenterologic signals

Bakhramov S.A.[1], Rakhimova F.S.[2], Qobilov S.Sh.[2]

[1,2] Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, department of higher mathematics,
[2] Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khorazmi, teacher of the department of artificial intelligence
baxramovsayfiddin@gmail.com, feruzasaidovna1980@gmail.com, qobilov.sirojiddin92@gmail.com

Currently, the application of spline functions in science and technology is of great importance. Unlike classical interpolation polynomials, splines provide several advantages. Local interpolation cubic splines are especially effective in practical problem solving and are widely used in areas such as geophysics, biomedicine, and environmental science for signal restoration, processing, and prediction.

Digital processing of signals based on the local interpolation cubic spline model

The restoration of the gastroenterological signal presented in Table 1 was carried out using the local interpolation cubic spline model described above and the Lagrange polynomial. Based on the data provided in Table 1, a Lagrange polynomial algorithm was implemented in the MATLAB programming environment and applied for signal processing (Figure 1).

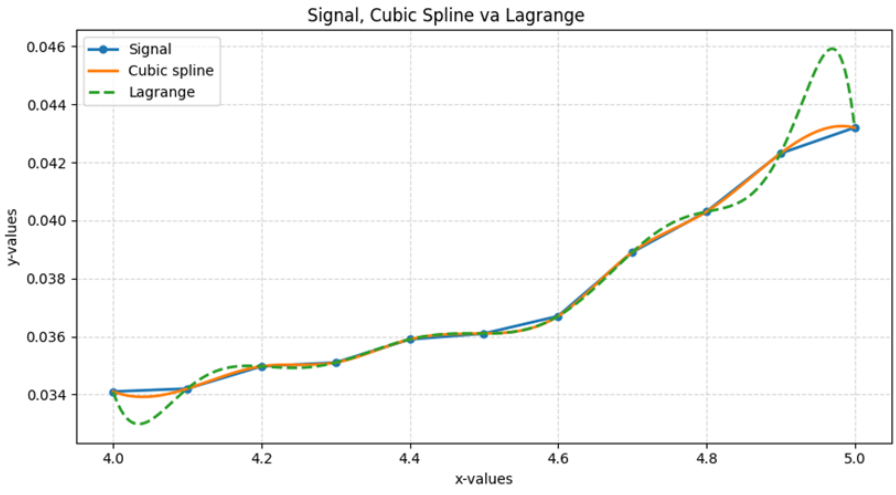


Рис. 2: Results of gastroenterological signal recovery

Error Evaluation Table for the Digital Processing of the Gastroenterological Signal

x_i	$f(x)$	$S_3(x)$	$L(x)$	$\lvert S_3(x) - f(x)\rvert$	$\lvert L(x) - f(x)\rvert$
4.0	0.0341	0.0341	0.0341	0	0
4.1	0.03501	0.0343	0.0342	0.00071	0.00081
4.2	0.03592	0.0351	0.03497	0.00082	0.00095
4.3	0.03683	0.0361	0.0351	0.00073	0.00173
4.4	0.03774	0.0372	0.0359	0.00054	0.00184
4.5	0.03865	0.0379	0.0361	0.00075	0.00255
4.6	0.03956	0.0391	0.0367	0.00046	0.00286
4.7	0.04047	0.0403	0.0389	0.00017	0.00157
4.8	0.04138	0.0414	0.0403	0.00002	0.00108
4.9	0.04229	0.0424	0.04231	0.00011	0.00020
5.0	0.0432	0.0432	0.0432	0	0
MAX				0.00075	0.00286

Таблица 1: Comparison of $f(x)$, $S_3(x)$ and $L(x)$.

In this thesis, a local interpolation cubic spline with a high degree of accuracy was chosen for the digital processing of the analyzed signals. The construction details of the proposed local interpolation cubic spline model developed for gastroenterological signals obtained from experimental data with unequal intervals are presented. The process of building the spline function based on the initially provided experimental data is also demonstrated.

To evaluate the reliability and efficiency of the proposed model, signal reconstruction was additionally performed using the classical interpolation polynomial, and the obtained results were compared with those of the local interpolation cubic spline function. The comparative analysis was presented in both graphical and tabular forms for signal recovery operations, and the corresponding errors were assessed.

References

1. **Bakhromov S.A.** *Digital processing of signals cubic spline model.* AIP Conference Proceedings 2781 020015 (2023). doi: http: dx.doi.org/10.1063/5.0145980

2. **Bahramov S.A., Jovliev S.** *Bicubic Splines in Problems of Modeling of Multidimensional Signal* International journal of the Korea institute of maritime information and communication sciences. Vol.9, No.4, August 2011, pp.420-423.

3. **Yusupov I, Nurmurodov J, Ibragimov S, Gofurjonov M, Qobilov S.** *Calculation of Spectral Coefficients of Signals on the Basis of Haar by the Method of Machine Learning.* 14th International Conference, IHCI 2022, Tashkent, Uzbekistan, October 20-22, 2022, pp 547-558.

4. **Z. Xakimjon, K. Muslimjon** *Modeling of Geophysical Signals Based on the Secondorder Local Interpolication Spline-Function.* International Conference on Information Science and Communications Technologies Applications, Trends and Opportunities, ICISCT 2019, 2019, doi:http:dx.doi.org/10.1109/ICISCT47635.2019.9011853.

UDC 519.65

Digital signal processing based on local cubic spline interpolation over unequal intervals

Bakhramov S.A.[1], Rakhimova F.S.[2], Qobilov S.Sh.[2]

[1] Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, department of higher mathematics;

[2] Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, teacher of the department of artificial intelligence

baxramovsayfiddin@gmail.com, feruzasaidovna1980@gmail.com, qobilov.sirojiddin92@gmail.com

The processes of function approximation using local cubic splines presented in this study were successfully implemented. It can be concluded that cubic spline models provide highly accurate results in digital signal processing, enabling specialists to make well-grounded decisions based on processed signal data.

As a practical example, the initial ECG signal values were processed digitally, and the corresponding error metrics were obtained [1,2]. In the medical domain, precision plays a crucial role — particularly in diagnosing patients in critical condition, identifying disease types, and determining their severity [3],[5].

Furthermore, it was observed that improving the convergence rate of the models discussed in this work does not depend on increasing the order of the equation system.

Cubic spline model

Cubic (third-order) spline functions represent a powerful and precise mathematical framework in digital signal processing. This section begins with an overview of the spline model, which has proven to deliver high accuracy and stability in signal processing tasks [4].

$$S_3(f,x) = \sum_{k=1}^{4} \phi_k(t) f(x_{i+k-2})$$

here:

$$\varphi_1(t) = -\tfrac{1}{4}t\left(1-3t+2t^2\right); \quad \varphi_2(t) = -\tfrac{1}{4}\left(4-3t-7t^2+6t^3\right);$$

$$\varphi_3(t) = -\tfrac{1}{4}t\left(5+5t-6t^2\right); \quad \varphi_4(t) = -\tfrac{1}{4}t\left(1+t-2t^2\right);$$

In this work, the theorem confirming the interpolation conditions of the local interpolation cubic spline has been proven.

The ECG signal presented in Table 1 was reconstructed using the proposed cubic spline models. A third-order spline construction program was created in the MATLAB environment and applied to signal processing (Figure 1).

№	Time, seconds	Amplitude	№	Time, seconds	Amplitude
1	1	-0.060	14	14	-0.095
2	2	-0.065	15	15	-0.085
3	3	-0.060	16	16	-0.090
4	4	-0.075	17	17	-0.090
5	5	-0.065	18	18	-0.100
6	6	-0.070	19	19	-0.085
7	7	-0.070	20	20	-0.105
8	8	-0.090	21	21	-0.090
9	9	-0.080	22	22	-0.045
10	10	-0.095	23	23	0.005
11	11	-0.080	24	24	0.015
12	12	-0.095	25	25	0.045
13	13	-0.080	26	26	0.155

Таблица 2: Values of the ECG signal

A graphical representation of the above table values is given below

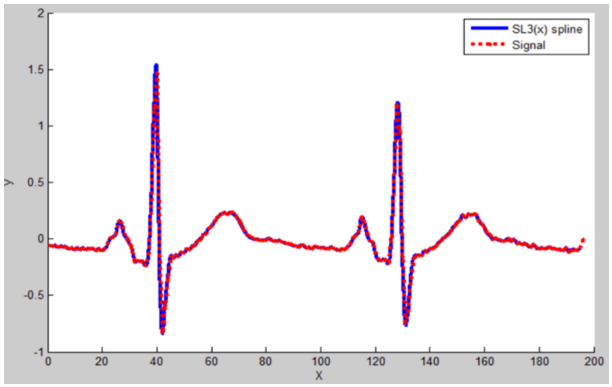


Рис. 3: ECG signal recovery results

As seen from the above table and graph, the proposed spline model demonstrates high effectiveness in the digital processing of medical signals. The actual ECG signal values and those reconstructed by the model show minimal differences, fully satisfying the predefined research conditions. This confirms the efficiency and reliability of the developed model.

References

1. **Соболев С. Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* -М.: Наука. 1974. 808 с.
2. **Рябенький В.С., Филлипов А.Ф.** *Об устойчивости разностных уравнений.* - М.: Гостехиздат. 1956, - 171 с.
3. **Исраилов М.И., Эшдавлатов Б.** *Уточнение остаточного члена одного интерполяционного сплайна.* // Вопр. вычис. и прик. математики, - Ташкент: РИСО АН Узбекистана, 1986, вып. 80, С. 10-26.
4. **Bahramov S.A., Jovliev S.** *Bicubic Splines in Problems of Modeling of Multidimensional Signal.* International journal of the Korea institute of maritime information and communication sciences. Vol.9, No.4, August 2011, p.420-423.

5. **Yusupov I, Nurmurodov J, Ibragimov S, Gofurjonov M, Qobilov S.** *Calculation of Spectral Coefficients of Signals on the Basis of Haar by the Method of Machine Learning.* 14th International Conference, IHCI 2022, Tashkent, Uzbekistan, October 20–22, 2022, pp 547–558.

UDK 519.644

Haqiqiy qiymatli davriy funksiyalar fazosida xatolik funksionalining norma

Bekmurodova D. B.
Toshkent Davlat Transport Universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
bekmurodovadilorom50@gmail.com

Matematikaning funksional analiz va garmonik tahlil sohalarida davriy funksiyalar muhim o‘rinni egallaydi. Ayniqsa, haqiqiy qiymatli davriy funksiyalar tabiatda uchraydigan ko‘plab jarayonlarni - masalan, to‘lqinlar, tebranishlar, elektr signallari yoki haroratning davriy o‘zgarishining - matematik modelini yaratishda keng qo‘llaniladi. Bu kabi funksiyalarni chuqur o‘rganish va ularning xossalarini tahlil qilish uchun ular joylashgan barcha shu turdagi funksiyalar to‘plamini yoki fazosini o‘rganish talab etiladi. Bu fazo haqiqiy yoki kompleks qiymatli funksiyalardan iborat bo‘lishi mumkin. Gilbert fazosi zamonaviy matematika va ilm-fanning asosiy vositalaridan biri bo‘lib, u vektorlar va funksiyalarni geometriyaviy nuqtai nazardan o‘rganishga imkon beradi. Bu fazoda ortonormal bazis, skalyar ko‘paytma, proyeksiyalar va operatorlar nazariyasi kabilar ustida ishlash qulaydir. Shu sababli Gilbert fazosi nazariyasi ko‘plab ilmiy va texnik sohalarda qo‘llaniladi. Ushbu ish ham haqiqiy qiymatli davriy funksiyalarni Gilbert fazosida qaraladi.

Quydagi ko‘rinishdagi kvadratur formulani qaratamiz

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k\,\varphi(hk), \tag{1}$$

bu yerda $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, C_k- (1)- formulaning koeffitsientlari, $\varphi\,(x) \in \widetilde{S_2(P_m)}$. $\widetilde{S_2(P_m)}$ fazoga tegishli funksiyaning normasi

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{S_2(P_m)}} = \int_0^1 \Big(\varphi^{(m)}(x) + \tau\varphi^{(m-1)}(x) + \sigma\varphi^{(m-2)}(x)\Big)dx \tag{2}$$

ko‘rinishda, bunda $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. (1)- kvadratur formulaning xatoligi

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} C_k\,\varphi(hk). \tag{3}$$

Kvadratur formula xatoligiga mos xatolik funksionali quyidagi ko‘rinishda

$$\ell(x) = \left(\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k\delta(x - hk)\right) * \phi_0(x), \tag{4}$$

bunda $\varepsilon_{(0,1]}(x)$ bu $(0, 1]$ intervalning xarakteristik funksiyasi, δ-esa Dirakning delta-funksiyasi, $\phi_0\,(x) = \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta\,(x - \beta)$, $*-$ o‘rama amali.

(1)- xatolikning absolyut qiymati Koshi-Shvars tengsizligi bilan quyidagicha baholanadi.

$$|(\ell,\varphi)| \le \|\varphi\|_{\widetilde{S_2(P_m)}} \|\ell\|_{\widetilde{S_2(P_m)^*}}.$$

$\widetilde{S_2(P_m)^*}$ fazo $\widetilde{S_2(P_m)}$ fazoga qo‘shma fazo.

Gilbert fazolarida chiziqli va uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi haqidagi Riss teoremasidan foydalanib ℓ-funksionalning ekstremal funksiyasini aniqlaymiz [1]

$$(\ell,\varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{\widetilde{S_2(P_m)}}, \tag{5}$$

hamda

$$\left\| \ell | \widetilde{S_2(P_m)^*} \right\| = \left\| \psi_\ell(x) | \widetilde{S_2(P_m)} \right\|. \tag{6}$$

Bu ishda m ning xususiy hol ya’ni $m = 2$ bo‘lganda hol uchun xatolik funksionali normasi topiladi.

$\widetilde{S_2(P_2)}$ fazoga tegishli bo‘lgan φ va ψ funksiyalarning skalyar ko‘paytmasi quyidagicha aniqlanadi

$$(\varphi,\psi_\ell)_{\widetilde{S_2(P_2)}} = \int_0^1 (\varphi''(x) + \tau\varphi'(x) + \sigma\varphi(x))(\psi''(x) + \tau\psi'(x) + \sigma\psi(x))dx. \tag{7}$$

Tenglikning o‘ng tomonini bo‘laklab integrallash yordamida hamda (5) va funksiyalarning davriyligi 1 ga tengligidan ψ_ℓ uchun quydagiga olamiz.

$$\psi_\ell{}^{(4)}(x) - \left(\tau^2 - 2\sigma\right)\psi_\ell{}^{(2)}(x) + \sigma^2\psi_\ell(x) = \ell(x) \tag{8}$$

(8) - tenglikdan ψ_ℓ ekstremal funksiyasini topish uchun Furye almashtirishlaridan foydalanamiz.

$$\psi_\ell(x) = \frac{1}{\sigma^2} - \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\beta(x-hk)}}{(2\pi\beta)^4 + (\tau^2 - 2\sigma)\,(2\pi\beta)^2 + \sigma^2} \tag{9}$$

(9)-xatolik funksionalining ekstremal funksiyasi yordamida biz xatolik funksionali normasining umumiy ko‘rinishini topamiz.

Teorema 1. $\psi_\ell(x)$ ga mos xatolik funksionalining normasi quyidagicha ko‘rinishga ega

$$\|\ell\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N} C_k - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k'=1}^{N} C_{k'} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{k'=1}^{N} C_{k'} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{k'=1}^{N} C_{k'} \sum_{\beta\neq 0} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\beta(\alpha+hk-hk')}}{(2\pi i\beta)^4 + (\varpi^2 - 2\sigma)\,(2\pi\beta)^2 + \sigma^2}.$$

Adabiyotlar

1. **Соболев С.Л.** *Введение в теорию кубатурных форма.* -М.: Наука, 1974, 808.

UDC 532.546

A Sparse-Grid Stochastic Collocation Method for the Time-Fractional Stochastic Stokes-Darcy Model

Berdyshev A.S.[1], Boranbek K.[1]
[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
berdyshev@mail.ru, boranbek.kulzhamila@gmail.com

The coupled Stokes-Darcy system has become a powerful mathematical tool to describe the interaction between free flow and porous media flow. Such processes occur in engineering, biomedical, and environmental applications, where uncertainties in medium properties significantly affect accuracy [1]. In addition, fractional-order derivatives have recently attracted much attention due to their ability to capture the hereditary effects and memory phenomena inherent in complex flows [2]. The fractional generalization of the stochastic Stokes-Darcy model therefore provides a more realistic description of fluid transport processes under uncertainty.

This study presents an efficient numerical approach to the Stokes-Darcy stochastic time fractional model, combining new approaches to estimate uncertainty with fast algorithms for fractional derivatives and ensemble techniques to reduce computational costs.

Let $D_f \subset \mathbb{R}^d$ and $D_p \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ be two disjoint domains representing, respectively, the free-flow region and the porous-medium region. These domains are separated by an interface $I = \overline{D}_f \cap \overline{D}_p$. The time interval is denoted by $J = (0, T]$, where the fluid flow process is studied over J. The uncertainty in the model is described on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, where Ω is the space of elementary events, $\mathcal{F}$ is the sigma algebra of measurable events, and $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ is the probability measure. Hydraulic conductivity $\mathbb{K}(x, \omega)$ is represented as a random field, commonly using a log-normal distribution to ensure positivity. To simplify computations, the random field is approximated by a truncated Karhunen-Loeve expansion [3]. We then define the random vector $\mathbf{Y} = [Y_1(\omega), Y_2(\omega), ..., Y_n(\omega)], n \in N$, which represents the stochastic parameters of the system. These random variables are used as inputs for the stochastic collocation method. To capture the memory effects in flow through porous media, we replace the standard time derivative with a Caputo fractional derivative in the porous region. This allows the model to account for both the viscous behavior in the free-flow region and the history-dependent dynamics in the porous medium.

For clarity, we provide the strong formulation of the problem in the following form:

Find random variables $\varphi_n : \overline{D}_p \times \overline{J} \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_N : \overline{D}_f \times \overline{J} \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ and $p_N : \overline{D}_f \times \overline{J} \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfying the following conditions almost certainly in Ω:

$$S\frac{\partial \varphi_N}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbb{K}_{\mathbb{N}} \nabla \varphi_N) = f_p \qquad D_p \times J \times \Omega \qquad (1.1)$$

$$\varphi_N = \varphi_d \qquad \Gamma_{pd} \times J \times \Omega \qquad (1.2)$$

$$-\mathbb{K}_N \nabla \varphi_N \cdot \mathbf{n}_p = 0 \qquad \Gamma_{pn} \times J \times \Omega \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_N}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbb{T}(\mathbf{u}_N, p_N) = f_f \qquad D_f \times J \times \Omega \qquad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_N = 0 \qquad D_f \times J \times \Omega \qquad (1.5)$$

$$\text{bigskip } \mathbf{u}_N = 0 \qquad D_f \times J \times \Omega \qquad (1.6)$$

$$\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}_f - \mathbb{K}_N \nabla \varphi_N \cdot \mathbf{n}_p = 0 \qquad I \times J \times \Omega \qquad (1.7)$$

$$-\mathbf{n}_f \cdot \mathbb{T}(\mathbf{u}_N, p_N)\mathbf{n}_f = g\varphi_N \qquad I \times J \times \Omega \quad 1 \le i \le d-1 \qquad (1.8)$$

$$\text{bigskip } -\mathbf{m}_i \cdot \mathbb{T}(\mathbf{u}_N, p_N)\mathbf{n}_f = \frac{\alpha_{BJS}}{\sqrt{\mathbf{m}_i \cdot \mathbb{K}_N \mathbf{m}_i}} \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{m}_i \qquad I \times J \times \Omega \quad 1 \le i \le d-1 \qquad (1.9)$$

$$\mathbf{u}_N = \mathbf{u}_0 \qquad \overline{D}_f \times \{0\} \times \Omega \qquad (1.10)$$

$$\varphi_N = \varphi_0 \qquad \overline{D}_p \times \{0\} \times \Omega \qquad (1.11)$$

Furthermore, to solve the fractional-order stochastic Stokes-Darcy problem, we construct both semi-discrete and fully discrete numerical schemes. In these schemes, the fractional derivatives are approximated by the fast computational method developed in [4]. After formulating these schemes, we carry out a detailed study of their convergence and stability properties. Our analysis demonstrates that the proposed discrete scheme achieves an accuracy of more than second order. Importantly, the convergence result established in our main theorem shows that the rate of convergence is independent of the mesh parameters, which indicates robustness of the method with respect to discretization choices. This finding confirms that the developed scheme not only provides stable approximations of the fractional-order stochastic Stokes-Darcy model, but also ensures high accuracy in practical computations.

To efficiently handle the uncertainty in the fractional-order stochastic Stokes-Darcy model, we apply the Sparse-Grid Stochastic Collocation Method [5]. The main idea of the collocation approach is to approximate the dependence of the model solution on random parameters by constructing an interpolation based on solutions at selected collocation points. If a full tensor product grid is used, the number of collocation points grows exponentially with the dimension of the random space, which is often referred to as the curse of dimensionality. To overcome this difficulty, we employ the Smolyak sparse grid construction [6]. Sparse grids combine one-dimensional quadrature rules hierarchically, reducing the number of collocation points while keeping high accuracy. More precisely, let $\mathbf{Y} = [Y_1(\omega), Y_2(\omega), ..., Y_n(\omega)], n \in N$ be the random vector of dimension n. For each random variable, a set of one-dimensional interpolation points is chosen. Smolyak's algorithm then combines these points to generate a sparse multidimensional grid. At each grid point, the deterministic Stokes-Darcy problem is solved. The global stochastic solution is then obtained by interpolating these deterministic solutions over the random space.

The theoretical analysis and computational experiments demonstrate that the introduction of Caputo fractional derivatives into the governing equations leads to a noticeable memory effect in porous media flow. Specifically, reducing the fractional order slows down the flow velocity, confirming that the order of the derivative controls the strength of the memory influence. Furthermore, the application of a fast algorithm for the Caputo derivative significantly decreases computational cost and memory usage without affecting accuracy, compared with the work in [2]. These findings suggest that the proposed approach is efficient and reliable, and future studies will extend the model to more realistic applications.

Literature

1. **Berdyshev A., Boranbek Рљ.** *Review of the Stokes-Darcy model.* Bulletin of Abai KazNPU. Series of physical and mathematical Sciences. - 2023. -Vol.86, No.2, 34-45pp;

2. **Berdyshev A., Baigereyev D., Boranbek K.** *Numerical method for fractional-order generalization of the stochastic Stokes-Darcy model.* Mathematics. -2023, -Vol.11, -37-63pp;

3. **Kober V., Makovetskii A., Voronin S.** *Sergei Karhunen-Loeve Expansion Using a Parametric Model of Oscillating Covariance Function.* Mathematics. -2025, -Vol.13, No.16, 25-69pp;

4. **Zhu H., Xu C.** *A fast high order method for the time-fractional diffusion equation.* SIAM J. Numer. Anal. -2019, -Vol.57, 2829-2849pp;

5. **Baishemirov Z., Berdyshev A., Baigereyev D., Boranbek K.** *Numerical Method for Fractional-Order Generalization of the Stochastic Stokes-Darcy Model. Mathematics.* Fractal Fract. -2024. - Vol.11. 37-63pp;

6. **Smolyak S.A.** *Quadrature and interpolation formulas for tensor products of cer tain classes of functions* . Dokl. Akad. Nauk.-1963, 1042-1045pp.

UDK 519.653

Sobolev fazosida oshkor optimal ayirmali formulaning koeffitsiyentlari

Boltayev A. Q.[1,2], Shonazarov S. Q.[1,3]
[1]V.I Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent, O‘zbekiston;
[2]Nordik xalqaro universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
[3]Toshlent xalqaro universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
a.boltayev@nordicuniversity.org, sshon1989.08.01@gmail.com.

Ushbu ishda biz quyidagi ikkinchi tartibli

$$y'' = f(x, y), \quad x \in [0,\ 1], \tag{1}$$

oddiy differensial tenglamani ushbu

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = \widetilde{y}_1 \tag{2}$$

boshlang‘ich shartlarga ko‘ra taqribiy yechish uchun quyidagi umumiy ayirmali formulani qaraymiz [1,2]:

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h^2 \sum_{\beta=0}^{k} C^{(\|)}[\beta]\varphi''[\beta] \cong 0. \tag{3}$$

Bu yerda $C[\beta]$ va $C^{(\|)}[\beta]$ ayirmali formulaning noma’lum koeffitsiyentlari, $h = \frac{1}{N}$, $[\beta] = h\beta$, $(\beta = 0, 1, \ldots, k)$, $\varphi(x) \in L_2^{(4)}(0,\ 1)$. $L_2^{(4)}(0,\ 1)$ Sobolev fazosi bo‘lib, bu fazo quyidagicha aniqlangan:

$$L_2^{(4)}(0,\ 1) = \left\{\varphi : [0,\ 1] \to \mathbb{R},\ \varphi'''(x)\ -\ \text{absol. uzl},\ \varphi^{IV}(x) \in L_2(0,\ 1)\right\}.$$

$L_2^{(4)}(0,\ 1)$ fazoda ixtiyoriy ikkita φ va ψ funksiyalar uchun skalyar ko‘paytma quyidagicha aniqlangan [3]:

$$\{\varphi,\ \psi\} = \int_0^1 \varphi^{(4)}(x)\,\psi^{(4)}(x)dx. \tag{4}$$

Shuningdek, $L_2^{(4)}(0,\ 1)$ fazoda (4) skalyar ko‘paytmaga mos funksiyaning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\left\|\varphi\left|L_2^{(4)}(0,1)\right.\right\| = \left(\int_0^1 \left(\varphi^{(4)}(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Qaralayotgan (3) formulada berilgan yig‘indilar orasidagi

$$(\ell,\ \varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h^2 \sum_{\beta=0}^{k} C^{(\|)}[\beta]\varphi''[\beta] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\delta(x - h\beta) - h^2 \sum_{\beta=0}^{k} C^{(\|)}[\beta]\delta''(x - h\beta)\right]\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{5}$$

ayirmaga (3) ayirmali formulaning xatoligi deyiladi. Hosil qilingan (5) ifoda uchun $L_2^{(4)^*}(0,\,1)$ qo‘shma fazoga tegishli quyidagi xatolik funksionali mos keladi

$$\ell(x)=\sum_{\beta=0}^{k}C[\beta]\delta(x-h\beta)-h^2\sum_{\beta=0}^{k}C^{(\|)}[\beta]\delta''(x-h\beta). \tag{6}$$

Bu yerda $L_2^{(4)^*}(0,\,1)$ fazo bu $L_2^{(4)}(0,\,1)$ fazoga qo‘shma fazo, $\delta(x)$ - Dirakning delta-funksiyasi.

Chiziqli uzluksiz funksionalning normasi haqidagi ta’rifga ko‘ra quyidagi ma’lum

$$\|\ell\|_{L_2^{(4)*}}=\sup_{\varphi\neq 0}\frac{|(\ell,\,\varphi)|}{\|\varphi\|}.$$

Oxirgi tenglikdan quyidagi Koshi-Shvars tengsizligi kelib chiqadi

$$|(\ell,\,\varphi)|\leq\|\ell\|_{L_2^{(4)*}}\cdot\|\varphi\|_{L_2^{(4)}}. \tag{7}$$

Koshi-Shvars tengsizligi (7) ga ko‘ra (3) ayirmali formulaning (5) xatoligi $L_2^{(4)*}(0,1)$ qo‘shma fazodan olingan ℓ xatolik funksionali va $L_2^{(4)}(0,\,1)$ fazodan olingan φ funksiyalar normalari orqali yuqoridan baholanadi. Xatolik funksionalining normasi $C\,[\beta]$ va $C^{(\|)}\,[\beta]$ koeffitsiyentlarga hamda $h\beta\ \ (\beta=0,1,...,N)$ tugun nuqtalarga bog‘liq. Biz qarayotgan optimal ayirmali formulada xatolik funksionalining normasi $C^{(\|)}\,[\beta]$ koeffitsiyentlar bo‘yicha minimallashtiriladi.

Quyidagi o‘rinli

Teorema. *Sobolev fazosi $L_2^{(4)}\,(0,1)$ da (3) ayirmali formulaga mos Shtyormer tipidagi yagona oshkor optimal ayirmali formula koeffitsiyentlari quyidagicha aniqlanadi:*

$$\overset{\circ}{C}{}^{(\|)}\,[0]=\frac{3\,(1+q)\,q^{k-1}}{10\,(1-q^{2k-2})\,(1-q)},$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(\|)}\,[\beta]=-\frac{3q^{k-1}}{10\,(1-q^{2k-2})}\left(q^{\beta}-q^{-\beta}\right),\ \beta=\overline{1,k-3},$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(\|)}\,[k-2]=\frac{1}{20}+\frac{3\left(q-q^{2k-3}\right)}{10\,(1-q^{2k-2})},$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(\|)}\,[k-1]=\frac{19}{20}-\frac{3\left(q+q^{2k-2}\right)}{10\,(1-q)\,(1-q^{2k-2})},$$

bu yerda $q=\sqrt{3}-2$.

Adabiyotlar

1. **Samarsky A.A.** *Introduction to numerical methods.* Nauka, Moscow, 1987. 288 p.
2. **Babushka I., Vitasek E., Prager M.** *Numerical processes for solution of differential equations.* - Mir, Moscow, 1969, 369 p.
3. **Sobolev S.L.** *Introduction to the theory of cubature formulas.* - Nauka, Moscow, 1974, 808 p.

UDC 519.65

New local trigonometric basis functions for approximating some geometric curves in the plane

Doniyorov N. N.
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
doniyorovnn@mail.ru

In this work [1], a trigonometric optimal interpolation formula was constructed in the Hilbert space $K_{2,\omega}^{(2)}$, and using its coefficients, the following set of basis functions $\mu_i(x)\,(i=0,1,...,n)$ was created:

$$\mu_0(x)=\begin{cases}\frac{\sin(\omega x-\omega x_1)}{\sin(\omega x_0-\omega x_1)},\ x_0\le x\le x_1,\\ 0,\ x_1\le x\le 1,\end{cases}$$

$$\mu_i(x)=\begin{cases}0,\ x_0\le x\le x_{i-1},\\ \frac{\sin(\omega x-\omega x_{i-1})}{\sin(\omega x_i-\omega x_{i-1})},\ x_{i-1}\le x\le x_i,\\ \frac{\sin(\omega x-\omega x_{i+1})}{\sin(\omega x_i-\omega x_{i+1})},\ x_i\le x\le x_{i+1},\\ 0,\ x_{i+1}\le x\le 1,\end{cases}$$

$$i=1,2,...,n-1,$$

$$\mu_n(x)=\begin{cases}0,\ x_0\le x\le x_{n-1},\\ \frac{\sin(\omega x-\omega x_{n-1})}{\sin(\omega x_n-\omega x_{n-1})},\ x_{n-1}\le x\le x_n,\end{cases}$$

where $0=x_0<x_1<...<x_n=1$, $x_i=ih$, $h=\frac{1}{n}$, $i=0,1,...,n$.

The following theorem holds for these two-point local trigonometric basis functions $\mu_i(x)\,(i=0,1,...,n)$.

Theorem 1. *For local basis functions $\mu_i(x)\,(i=0,1,...,n)$, the following relations are valid:*

$$\sum_{i=0}^{n}\mu_i(x)\sin(\omega x_i)=\sin(\omega x),$$

$$\sum_{i=0}^{n}\mu_i(x)\cos(\omega x_i)=\cos(\omega x).$$

It should be noted that geometric curves such as ellipse, circle, epicycloid, cardioid, nephroid, hypocycloid, deltoid, astroid, Jerona's lemniscate can be exactly restored using basis functions $\mu_i(x)\,(i=0,1,...,n)$.

References

1. **Hayotov A. R., Doniyorov N. N.** *Construction of an Optimal Interpolation Formula Exact for Trigonometric Functions.* Modern problems of applied mathematics and information technology, Bukhara, 2024. AIP Conference Proceedings. -pp. 06051-1-06051-11. https://doi.org/10.1063/5.0199916

UDC 519.63(575.1)

Dynamic properties of Lotka-Volterra mappings induced by skew-symmetric block matrices

Eshmamatova D.B.[1,2], Muminov U.R.[1], Islomova M.N.[1]

[1] Tashkent State Transport University

[2] V. I. Romanovskii Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences

24dil@mail.ru; ulugbek.muminov.2020@mail.ru; professormarjona25@gmail.com

The study of nonlinear dynamical systems of Lotka–Volterra type plays a central role in mathematical biology and the theory of evolutionary games. In particular, quadratic stochastic operators and their generalizations on finite-dimensional simplices have been actively investigated as models of population dynamics [1-2]. In this work, we consider a special class of Lotka–Volterra mappings generated by skew-symmetric matrices with block structure. Our goal is to describe the fixed-point sets of the mapping $V_1 : \Delta^4 \to \Delta^4$ and to establish relations between geometric configurations of certain characteristic points.

Consider the skew-symmetric block matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & C \\ -C^T & 0_{3\times 3} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix},$$

where $0 < a_i, b_i, c_i \leq 1$.

The corresponding Lotka–Volterra mapping $V_1 : \Delta^4 \to \Delta^4$ has the form

$$(x_1', x_2')^\top = (x_1, x_2)^\top \circ \Big[(1,1)^\top + \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix} (x_3, x_4, x_5)^\top\Big],$$

$$(x_3', x_4', x_5')^\top = (x_3, x_4, x_5)^\top \circ \Big[(1,1,1)^\top + \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 \\ b_1 & -b_2 \\ -c_1 & c_2 \end{pmatrix} (x_1, x_2)^\top\Big], \tag{1}$$

where $\circ$ denotes the Hadamard (coordinatewise) product.

On the faces of the simplex Δ^4 we define:

$$M_1 = \tfrac{a_2}{a_1+a_2}\mathbf{e}_1 + \tfrac{a_1}{a_1+a_2}\mathbf{e}_2, \quad M_2 = \tfrac{b_2}{b_1+b_2}\mathbf{e}_1 + \tfrac{b_1}{b_1+b_2}\mathbf{e}_2, \quad M_3 = \tfrac{c_2}{c_1+c_2}\mathbf{e}_1 + \tfrac{c_1}{c_1+c_2}\mathbf{e}_2,$$
$$N_1 = \tfrac{b_1}{a_1+b_1}\mathbf{e}_3 + \tfrac{a_1}{a_1+b_1}\mathbf{e}_4, \quad N_2 = \tfrac{b_2}{a_2+b_2}\mathbf{e}_3 + \tfrac{a_2}{a_2+b_2}\mathbf{e}_4,$$
$$K_1 = \tfrac{c_1}{b_1+c_1}\mathbf{e}_4 + \tfrac{b_1}{b_1+c_1}\mathbf{e}_5, \quad K_2 = \tfrac{c_2}{b_2+c_2}\mathbf{e}_4 + \tfrac{b_2}{b_2+c_2}\mathbf{e}_5.$$

Proposition 1. The order of M_i determines the relations among N_j, K_j:
1) Segments N_1K_1 and N_2K_2 intersect iff $M_2 \in \operatorname{ri} M_1M_3$;
2) $M_1 = M_2 \iff N_1 = N_2$;

3) $M_2 = M_3 \implies K_1 = K_2$;
4) If $M_1 = M_2 = M_3$, then $N_1 = N_2$, $K_1 = K_2$ and $N_1K_1 = N_2K_2$.

Proposition 2. The fixed-point set $\mathrm{Fix}(V_1)$ has the form:
1) If $M_1 \neq M_2$, $M_2 \neq M_3$, then $\mathrm{Fix}(V_1) = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{345}$;
2) If $M_1 = M_2 \neq M_3$, then $\mathrm{Fix}(V_1) = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{345} \cup \mathrm{co}\{M_1N_1\}$;
3) If $M_2 = M_3 \neq M_1$, then $\mathrm{Fix}(V_1) = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{345} \cup \mathrm{co}\{M_2K_1\}$;
4) If $M_1 = M_2 = M_3$, then $\mathrm{Fix}(V_1) = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{345} \cup \mathrm{co}\{M_1N_1K_1\}$.

Remark. The relative order of M_1, M_2, M_3 on Γ_{12} uniquely determines the positions of N_1, N_2, K_1, K_2 on Γ_{345}.

We have studied the Lotka–Volterra mapping $V_1 : \Delta^4 \to \Delta^4$ generated by a skew-symmetric block matrix. It has been shown that the fixed-point structure depends on the mutual positions of points M_i on the edge Γ_{12}. In particular, degeneracies in the order of M_i lead to the appearance of additional fixed points located on faces of the simplex. The results enrich the known classification of fixed-point sets for Lotka–Volterra type mappings and open the way for further generalizations to higher-dimensional simplices.

The proofs of Propositions 1–2 are based on direct verification of invariance properties of the mapping (1). In particular, the characterization of the fixed-point sets follows from solving the equilibrium equations

$$x_i' = x_i, \qquad i = 1, \ldots, 5,$$

under the simplex constraint $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$, $x_i \geq 0$. The geometric interpretation on Γ_{12} and Γ_{345} provides a convenient way to represent these solutions as convex combinations of characteristic points M_i, N_j, K_j.

Literature

1. **E. Carlos, Carrasco-Gutierrez and Wilfredo Sosa** *A discrete dynamical system and its application.* Pesquisa Operacional **39**(3), 457–469 (2019).
2. **Sh. J. Seytov, D. B. Eshmamatova** *Discrete dynamical systems of Lotka – Volterra and their applications on the modeling of the biogen cycle in ecosystem.* Lobachevskii journal of mathematics **44**(4), 1462–1476 (2023).

UDK 519.644

Advanced Algorithms for Cone-Beam CT Image Reconstruction

Hayotov A.R.[1], Olchiyev A.A.[2]
[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Termez University of Economics and Service, Termiz, Uzbekistan
hayotov@mail.ru, akbar@gmail.com

In essence, the Radon transform represents integration performed along straight paths. In its most basic application, it employs linear trajectories, which is why it is often referred to as the conventional Radon transform (CRT). As highlighted by Jakowatz and Munson, this approach has found applications in radar imaging, particularly in synthetic aperture radar (SAR), where polar-form data (such as radius and angle) are converted into Cartesian coordinates [1,2].

- Cone-beam computed tomography (CBCT) differs from parallel-beam CT in that the X-ray beams spread out in a cone-like geometry.
- Despite the higher complexity of reconstruction, this technique enables images to be generated with greater spatial accuracy.

Main Algorithms
1. Filtered Back Projection (FBP)

- Computationally fast and conceptually simple;
- Highly sensitive to noise, with significant errors when the number of projections is limited.

2. Iterative Reconstruction Algorithms (IRA: ART, SIRT, MLEM)

- Based on repeated computational updates;
- More robust to noise and capable of producing quality images even with limited data;
- Relatively slow due to high computational demand.

3. Optimal (Modern) Approaches

- Statistical reconstruction (e.g., Bayesian methods, maximum likelihood estimation);
- Regularization techniques (e.g., L1 norm, total variation minimization);
- Compressed sensing вЂ“ achieves high-quality results even from undersampled projections;
- Deep learning-based methods вЂ“ offer both high speed and noise resilience.

References

1. **Jakowatz C. V. Jr., Wahl D. E., Eichel P. H., Ghiglia D. C., Thompson P. A.** *SpotlightMode Synthetic Aperture Radar: A Signal Processing Approach.* Kluwer Academic Publishers. 1996.
2. **Munson D. C., O'Brien J. D., Jenkins W. K.** *A tomographic formulation of spotlightmode synthetic aperture radar* Proceedings of the IEEE, 71(8), 1983, pp. 917-925.

UDK 519.644

Application of the optimal quadrature formula constructed in Hilbert space to image reconstruction in computed tomography

Hayotov A.R.[1,3,4], Kurbonnazarov A.I.[1,2], Turaboyev B. U.[4]
[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Tashkent State Technical University, University str., 2A,Tashkent, 100095, Uzbekistan;
[3]Central Asian university, Uzbekistan.
[4]Termez University of Economics and Service, Termiz, Uzbekistan;
hayotov@mail.ru, mumin_1974@inbox.ru, bahodirb467@gmail.com

The Austrian mathematician Johann Radon (1887-1956) published a landmark article in 1917, entitled "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten"(translated as On the determination of functions from their integrals along certain manifolds) [1]. This contribution laid the groundwork for what is now referred to as the Radon transform. English versions can be found in the monograph by Deans [2, 3] and in Parks' translation [4].

The challenge of reconstructing a function $f(x, y)$ from its line integrals (in two dimensions), or a function $f(x, y, z)$ from integrals across planes (in three dimensions), emerges in a broad spectrum of disciplines. Such areas include medical imaging, astronomy, crystallography, electron microscopy, geophysics, optics, and material sciences. Within these fields, the primary objective is to extract information about the internal composition of an object-either by directing a probe (for instance, x-rays) through it, or by analyzing signals emitted from the source itself, such as an organ in the body containing a radioactive isotope, or even from within the Earth during dynamic processes.

The broad challenge of revealing the internal composition of an object through its projections is referred to as the issue of reconstruction from projections. Numerous circumstances exist where one can determine (or reconstruct) the structural features of a body or material using projection-based techniques that preserve the object in a nearly intact condition. The Radon transform and its inversion provide the mathematical foundation that underpins a wide range of such problems.

The task of reconstructing a function from its projection data arises naturally across many disciplines, so much so that specialists in one field rarely interacted with those in another. This was especially evident before the development of computerized tomography during the 1970s. Consequently, there is a noteworthy history of independent advancements in applying the Radon transform by researchers who were unaware of Radon's original 1917 publication or of contemporary progress in related domains.

For readers interested in exploring these historical aspects, detailed discussions can be found in the work Deans [3].

In this work, we use the coefficients of the optimal quadrature formula for image reconstruction in computed tomography [5].

References

1. **Radon J.** *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte lΓΩngs gewisser Mannigfaltigkeiten.* Berichte Sachsische Akademie der Wissenchaften, Leipzig, Mathematische-Physikalische Klasse, vol. 69, pp. 262-267, 1917.

2. **Deans S. R..** *The Radon Transform and Some of Its Applications* Wiley-Interscience, New York, 1983.

3. **Deans S. R..** *The Radon Transform and Some of Its Applications*, Revised edition. Krieger, Malbar, FL, 1993.

4. **Parks, P. C..** *On the determination of functions from their integral values along certain manifolds* (Translated by P. C. Parks) IEEE Trans. on Medical Imaging, 5, pp. 170-176, 1986.

5. **Hayotov A. R., Babaev S. S., Kurbonnazarov A. I..** *Optimization of approximate integrals of rapidly oscillating functions in the Hilbert space.* Results in Applied Mathematics, 26 (2025) 100569.

UDC 532.546

Finite Difference Approximation For Fractional Solute Transport Equation

Khuzhayorov B.[1,2], Dzhiyanov T. O.[1], Eshdavlatov Z. Z.[1]

[1]Samarkand State University named after Sharaf Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
[2]V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
b.khuzhayorov@mail.ru, t.djiyanov@mail.ru, zarifjon1911@gmail.com

The fractional differensial equation is used in modeling the solute transport in fractured-porous media (FPM). In this work, numerical methods for solving two-dimensional fractional equations of mass transfer with constant coefficients in a finite differenece approximation are investigated. The use of fractional derivatives allows the model equations to describe the early arrival of mass consentration in fractal media.

The methods of numerical approximation of fractional derivatives are directly related to their definitions [1]. A detailed analysis of the application of various approximation methods and existing difference schemes for solving fractional-order differential equations [2].

Let's consider an element of FPM consisting of one fracture and a porous block (matrix) adjacent to it. A fracture is a semi-infinite one-dimensional object [3] and the distribution of the solute and the fluid flow over its cross-section is considered to be uniform. In this formulation, the second dimension of the fracture, i.e. its thickness is not considered here. The porous block occupies the first quadrant of the plane. Thus, the area $R\{0 \le x < \infty,\, 0 \le y < \infty\}$. Let the fluid with solute concentration c_0 is injected to the fracture with a given constant velocity v from the point $x = 0$ of the fracture. Initially, a fracture and a porous block are considered to be filled with a pure (without substance) liquid. Convective-diffusion solute transport occurs in a fracture, and only diffusion occurs in a porous block. We consider the transfer process in a porous block to be anomalous while in a fracture the process occurs without the manifestation of anomalous phenomena.

The equations for the solute transport and the fluid flow in the element of fractured-porous medium are given as

$$\frac{\partial c_f}{\partial t} + v\frac{\partial c_f}{\partial x} = D_f\frac{\partial^2 c_f}{\partial x^2} + m_0 D_m \frac{\partial^{1-\gamma}}{\partial t^{1-\gamma}}\left(\frac{\partial^\delta c_m}{\partial y^\delta}\right)\Bigg|_{y=0}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^\gamma c_m}{\partial t^\gamma} = D_m\frac{\partial^{1+\delta} c_m}{\partial y^{1+\delta}}, \tag{2}$$

where $c_f = c_f(t, x)$ is the solute concentration in the fracture, $c_m = c_m(t, x, y)$ is the solute concentration in the matrix, D_f is the diffusion coefficient in the fracture, v is the velocity of the fluid, $\gamma$and δ are the orders of derivatives ($0 < \gamma,\, \delta \le 1$), m_0 is the coefficient of matrix porosity, t is time, s, x, y are the coordinates. Due to anomality of the solute transport in the matrix, diffusion belongs to non-Fickian law. As a consequence, the diffusion coefficient D_m is the anomalous diffusion coefficient.

The initial and boundary conditions for the above formulation of the problem are as follows:

$$c_f(0, x) = 0, \quad c_m(0, x, y) = 0, \tag{3}$$

$$c_f(t, 0) = c_0, \quad c_f(t, \infty) = 0, \tag{4}$$

$$c_m(t, x, 0) = c_f(t, x), \quad c_m(t, x, \infty) = 0. \tag{5}$$

To solve problem (1) - (5) we use the finite difference method [4,5]. In the area $D = \{0 \le t \le T,\ 0 \le x < \infty,\ 0 \le y < \infty\}$, a net is introduced, where T is the maximum value of the time during the process is studied. To do this, we divide the interval $x \in [0, \infty)$ with the step size h_1, and the interval $y \in [0, \infty)$ with the step size h_2, and the interval $[0, T]$ is divided into J parts with a step τ. As a result, we have a net:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{h_1 h_2 \tau} = \{(x_i, y_k, t_j),\ i = 0,\ 1,\ 2, ...;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ...;\\ j = 0,\ 1,\ ...,\ J;\ \ x_i = ih_1\ ;\ y_k = kh_2\ \ t_j = j\tau;\ \ \tau = T/J\}\ .\end{aligned} \tag{6}$$

Equations (1) and (2) are approximated on the net $\omega_{h_1 h_2 \tau}$. To do this, we use an explicit difference scheme, and we define fractional derivatives in the sense of Caputo. Therefore, the approximations have the form

$$\begin{aligned}&\frac{(c_f)_i^{j+1} - (c_f)_i^j}{\tau} + v\frac{(c_f)_{i+1}^j - (c_f)_i^j}{h_1} = \\ &= D_f \frac{(c_f)_{i-1}^j - 2(c_f)_i^j + (c_f)_{i+1}^j}{h_1^2} + \frac{\tau^{\gamma-1} \cdot m_0 \cdot D_m}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(2-\delta)h_2^\delta} \times \\ &\times \Big[\sum_{l=0}^{j-1}((c_m)_{i,0}^{l+1} - (c_m)_{i,0}^l - (c_m)_{i,1}^{l+1} + (c_m)_{i,1}^l)((j-l)^{1-\gamma} - (j-l-1)^{1-\gamma})\Big],\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)\tau^\gamma}[\sum_{l=0}^{j-2}((c_m)_{i,k}^{l+1} - (c_m)_{i,k}^l) \times ((j-l+1)^\gamma - (j-l)^\gamma) + (c_m)_{i,k}^{j+1} - (c_m)_{i,k}^j] = \\ &= D_m \frac{1}{(2-\delta)h_2^{1+\delta}} \cdot \sum_{r=0}^{k-1}((c_m)_{i,k-(r-1)}^j - 2(c_m)_{i,k-r}^j + (c_m)_{i,k-(r+1)}^j)((r+1)^{1-\delta} - r^{1-\delta}),\end{aligned} \tag{8}$$

where $(c_f)_i^j, (c_m)_{i,k}^j$ are the net values of concentrations $c_f(t,x)$ and $c_m(t,x,y)$ at net points (t_j, x_i) and (t_j, x_i, y_k), respectively, $\Gamma(\cdot)$ is the gamma function.

The initial and boundary conditions are also discretized as:

$$(c_f)_i^0 = 0, \tag{9}$$

$$(c_m)_{i,k}^0 = 0, \tag{10}$$

$$(c_f)_0^j = c_0, \tag{11}$$

$$(c_m)_{i,0}^j = (c_f)_i^j, \tag{12}$$

$$(c_f)_I^j = 0, \tag{13}$$

$$(c_m)_{i,K}^j = 0. \tag{14}$$

Computations were carried out to calculate the fields $(c_f)_i^j, (c_m)_{i,k}^j$ from the (7) and (8).

In Figure 1, it is seen that the sections of the concentration surface c_m on three points $x = 0.1\ m$, $x = 0.3\ m$, $x = 0.5\ m$ for the anomalous case, when the values of γ decrease from one and with decreasing γ from 1 the concentrations profiles are generally understated. However, near the fracture, the profiles on decreasing the value of γ takes higher values.

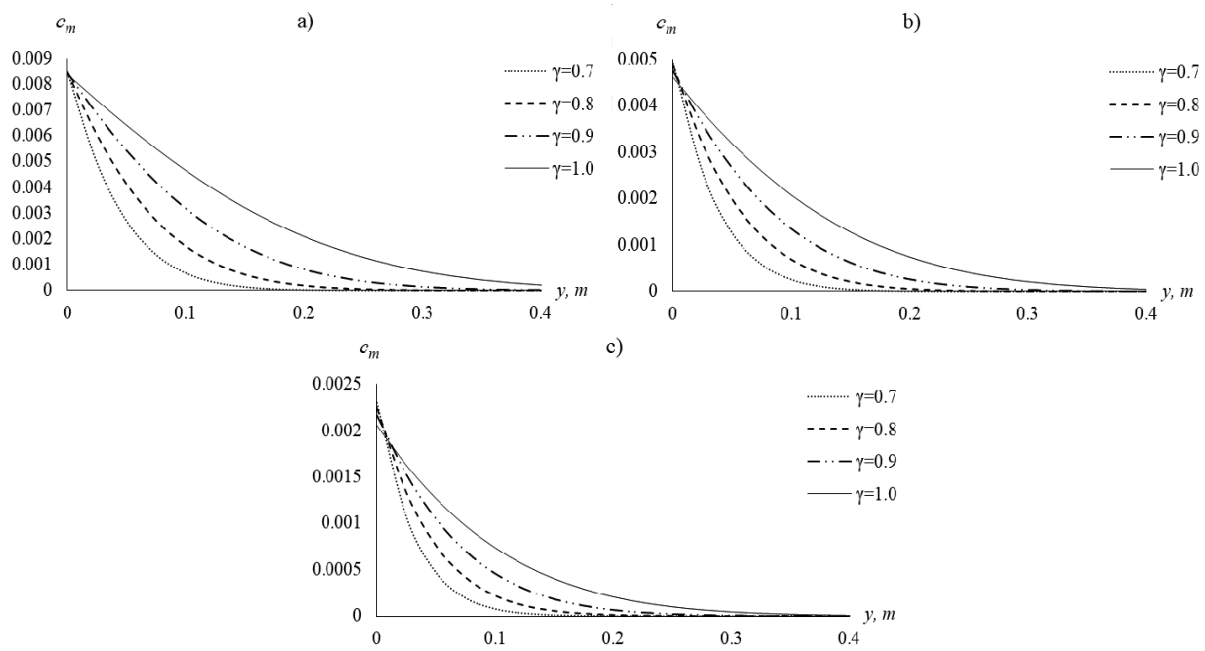


Fig. 1. Concentration profiles c_m at $\delta = 1$, $t = 3600\,\mathrm{s}$ and different values of γ, $x = 0.1\ m$(a), $0.3\ m$ (b), $0.5\ m$ (c)

References

1. **Korchagina A.N., Merzhievskiy L.A.** *Numerical modeling of diffusion processes in fractal media* Scholarly Notes of Transbaikal State University. Series: Physics, Mathematics, Engineering, Technology. - 2013. - No. 3 (50). - P. 53-59. (in Russian)

2. **Taukenova F.I., Shhanukov-Lafishev M.X.** *Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations* Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2006. Vol. 46. No. 10. P. 1871-1881.(in Russian)

3. **Khuzhayorov B., Mustofoqulov J., Ibragimov, G., Md Ali, F., Fayziev, B.** *Solute transport in the element of fractured porous medium with an inhomogeneous porous block* Symmetry, 12(6), (2020): 1028.

4. **Samarskii A.A.** *The theory of difference schemes* - CRC Press, - T . 240. (2001):

5. **Xia Yuan, Wu Jichun, Zhou Luying** *Numerical solutions of time-space fractional advection dispersion equations* J2009, ICCES ICCES, vol.9, no.2, pp. 117-126

FROM DATA TO DIAGNOSIS: ENHANCEMENT OF DIABETIC RETINOPATHY STAGES CLASSIFICATION VIA DATA FUSION

Maz Jamilah Masnan [1,2], Syafawati Ab. Saad [3], Karniza Khalid [4], Safwati Ibrahim [5]

[1] **Department of Mathematical Sciences, Faculty of Intelligent Computing, Universiti Malaysia Perlis (UniMAP), Perlis, Malaysia, Email: mazjamilah@unimap.edu.my;**
[2] **Centre of Excellent for Advanced Sensor Technology, Universiti Malaysia Perlis Perlis, Malaysia, Email: mazjamilah@unimap.edu.my;**
[3] **Department of Mathematical Sciences, Faculty of Intelligent Computing, Universiti Malaysia Perlis (UniMAP), Perlis, Malaysia, Email: syafawatisaad@unimap.edu.my;**
[4] **Medical Department, Omnihealth Group (Malaysia), Platinum Sentral, Kuala Lumpur, Malaysia, Email: karniza.khalid@omnipres.com**
[5] **Department of Mathematical Sciences, Faculty of Intelligent Computing, Universiti Malaysia Perlis (UniMAP), Perlis, Malaysia, Email: safwati@unimap.edu.my;**

Diabetic retinopathy (DR) has emerged as one of the most common and severe complications of diabetes, particularly among individuals who neglect healthy lifestyle practices such as balanced diet, regular exercise, and timely medical check-ups. As a leading cause of preventable blindness, DR requires early detection and accurate classification of its stages to ensure effective treatment and intervention. Traditional diagnostic methods, particularly fundus imaging and ophthalmological assessments, though highly valuable, are often time-consuming, resource-intensive, and dependent on specialist availability. In contrast, statistical modeling offers faster and more accessible alternatives for risk assessment and stage classification. This study emphasizes the importance of developing robust analytical models that utilize patients demographic, risk factors and clinical predictors. Furthermore, the incorporation of data fusion techniques, combining the significant predictors of diabetic retinopathy and nephropathy has become increasingly relevant to enhance classification accuracy. Data fusion allows the integration of homogenous and heterogeneous predictors into a single analytical framework, improving predictive power and yielding more reliable diagnostic outcomes. By bridging mathematical analysis with medical applications, this approach demonstrates how innovative statistical modeling can strengthen early detection strategies, reduce diagnostic delays, and provide scalable solutions to healthcare systems facing growing diabetes-related challenges. Ultimately, the study underscores the transformative role of data fusion in advancing medical diagnostics, particularly in the classification of diabetic retinopathy stages.

Keywords: Statistical Modeling; Classification; Diabetic Retinopathy; Diabetic Nephropathy; Data Fusion;

Literature

1. Ab Saad, S. (2025). Improved Classification of Diabetic Retinopathy Stages based on Fused Predictors of Diabetes Mellitus Linked Diseases [Doctoral Thesis, Universiti Malaysia Perlis].

2. Masnan, M. J. (2017). Discriminant Analysis of Multi Level Data Fusion Based on Percentile Forward Feature Selection, [Doctoral Thesis, Universiti Utara Malaysia]. https://etd.uum.edu.my/id/eprint/7001

УДК 539.3

ELASTIK YARIM FAZODA QATTIQ SHARDA YASSI NOSTATSIONAR KO‘NDALANG TO‘LQIN DIFRAKSIYASI

Musurmonov E. A.[1], Ko‘charova A. R.[2], Shukurova Z. U.[3], Shukurov A. M.[4]
[1] Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O‘zbekiston; elbekmusurmonov97@gmail.com
[2] Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O‘zbekiston; azizakocharova01@gmail.com
[3] Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O‘zbekiston; zevarshukurova89@gmail.com
[4] Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O‘zbekiston; shukurovamon@yandex.ru

Maqolada elastik yarim fazosida joylashgan qattiq sharda yassi nostatsionar ko‘ndalang to‘lqin difraksiyasi jarayoni matematik ifodalanib, bu jarayonga mos boshlang‘ich-chegaraviy masalaning yechish algoritmi ishlab chiqilgan.

Aytaylik, ($z \geq 0$) elastik yarim fazosida R radiusli qattiq shar joylashgan bo‘lsin. Yarim fazoning ($z = 0$) tekis sirtidan shar markazigacha bo‘lgan masofa h ga teng ($h > R$). Izotropik muhit va shar harakati O boshlang‘ich nuqtasi shar markazida bo‘lgan (r,θ,ϑ) sferik koordinatalar sistemasida o‘rganiladi.

Vaqtning boshlang‘ich $\tau = 0$ momentida shar sirtiga potensiali ψ_s bo‘lgan kuchlanishning yassi ko‘ndalang nostatsionar to‘lqini fronti

$$\psi_s(r, \theta, \tau) = f(\tau + r\cos\theta - 1)\mathrm{H}(\tau + r\cos\theta - 1) \tag{1}$$

kelib urinadi. Bu yerda $f(\tau)$– vaqt bo‘yicha potensialning o‘zgarishini beruvchi ixtiyoriy funksiya, $H(x)$ - Xevisaydning birlik funksiyasi.

Natijada qattiq shar markazidan o‘tuvchi o‘q atrofida muhit buralishi yuzaga keladi va muhitda ko‘ndalang to‘lqin tarqaladi. Bu holda ko‘chish vektorlarining faqat w komponentasi noldan farqli bo‘ladi.

Uning kuchlanish tenzori komponentalari bilan bog‘lanishi, ya‘ni Guk qonuni

$$\sigma_{r\vartheta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right], \quad \sigma_{\theta\vartheta} = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial w}{\partial \theta} - wctg\theta\right] \tag{2}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Izotropik muhitning harakati vektor potensialning noldan farqli komponentasi ψ ga nisbatan to‘lqin tenglamasi [1]

$$\eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2\theta} \tag{3}$$

to‘lqin tenglamasi bilan tasvirlanadi. Bu yerda Δ - Laplas operatori.

Izotropik ($z \geq 0$) yarim fazo sirti erkin sirt yoki qattiq tekislik bo‘lishi mumkin, ya‘ni

$$(\sigma_{r\vartheta} + \sigma_{r\vartheta s})|_{z=0} = 0 \; yoki \; (w + w_s)|_{z=0} = 0 \tag{4}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Shar sirtida chegaraviy shart

$$(w + w_s)|_{r=1} = 0, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}, \tag{5}$$

ko‘rinishga ega.

Boshlang‘ich shartlar bir jinslidir, ya‘ni

$$\psi|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = 0. \tag{6}$$

Muhit chegaralanmagani uchun to‘lqin so‘nadi

$$\lim_{r\to\infty} \psi = 0. \tag{7}$$

(3) - (7) boshlang‘ich–chegaraviy masalaни yechishda τ vaqt bo‘yicha Laplas integral almashtirishlari va to‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchilarni ajratish usuli qo‘llanilgan [1]. Tasvirlar fazosida cheksizlikka to‘lqinning so‘nishi (7) shartni e‘tiborga olib, (3) tenglamaning yechimni $C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)$ Gegenbauer ortogonal ko‘phadlari bo‘yicha cheksiz qator ko‘rinishida izlaymiz [2].

(3)-(7) boshlang‘ich–chegaraviy masala Laplas integral almashtirishlari tasvirlar fazosida chiziqli algebraik tenglamalar cheksiz sistemasini yechishga keltirilgan:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{A}z^2 + \mathbf{F}_1\mathbf{A}x - \mathbf{F}_2\mathbf{A}xz^2 = \mathbf{p}_1 z + \mathbf{p}_2 xz + \mathbf{p}_3 z^3 + \mathbf{p}_4 xz^3 \tag{8}$$

Bu yerda $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{F}_1$ va $\mathbf{F}_2$ cheksiz matritsalar, $\mathbf{p}_l$ $(l = \overline{1,4})$ esa cheksiz vektorlar.

(8) sistemaning yechimni eksponentalar bo‘yicha cheksiz qator ko‘rinishida izlaymiz:

$$\mathbf{A}(s) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \mathbf{a}_{ij}(s) x^i z^{-j+1}, \tag{9}$$

Bu yerda $\mathbf{a}_{ij}(s)$ lar elementlari $a_{ij}^{(n)}(s)$ bo‘lgan cheksiz noma‘lum vektor ustunlar.

(9) qator koeffitsiyentlari uchun rekurrent munosabatlar hamda ularga boshlang‘ich shartlar olingan bo‘lib, ular cheksiz sistemaning yechimini reduksiya metodidan foydalanmasdan topishga va $a_{ij}^{(n)}(s)$ elementlarni ratsional funksiyalar ko‘rinishda aniqlashga imkonini beradi.

Ko‘chish vektori va kuchlanish tenzori komponentasi uchun Laplas integral almashtirishlarining tasvirlar fazosida ifodalarni olingan. Ularning originallari qoldiqlar nazariyasi yordamida aniqlanadi [3].

Adabiyotlar

1. **Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.** *Нестационарная аэрогидроупругостъ тел сферической формы.* - М.: ФИЗМАТЛИТ, 1990. – 264 с.

2. **Кузнецов Д.С.** *Специальные функции.* - М.: Высшая школа, 1985. - 423 с.

3. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** *Методы теории функции комплексного переменного.* - М.: Наука, 1987. - 688 с.

Nonyuton suyuqliklarning nostatsionar oqimdagi tezlik taqsimoti

Navruzov K[1], Sharipova Sh. [2] , Aqmonova L. [3]

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, f-m.f.d, prof ;
qurol_46@mail.ru
Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, PhD;
shshb1990@gmail.com
Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universiteti, tayanch doktorant ;

Hozirgi davrda suyuqliklar mexanikasida nostatsionar jarayonlarni o‘rganish dolzarb ilmiy yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Chunki ko‘plab real texnologik tizimlarda oqimlar statsionar emas, balki vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchan xarakterga ega. Ayniqsa, nonyuton suyuqliklarning quvurlarda oqishi neft va gaz sanoati, polimer ishlab chiqarish, oziq-ovqat sanoati, farmatsevtika va biologik tizimlar kabi sohalarda keng uchraydi. Ushbu jarayonlarni chuqur o‘rganish oqimlarni samarali boshqarish, energiya tejamkorligini ta‘minlash va texnologik jarayonlarni optimallashtirish uchun muhim ahamiyatga ega. Shunga ko‘ra, nonyuton suyuqliklarning nostatsionar oqimidagi tezlik taqsimotini o‘rganish, ularni reologik xususiyatlariga qarab modellashtirish va oqim rejimlariga ta’sirini aniqlash maqsad qilingan.

Reologik murakkab suyuqliklarning harakatini tasvirlovchi tenglamalar sistemasi suyuqlikning “kuchlanishlar” shaklida berilgan harakat differensial tenglamalarini, reologik murakkab suyuqliklarning reologik holati tenglamalari va uzluksizlik tenglamasi bilan birgalikda sistema qilib olish orqali hosil qilinadi. Bu tenglamalar sistemasi o‘qqa nisbatan simmetrik oqim uchun quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho F_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\left(\dfrac{\partial \tau_{11}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{12}}{\partial y}\right), \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho F_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\left(\dfrac{\partial \tau_{21}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{22}}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0. \end{cases} \tag{1}$$

Reologik murakkab suyuqlik modellari asosida suyuqlikning harakati laminar tarzda bo‘ladigan yassi kanallardagi nostatsionar oqimi masalalari yechiladi. Yassi kanal devorlari orasidagi masofa 2h deb belgilanadi, kanal yetarlicha uzun, deb faraz qilinib, reologik murakkab suyuqlik oqimi uchun xarakterli nisbiy uzunlik tanlanadi. Bunda kanal eni uzunligining bo‘ylama o‘q bo‘yicha uzunligiga nisbati cheksiz kichik miqdor deb hisoblanadi, shuning uchun oqimlarda ko‘ndalang tezliklar kichik miqdor bo‘ldi, x o‘qi quvur bo‘ylama o‘qi bo‘yicha gorizontal yo‘nalishda, y o‘qi esa x o‘qiga perpendikulyar holda vertikal yo‘nalishda olinadi.:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau}{\partial y}, \qquad \dfrac{\partial p}{\partial y}=0, \\ \tau=\alpha_1\tau_1^0+\alpha_2\tau_2^0, \qquad \tau_1^0=\eta_1^0\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \lambda\dfrac{\partial \tau_2^0}{\partial t}+\tau_2^0=\eta_2^0\dfrac{\partial u}{\partial y}, \qquad \eta=\alpha_1\eta_1^0+\alpha_2\eta_2^0. \end{cases} \tag{2}$$

Boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni quyidagicha ifodalaymiz. Buning uchun t=0 vaqtda suyuqlik tinch holatda, deb hisoblaymiz, ya‘ni

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Vaqtning noldan katta qiymatlarida kanalda o‘zgarmas bosim gradienti ta‘sirida suyuqlik oniy harakatga keladi, deb qaraladi, ya‘ni

$$t \geq 0 \ \text{ va } \ y = 0 \ \text{ da } \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad t \geq 0 \ \text{ va } \ y = h \ \text{ da } \ u = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} \neq 0. \tag{4}$$

$$\begin{aligned} u(y,t) = \frac{h^2}{2\eta}\left(-\frac{dp(x)}{dx}\right)\Bigg[\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right) \\ + 32\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\frac{y}{h}\right)\,2e^{-\frac{\nu}{h^2}a_n t}}{(2n+1)^3\pi^3\left(M_2^2+N_2^2\right)} \\ \times\left(M_3\cos\left(b_n\tfrac{\nu}{h^2}t\right)+N_3\sin\left(b_n\tfrac{\nu}{h^2}t\right)\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{u(0,t)}{u_0} = 1 + 32\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}e^{-\frac{\nu}{h^2}a_n t}}{(2n+1)^3\pi^3\left(M_2^2+N_2^2\right)}\left(M_3\cos\left(b_n\tfrac{\nu}{h^2}t\right)+N_3\sin\left(b_n\tfrac{\nu}{h^2}t\right)\right). \tag{6}$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Marx U., Wallis H. “Homan-on-a-Chip” developments: a translational cutting- edge alternative to systemic safety assessment and effecting evacuation in laboratory animals and man, ATLA 2012. Vol. 40. P. 235-257.

2. Navruzov K., Sharipova Sh.Tangential shear stress in oscillatory flow of a viscoelastic incompressible fluid in a plane channel Fluid Dynamics. – 2023. – T. 58. – №. 3. – C. 360-370.

Grid generation and mapping in the spectral-grid method for high-order singularly perturbed ODEs

Normurodov Ch.B., Murodov S.K.
Termez State University, Termez, Uzbekistan
ch.normurodov@gmail.com, smurodov870@gmail.com

Numerical simulation of a boundary value problem for an ordinary fourth-order differential equation with a small parameter with a higher derivative is an urgent problem in the field of computational and applied mathematics. The presence of a small parameter in the differential equations requires the development of adaptive numerical methods with high accuracy and efficiency. The numerical calculations for calculating the solution and its derivatives of various order show the high accuracy and efficiency of the spectral-grid method at different values of the small parameter, the grid elements and the total number of Chebyshev polynomials of the first kind.

Let us consider an ordinary fourth-order differential equation with a small parameter with the highest derivative:

$$\varepsilon\frac{d^4u}{d\eta^4} - 2\frac{d^2u}{d\eta^2} + u(\eta) = f(\eta),\ \eta \in (\eta_0, \eta_l), \tag{1}$$

with the following boundary conditions:

$$u(\eta_0) = \frac{du}{d\eta}(\eta_0) = 0,\ u(\eta_l) = \frac{du}{d\eta}(\eta_l) = 0, \tag{2}$$

Presence of a small parameter ε with the highest derivative imposes additional requirements on the approximation properties of the numerical methods used. To study the convergence and order of accuracy of the spectral-grid method, we will use the method of trial functions [1]. According to this method, a certain arbitrary function is chosen $u_e(\eta) = u_{exact}(\eta)$. Substituting it into the differential equation (1), we find the right side $f(\eta) = \varepsilon\frac{d^4u_e}{d\eta^4} - 2\frac{d^2u_e}{d\eta^2} + u_e(\eta)$ and require the fulfillment of boundary conditions (2).

To solve this problem with the spectral-grid method, we introduce a grid in the integration interval $\eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_N = \eta_l$ and obtain N various elements:

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \cdots, [\eta_j, \eta_{j+1}], \cdots, [\eta_{N-1}, \eta_N], j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

The differential equation (1) on each of these elements takes the form

$$\varepsilon\frac{d^4u_j}{d\eta^4} - 2\frac{d^2u_j}{d\eta^2} + u_j(\eta) = f_j(\eta),\ j{=}1, 2, \ldots, N, \tag{3}$$

Boundary conditions (2) are written at points η_0 and η_N:

$$u(\eta_0) = \frac{du}{d\eta}(\eta_0) = 0,\ \mathrm{u}(\eta_N) = \frac{du}{d\eta}(\eta_N) = 0, \tag{4}$$

In the internal nodes of the grid, we require the continuity of the solution of equation (3) and its derivatives up to the third order. These conditions are as follows:

$$u_j^{(t)}(\eta_j) = u_{j+1}^{(t)}(\eta_j),\ t = 0, 1, 2, 3;\ j = 1, 2, \ldots,\ N-1, \tag{5}$$

where t is the order of the derivative.

The solution of problem (3)–(5) is sought in the form of a series of Chebyshev polynomials of the first kind. To do this, each element of the grid $[\eta_{j-1}, \eta_j]$ is mapped to the interval $[-1, 1]$ using the following replacement of the independent variable:

$$\eta = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2}y,\ m_j = \eta_j + \eta_{j-1},\ l_j = \eta_j - \eta_{j-1},\ j = 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

where l_j is the length j of the mesh element. After transforming (6), equations (3) take the following form:

$$\varepsilon \cdot \left(\frac{l_j}{2}\right)^4 \frac{d^4u_j}{dy^4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l_j}{2}\right)^2 \frac{d^2u_j}{dy^2} + u_j(\eta) = f_j(\eta), j = 1, 2, \ldots N. \tag{7}$$

From conditions (4)–(5) we have:

$$\begin{gathered} u_1(-1) = \frac{du_1}{dy}(-1) = 0,\ u_N(+1) = \frac{du_N}{dy}(+1) = 0, \\ \left(\frac{l_j}{2}\right)^t \frac{d}{dy}u_j^{(t)}(+1) = \left(\frac{l_{j+1}}{2}\right)^t u_{j+1}^{(t)}(-1), \\ t = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2, \ldots,\ N-1. \end{gathered} \tag{8}$$

The following function is chosen as a test function:

$$u_e(\eta) = \left(1-\eta^2\right)^2 e^{\varepsilon\eta}.$$

, where $u_e(\eta) = u_{exact}(\eta)$. By using this test function, the differential problem (1)–(2) is solved by the spectral ($N = 1$) and spectral-grid method ($N \neq 1$) at different values of a small parameter[2].

Table 1 shows the result of calculations for calculating the maximum absolute errors $\Delta = \max\limits_{0\le l\le p_j}\left|u_e^{(t)} - u_a^{(t)}\right|, t = 0,1,2,3,4,\ j = 1,2,3,...,N$, in the nodes of Chebyshev polynomials of the first kind.

Table 1. Maximum absolute errors for the solution and its derivatives

Small parameter ε	M	N	Decision	First derivative	Second derivative	Third derivative	Fourth derivative
	40	1	$7.7 * 10^{-16}$	$1.5 * 10^{-15}$	$2.4 * 10^{-13}$	$1.8 * 10^{-10}$	$3.9 * 10^{-8}$
	40	2	$6.6 * 10^{-16}$	$5.1 * 10^{-15}$	$1.5 * 10^{-13}$	$4.2 * 10^{-11}$	$4.1 * 10^{-9}$
10^{-5}	40	4	$4.4 * 10^{-16}$	$2.2 * 10^{-16}$	$7.2 * 10^{-16}$	$3.6 * 10^{-14}$	$6.8 * 10^{-13}$
	40	8	$2.2 * 10^{-15}$	$9.7 * 10^{-16}$	$3.0 * 10^{-15}$	$2.6 * 10^{-14}$	$9.7 * 10^{-14}$
	40	1	$1.6 * 10^{-15}$	$1.1 * 10^{-14}$	$6.3 * 10^{-13}$	$8.6 * 10^{-10}$	$4.1 * 10^{-7}$
	40	2	$9.4 * 10^{-16}$	$8.4 * 10^{-15}$	$2.2 * 10^{-13}$	$7.0 * 10^{-11}$	$7.3 * 10^{-9}$
10^{-7}	40	4	$6.6 * 10^{-16}$	$4.9 * 10^{-16}$	$3.3 * 10^{-15}$	$1.8 * 10^{-13}$	$3.3 * 10^{-12}$
	40	8	$3.3 * 10^{-16}$	$2.6 * 10^{-16}$	$1.1 * 10^{-16}$	$5.7 * 10^{-16}$	$1.0 * 10^{-15}$
	40	1	$1.4 * 10^{-15}$	$3.9 * 10^{-14}$	$1.9 * 10^{-12}$	$2.8 * 10^{-9}$	$1.3 * 10^{-6}$
	40	2	$4.4 * 10^{-16}$	$1.1 * 10^{-15}$	$2.0 * 10^{-14}$	$6.3 * 10^{-12}$	$7.0 * 10^{-10}$
10^{-9}	40	4	$3.3 * 10^{-16}$	$3.8 * 10^{-16}$	$4.9 * 10^{-15}$	$2.7 * 10^{-13}$	$5.0 * 10^{-12}$
	40	8	$3.3 * 10^{-16}$	$1.9 * 10^{-16}$	$1.8 * 10^{-16}$	$7.4 * 10^{-16}$	$1.5 * 10^{-15}$

In here, M is total number of polynoms and N is number of mesh elements. From the numerical results given in Table 1, it can be seen that with a decrease in the value of the small parameter ε, the accuracy of calculating the higher derivatives in the spectral-grid method ($N \neq 1$) is much better in comparison with the spectral method ($N = 1$).

References

1. **Самарский А.А.** *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1977. – 656 с.
2. **Normurodov Ch.B., Murodov S.K., Shakaeva E.E.** *Spectral-grid approximation of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative.* Problems of Computational and Applied Mathematics, (2025). DOI:10.71310/pcam.2_64.2025.05

UDK 519.644

Ko‘p masshtabli usul va chegaraviy qatlamli singulyar qo‘zg‘algan masalalarning sonli modellashtirilishi

Normurodov Ch. B. [1], Xolmirzayeva N. A. [2]
[1] Termiz Davlat universiteti, f.-m.f.d., professor
[2]Termiz Davlat universiteti, tayanch doktorant
nigora.xolmirzayeva1988@gmail.com

Matematik fizika va muhandislik amaliyotida tez-tez uchraydigan differensial tenglamalarning ayrim sinflari kichik parametr ishtirokida aniqlanadi. Bu parametr yechimlarda keskin o‘zgarishlarga olib kelib, chegaraviy qatlamlarning paydo bo‘lishiga sabab bo‘ladi. Bunday masalalar singulyar buzilgan masalalar (singularly perturbed problems) nomi bilan mashhur. Oddiy perturbatsiya usuli kichik parametrlarni hisobga olishda samarali bo‘lsa-da, singulyar buzilgan masalalarda u ko‘pincha noto‘g‘ri natijalarga olib keladi. Bunga sabab shuki, oddiy kengaytirish orqali hosil qilingan yechim chegaraviy shartlarni to‘liq qanoatlantirmaydi. Chegaraviy qatlam nazariyasi esa ichki va tashqi yechimlarni alohida ko‘rib chiqib, ularni muvofiqlashtirish orqali yaxlit yechim hosil qiladi. Ko‘p masshtabli usul esa ushbu yondashuvlarni umumlashtirib, yechimni bir nechta o‘zgaruvchi miqyoslarda qidirishga imkon yaratadi. Quyida singulyar buzilgan chegaraviy masala uchun tashqi–ichki asimptotik yechimlar va ularning moslashtirilishi asosida kompozit yechim quriladi. Model masala sifatida quyidagidan foydalanamiz:

$$\varepsilon y''(x) + y'(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{1}$$

Tashqi yechim $\varepsilon \to 0$ da tenglama:

$$y_0'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = x + C.$$

Chap chegara sharti $y(0) = 0$ dan $C = 0$. Demak,

$$y_{\text{out}}(x) = x.$$

Bu yechim $x = 1$ dagi shartni ($y(1) = 0$) bajarmaydi.

Ichki yechim O‘ng chegara yaqinida yangi masshtab:

$$\xi = \frac{1 - x}{\varepsilon}.$$

Shunda:

$$y' = -\frac{1}{\varepsilon} Y'(\xi), \qquad y'' = \frac{1}{\varepsilon^2} Y''(\xi).$$

Asl tenglama:

$$Y'' - Y' = \varepsilon.$$

Yetakchi tartibda:

$$Y_0'' - Y_0' = 0 \ \Rightarrow \ Y_0(\xi) = A + Be^{\xi}.$$

Barqarorlik uchun $B = 0$, demak $Y_0(\xi) = A$. Moslashtirish sharti: $A = 1$. Moslashtirilgan kompozit yechim:

$$y_{\text{comp}}(x) = y_{\text{out}}(x) + Ae^{-(1-x)/\varepsilon}.$$

Chegara sharti $y(1) = 0$ dan:

$$0 = 1 + A \quad \Rightarrow \quad A = -1.$$

Shunday qilib:

$$\boxed{y_{\text{comp}}(x) = x - e^{-(1-x)/\varepsilon}}$$

Asl masala uchun aniqlik:

$$\varepsilon v' + v = 1, \qquad v = y'.$$

Integrallab:

$$v(x) = 1 + Ce^{-x/\varepsilon}, \quad y(x) = x - C\varepsilon e^{-x/\varepsilon} + D.$$

Chegara shartlardan C, D topilib:

$$y_{\text{exact}}(x) = x + \frac{e^{-x/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}}.$$

$\varepsilon \to 0$ da:

$$y_{\text{exact}}(x) \sim x + e^{-x/\varepsilon}.$$

Bu kompozit yechim bilan bir xil tartibda mos keladi. Tashqi–ichki asimptotik yondashuv va

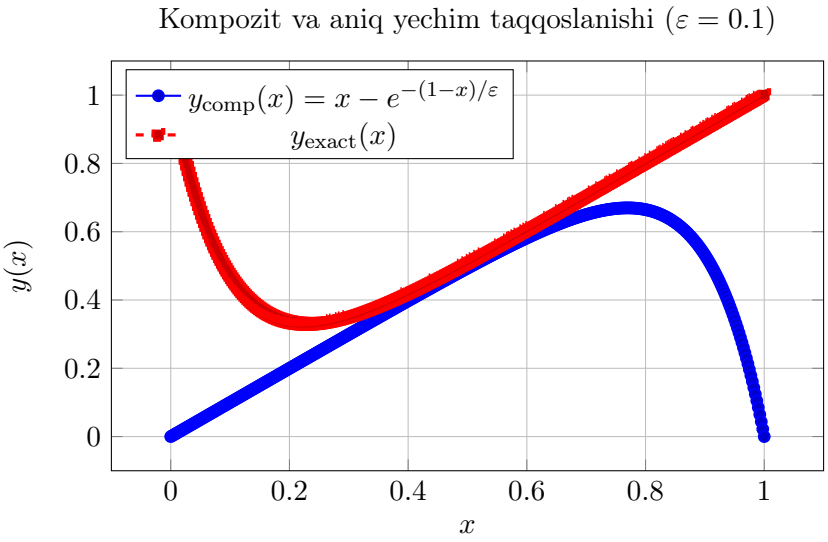


Рис. 4: Kompozit asimptotik yechim va aniq yechimning taqqoslanishi.

moslashtirish orqali olingan kompozit yechim butun oraliqda yaxshi yaqinlashadi: markazda tashqi yechim ustun, o‘ng chegara yaqinida esa eksponentsial tuzatish chegaraviy qatlamni to‘g‘ri aks ettiradi. Bu ko‘p masshtabli/moslashtirilgan asimptotik metodning samaradorligini ko‘rsatadi.

Adabiyotlar

1. **O‘malley.** *R. E. Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations.* -M.: Springer, 1991.

УДК 519.644

Optimal quadrature formula with derivative

Nuraliyev F.A.[2,3], Edilbekova R.M.[1,3]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;
[3]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
farxod.nuraliyev@teacher.tiu.uz

As is generally known, numerical integration formulae, or quadrature formulae, are methods for the approximate evaluation of definite integrals. They are needed for the computation of those integrals for which either the antiderivative of the integrand cannot be expressed in terms of elementary functions or for which the integrand is available only at discrete points, for example from experimental data. In addition and even more important, quadrature formulae provide a basic and important tool for the numerical solution of differential and integral equations. There are several methods of construction of optimal quadrature formulas in the sense of Sard such as spline method, $\varphi-$ function method and Sobolev's method which is based on construction of discrete analogue of a linear differential operator. In the different spaces, based on these methods, the Sard problem was investigated by many authors [1,2].

We consider the following quadrature formula with derivative

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\varphi(h\beta) + \frac{h^2}{12}\left(\varphi'(0) - \varphi'(1)\right) + \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\varphi'''(h\beta), \tag{1}$$

where $C_0[\beta] = \begin{cases} h/2\,; & \beta = 0, N \\ h; & \beta = \overline{1, N-1} \end{cases}$, $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(0,1)$ and $C_1[\beta]$ are unknown coefficients of the quadrature formula (1), $L_2^{(m)}(0,1)$ is the space of functions which are square integrable with m-th generalized derivative.

The difference between the integral and quadrature sum obtained from the quadrature formula is referred to as the error of the formula

$$(l,\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\varphi(h\beta) - \frac{h^2}{12}\left(\varphi'(0) - \varphi'(1)\right) - \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\varphi'''(h\beta). \tag{2}$$

From difference (2) it follows that quadrature formula (1) corresponds to the following error functional

$$l(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\delta(x - h\beta) + \frac{h^2}{12}\left(\delta'(x) - \delta'(x-1)\right) + \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\delta'''(x - h\beta), \tag{3}$$

where $\delta(x)$ is the Dirac delta-function and $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[0,1]$.

The norm in space $L_2^{(m)}(0,1)$ is defined by the following form

$$\|f\|^2_{L_2^{(m)}(0,1)} = \int_0^1 \left(f^{(m)}(x)\right)^2 dx.$$

In addition, the error functional (3) is required to satisfy the following conditions

$$(l(x), x^{\alpha}) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, ..., m-1.$$

Error (2) based on the Cauchy-Schwarz inequality is estimated as follows

$$|(l, f)| \leq \|f\|_{L_2^{(m)}(0,1)} \cdot \|l\|_{L_2^{(m)*}(0,1)}.$$

Here, we have the following problems:

1. Find the norm of the error functional (3) of the quadrature formula (1).

2. Find the coefficients $C_1[\beta], \quad \beta = \overline{0, N}$, which give the smallest value to the norm $\|l\|_{L_2^{(m)*}}$ of the error functional (3), that is, calculating the value

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\right\|_{L_2^{(m)*}} = \inf_{C_1[\beta]} \|\ell_N\|_{L_2^{(m)*}}$$

Theorem. *The coefficients $C_1[\beta]$, $\beta = 1, 2, ..., N-1$ of the optimal quadrature formulas of the form (1) in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ have the following form*

$$C_1[\beta] = h^4 \sum_{k=1}^{m-4} \left(a_k \lambda_k^{\beta} + b_k \lambda_k^{N-\beta}\right), \qquad \beta = 1, 2, ..., N-1.$$

References

1. **Sobolev S.L.** *Introduction to the theory of cubature formulas.* M.: Наука, 1974. — 808 p.
2. **Shadimetov Kh., Nuraliev F.** *Optimal formulas of numerical integration with derivatives in Sobolev space,* Journal of Siberian Federal University – Mathematics and Physics, 2018, 11(6), pp. 764-775.

UDK 519.652

System of equations for finding the coefficients of an algebraic hyperbolic natural spline of the eighth order

Nuraliev F. A.[1,2], Abdullaeva G. Sh.[2]
[1]Toshkent International University, Tashkent, Uzbekistan;
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
farhod.nuraliyev@teacher.tiu.uz, gulruxshukurillayevna@gmail.com

Let be given the following class of functions:

$$K_{2,v}^{(3,4)} = \{f : [0,1] \to R, \ f''' \, is \, abs \, cont, \ f^{(4)} \in L_2(0,1)\}. \tag{1}$$

This space is a Hilbert space with the following inner product:

$$(f, g) = \int_0^1 (f^{(4)}(x) - v^2 f^{(2)}(x))(g^{(4)}(x) - v^2 g^{(2)}(x))dx. \tag{2}$$

The norm is defined by the inner product:

$$\|f\|^2 = \int_0^1 \left((f^{(4)}(x) - v^2 f^{(2)}(x))\right)^2 dx. \tag{3}$$

Then, the class $K_{2,v}^{(3,4)}$ is factorized Hilbert space with the norm (3). Let $0 = x_0 < .... < x_N = 1$ be a grid on the segment $[0,1]$, and the values $Y : y_0,\ y_1, ..., y_N$ be given in this grid. We consider the following problem:

Problem 1. Find a function $f \in K_{2,v}^{(3,4)}$ which gives minimum to the norm (3) and satisfies the interpolation conditions

$$f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, ..., N,\ x_i \in [0,1].$$

One of the functions that minimizes the norm in this space is an algebraic hyperbolic natural spline of order eighth, which is defined as follows.

Definition 1.

I. $S_\Delta(f,x)$ consists of a linear combinations of functions $\sinh vx$, $\cosh vx$, $vx\sinh v$, $vx\cosh vx$, x^3, $x^2, x,\ 1$ in every subinterval $(x_i, x_{i+1}),\ i = 0, 1, ..., N-1$.

II. $S_\Delta(f,x)$ is a linear combination of functions $\sinh vx$, $\cosh vx$, x, 1 in subintervals $(-\infty, a)$ and (b, ∞).

III. $S_\Delta(f,x)$ satisfies the following continuity and natural spline conditions

$$S_\Delta^{(\alpha)}(f, x_i - 0) = S_\Delta^{(\alpha)}(f, x_i + 0),\ \ \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad i = 1, 2, ..., N-1,$$

$$S^{(4+k)}(0) - v^2 S^{(2+k)}(0) = S^{(4+k)}(1) - v^2 S^{(2+k)}(1) = 0,\ k = 0, 1, 2,$$

IV. The function $S_\Delta(f,x)$ satisfies interpolation conditions

$$S_\Delta(f, x_i) = y_i,\ i = 0, 1, ..., N.$$

Using the above, we present the following theorem about the appearance of a natural spline, which is one of the solutions to Problem 1.

Theorem 1. *The natural spline, minimizing the norm in the space $K_{2,v}^{(4,3)}$, has the following form:*

$$S_\Delta(Y,x) = \sum_{i=0}^{N} C_i G_4(x - x_i) + d_1 \sinh(\nu x) + d_2 \cosh(\nu x) + p_0 + p_1 x, \tag{4}$$

where C_i, $i = 0, 1, ..., N, d_1, d_2$, p_0, p_1 are coefficients of the spline (4). $G_4(x)$ is the fundamental solution of the operator $\frac{d^8}{dx^8} - 2v^2\frac{d^6}{dx^6} + v^4\frac{d^4}{dx^4}$ and has the form

$$G_4(x) = \frac{sign(x)}{4v^7}(vx\cosh(vx) - 5\sinh(vx) + 2\sum_{k=1}^{2}\frac{(3-k)(vx)^{2k-1}}{(2k-1)!}), \tag{5}$$

where $\delta(x)$ is the Dirac delta-function.

The Coefficients of the natural spline satisfies the following system of the linear equations.

$$\sum_{i=0}^{N} C_i G(x_j - x_i) + d_1 \sinh(vx_j) + d_2 \cosh(vx_j) + p_0 + p_1 x = y_j,\ j = 0, 1, ..., N,$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \sinh(vx_i) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \cosh(vx_i) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i x_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i = 0.$$

References

1. **Ahlberg J.H., Nilson E.N., and Walsh J.L.,** *The theory of splines and its applications.* New York, 1967.

UDC 519.644

Coefficients of the optimal quadrature formula in $W_2^{(2)}(0,1)$ space

Nuraliyev F.A.[1,2], Ulikov Sh.Sh.[1,3], Kuziev Sh.S.[4]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;
[3]Oriental University, Tashkent, Uzbekistan;
[4]Kokand University, Tashkent, Uzbekistan;
nuraliyevf@mail.ru, sh-ulikov@mail.ru

The formulation and main results of the theory of optimal quadrature and cubature formulas belong to S.L. Sobolev [1] who proposed a functional analytical method for a class of integrands from some Banach spaces. In large numerical calculations, difficulties arise in the process of approximate calculation of integrals, since universal methods for optimizing quadrature and cubature formulas on classes of functions have not yet been created and, in this regard, research on problems is being conducted from the point of view of different scientific directions. One of such directions is the functional-analytical approach, connected with the study of error estimates as a linear bounded functional over some Banach space of basic functions [2,3].

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} k[\beta]\,\varphi(h\beta) \tag{1}$$

with error functional

$$\ell(x) = i_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} k[\beta]\delta\,(x - h\beta), \tag{2}$$

where $k[\beta]$ and $(h\beta) \in [0,1]$ are the coefficients and nodes of the quadrature formula (1), $i_{[0,1]}(x)$ is the indicator of the interval $[0,1]$, $\delta(x)$ is the Dirac delta-function, and $\varphi(x)$ belongs to the Hilbert space $W_2^{(m)}(0,1)$ with the norm

$$\|\varphi\| = \left\{ \int_0^1 \left(\left(\frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \right)^2 + \left(\frac{d^{m-1} \varphi(x)}{dx^{m-1}} \right)^2 \right) dx \right\}^{1/2}.$$

In [3], an extremal function was found and using it, the following representation of the square of the norm of the error functional (2) was obtained:

$$\left\| \ell(x) \left| W_2^{(m)*}(0,1) \right\| \right\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} k\,[\beta]\, k\,[\gamma]\, \mu_m(h\beta - h\gamma) \right.$$

$$\left. -2 \sum_{\beta=0}^{N} k\,[\beta] \int_0^1 \mu_m\,(x - h\beta)\, dx + \int_0^1 \int_0^1 \mu_m\,(x-y)\, dxdy \right], \tag{3}$$

where

$$\mu_m(x) = \tfrac{1}{2}\ \mathrm{sign}(x) \left(\tfrac{e^x - e^{-x}}{2} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right). \tag{4}$$

The error functional (2) satisfies

$$\ell(x^\alpha) = 0, \qquad \alpha = 0, \ldots, m-2. \tag{5}$$

Using the method of Lagrange multipliers, the following discrete WienerвЂ“Hopf type system was obtained for finding the coefficients:

$$\sum_{\gamma=0}^{N} k[\gamma]\, \mu_m(h\beta - h\gamma) + P_{m-2}(h\beta) = f_m(h\beta), \quad \beta = 0, \ldots, N,$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} k[\beta](h\beta)^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha = 0, \ldots, m-2,$$

where

$$f_m(h\beta) = \int_0^1 \mu_m(x - h\beta)\, dx, \qquad P_{m-2}(h\beta) = \sum_{j=0}^{m-2} b_j (h\beta)^j.$$

Teorema. *The coefficients of optimal quadrature formulas in space $W_2^{(2)}(0,1)$ are determined by*

$$k[\beta] = \begin{cases} \frac{h}{2} + a\frac{\lambda_1 - \lambda_1^N}{\lambda_1 - 1}, & \beta = 0, \\ h + a\left(\lambda_1^\beta + \lambda_1^{N-\beta}\right), & \beta = 1, \ldots, N-1, \\ \frac{h}{2} + a\frac{\lambda_1 - \lambda_1^N}{\lambda_1 - 1}, & \beta = N, \end{cases}$$

where

$$a = \frac{(e+1)\big[2(e^h - 1) - h(e^h + 1)\big](\lambda_1 - 1)(e^h - \lambda_1)(\lambda_1 e^h - 1)}{2\lambda_1 (e^h - 1)^2 \big[(\lambda_1^N + e)(\lambda_1 e^h - 1) - (\lambda_1^N e + 1)(e^h - \lambda_1)\big]},$$

$$\lambda_1 = \frac{h(1+e^{2h}) + 1 - e^{2h} - (e^h - 1)\sqrt{h^2(1+e^h)^2 - 2h(e^{2h}-1)}}{1 + 2he^h - e^{2h}}, \qquad |\lambda_1| < 1.$$

.

References

1. **Sobolev S.L.** *Introduction to the theory of cubature formulas.* Nauka, Moscow, 1974.
2. **Shadimetov Kh., Hayotov A.R., Akhmedov D.M.** *Optimal quadrature formulas for Cauchy type singular integrals in Sobolev space.* Applied Mathematics and Computation, 2015, 263, pp. 302-314.
3. **Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Azamov S.S., Ulikov Sh.Sh.** *Coefficients of Optimal Quadrature Formulas in the Space of Differentiable Functions* // AIP Conf. Proc. 3004, 060035 (2024). https://doi.org/10.1063/5.0200106

УДК 519.957

CHIZIQSIZ CHEGARAVIY SHARTLAR BILAN BERILGAN REAKSIYA-DIFFUZIYA SISTEMASI YECHIMLARINING ASIMPTOTIKASI

Raxmonov Z. R. Zaripova A.R. .[2]
[1] O‘zbekiston milliy universiteti, f.-m.f.d., professor
e-mail: zraxmonov@inbox.ru
[2]Qarshi davlat universiteti, tayanch doktorant
azizazaripova1990@mail.ru

Ushbu maqolada biz $Q = \{(x,t)\,,\, t>0,\, x \in R\}$ sohada quyidagi parabolik tipdagi buziluvchan tenglamalar sistemasi uchun

$$u_{it} = \left(\mid u_{ix}\mid^{p_i-2} u_{ix} \right)_x, \quad i = 1,2,\ldots,k, \quad x>0, \quad 0<t<T, \tag{1}$$

nochiziqli chegaraviy

$$-\mid u_{ix}\mid^{p_i-2} u_{ix}(0,t) = u_{i+1}^{q_i}(0,t), \quad i = 1,2,\ldots,k, \quad u_{k+1} = u_1, \quad 0<t<T, \tag{2}$$

hamda boshlang‘ich shartlar bilan berilgan

$$u_i(x,0) = u_{i0}(x), \quad i = 1,2,\ldots,k, \quad x>0, \tag{3}$$

masalaning avtomodel yechimlari asimptotikasini tadqiq etamiz. Bu yerda $p_i > 2, q_i > 0$ va $u_{i0} (i = 1,2,\ldots,k)$ funksiyalar $\mathbb{R}_+$ da manfiy bo‘lmagan kompakt yurituvchili uzluksiz funksiyalar.

Dastlab (1)-(3) masalani sonli yechish sxemasini quramiz.

Berilgan $Q = \{(t,x) : 0 \le t < T,\ 0 \le x \le b\}$ sohada vaqt va fazo bo‘yicha quyidagicha to‘r qurib olamiz: $\tau = \frac{T}{n}$, $h = \frac{b}{n}$ (1)-(3) masalani sonli usulda yechishimiz uchun oshkormas sxemadan foydalanamiz:

$$V_\tau = \{t_j = j\tau, \tau>0, j = 1,2,...,m;\ \ m\tau = T,\ \ T>0\}\,; S_h = \{x_i = ih; h>0; i = 1,2,...,n; nh = b\}$$

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left[D_{i+1}^j({y_{i+1}}^j)\left(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}\right) - D_i^j({y_i}^j)\left(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}\right)\right] \\ \frac{z_i^{j+1}-z_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left[M_{i+1}^j(z_{i+1}^j)\left(z_{i+1}^{j+1} - z_i^{j+1}\right) - M_i^j(z_i^j)\left(z_i^{j+1} - z_{i-1}^{j+1}\right)\right] \end{cases} \tag{4}$$

$i = 2, ..., n-1; j = 0, 1, ..., m-1;\ y_i^0 = y(x_i, 0),\ z_i^0 = z(x_i, 0)$
$i = 0, 1, ..., n$

$$\begin{cases} -D_1(y_1) \cdot \frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} = \left(z_0^j\right)^{q_1} \\ -M_1(z_1) \cdot \frac{z_1^{j+1} - z_0^{j+1}}{h} = \left(y_0^j\right)^{q_2} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} y_n^j = \varphi_1(t_j), \\ z_n^j = \varphi_2(t_j), \\ j = 2, 3, ..., m \end{cases} \tag{6}$$

(4) sistema y^{j+1} va z^{j+1} ga nisbatan chiziqsiz tenglamalar sistemasi. Sistemani sonli yechimlarini olishda uni chiziqlashtirish uchun oddiy iteratsiya usulida foydalanamiz:

$$\begin{cases} \frac{\overset{s+1}{y}{}_i^{j+1} - \overset{s}{y}{}_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left[D_{i+1}^j(y_{i+1}^j)\left(\overset{s+1}{y}{}_{i+1}^{j+1} - \overset{s+1}{y}{}_i^{j+1}\right) - D_i^j(y_i^j)\left(\overset{s+1}{y}{}_i^{j+1} - \overset{s+1}{y}{}_{i-1}^{j+1}\right)\right] \\ \frac{\overset{s+1}{z}{}_i^{j+1} - \overset{s}{z}{}_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left[M_{i+1}^j(z_{i+1}^j)\left(\overset{s+1}{z}{}_{i+1}^{j+1} - \overset{s+1}{z}{}_i^{j+1}\right) - M_i^j(z_i^j)\left(\overset{s+1}{z}{}_i^{j+1} - \overset{s+1}{z}{}_{i-1}^{j+1}\right)\right] \end{cases} \tag{7}$$

bu yerda $s = 0, 1, 2, ...$
Iteratsion usulning yaxshi natijasi mos boshlang‘ich yaqinlashishni tanlashga bog‘liq bo‘lib, u yechimga tez yaqinlashishni va masalaning fizik ma’nosini saqlanishini taminlaydi. Bunga mos boshlang‘ich yaqinlashish sifatida masalaning asimptotik yechimlarini tanlash mumkin. Har bir vaqt qadami uchun boshlang‘ich iteratsiya qiymatlari $\overset{s+1}{y}{}_i\}$, $\overset{s+1}{z}{}_i$ oldingi vaqt qadamidan olinadi:
$\overset{0}{y}{}^{j+1} = y^j,\ \overset{0}{z}{}^{j+1} = z^j.$

Takrorlanuvchi sxema yordamida hisoblashda takrorlashning aniqligi belgilanadi, bunda jarayon

$$\begin{cases} \max\limits_{0 \le i \le n} \left| \overset{s+1}{y}{}_i - \overset{s}{y}{}_i \right| < \varepsilon \\ \max\limits_{0 \le i \le n} \left| \overset{s+1}{z}{}_i - \overset{s}{z}{}_i \right| < \varepsilon \end{cases} \tag{8}$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz: $\overset{-}{y}{}_i = y_i^{j+1}$, $\overset{-}{z}{}_i = z_i^{j+1}$. U holda (7) sistemalarini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin.

$$\begin{cases} \overset{s}{A}{}_{1i}\ \overset{s+1}{\overline{y}}{}_{i-1} - \overset{s}{C}{}_{1i}\ \overset{s+1}{\overline{y}}{}_i + \overset{s}{B}{}_{1i}\ \overset{s+1}{\overline{y}}{}_{i+1} = -\overset{s}{F}{}_{1i} \\ \overset{s}{A}{}_{2i}\ \overset{s+1}{\overline{z}}{}_{i-1} - \overset{s}{C}{}_{2i}\ \overset{s+1}{\overline{z}}{}_i + \overset{s}{B}{}_{2i}\ \overset{s+1}{\overline{z}}{}_{i+1} = -\overset{s}{F}{}_{2i} \end{cases} \tag{9}$$

bu yerda

$$\overset{s}{A}{}_{1i} = \frac{\tau}{h^2} D_i^j(\overset{s}{y}{}_i^j), \overset{s}{A}{}_{2i} = \frac{\tau}{h^2} M_i^j(\overset{s}{z}{}_i^j),$$

$$\overset{s}{B}{}_{1i} = \frac{\tau}{h^2} D_{i+1}^j(\overset{s}{y}{}_{i+1}^j), \overset{s}{B}{}_{2i} = \frac{\tau}{h^2} M_{i+1}^j(\overset{s}{z}{}_{i+1}^j),$$

$$\overset{s}{C}{}_{1i} = \frac{\tau}{h^2}\left(D_i^j\left(\overset{s}{y}{}_i^j\right) + D_{i+1}^j\left(\overset{s}{y}{}_{i+1}^j\right)\right) + 1, \overset{s}{C}{}_{2i} = \frac{\tau}{h^2}\left(M_i^j\left(\overset{s}{z}{}_i^j\right) + M_{i+1}^j\left(\overset{s}{z}{}_{i+1}^j\right)\right) + 1,$$

$$\overset{s}{F}_{1i} = \overset{s}{y}_i^j, \ \overset{s}{F}_{2i} = \overset{s}{z}_i^j.$$

Kesmaning $0 \le x \le b$ oxiridagi kerakli qiymatlarning qiymatlarini ikkinchi aniqlik tartibiga ega Milne (Милна) formulasi yordamida olish mumkin:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_0 \approx \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_n \approx \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_0 \approx \frac{-z_2 + 4z_1 - 3z_0}{2h}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_n \approx \frac{3z_n - 4z_{n-1} + z_{n-2}}{2h}, \tag{11}$$

(10) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi sonli yechimlarini olish uchun haydash usulidan foydalanamiz. Haydash usuliga ko‘ra:

$$\begin{cases} \bar{y}_i = \alpha_{1i}\bar{y}_{i+1} + \beta_{1i}, \\ \bar{z}_i = \alpha_{2i}\bar{z}_{i+1} + \beta_{2i} \end{cases} \tag{12}$$

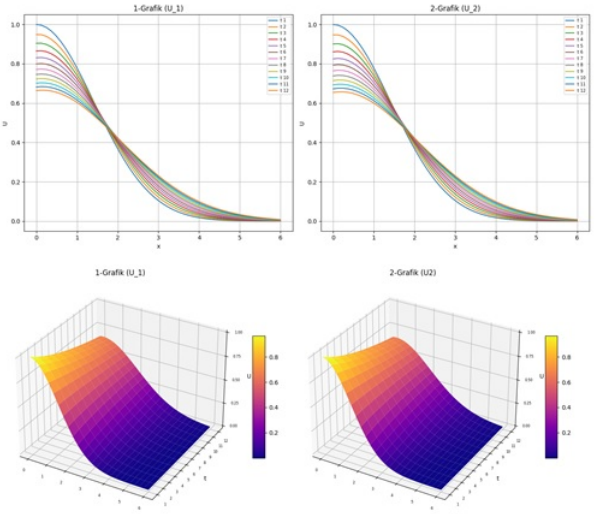
bu yerda $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \beta_{1i}, \beta_{2i}$ - koeffitsiyentlar, ularni quydagi formulalar yordamida hisoblab topiladi:

$$\begin{cases} \alpha_{1,i+1} = \dfrac{B_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i}A_{1i}}, \\ \beta_{1,i+1} = \dfrac{A_{1i}\beta_{1i} + F_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i}A_{1i}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{2,i+1} = \dfrac{B_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i}A_{2i}}, \\ \beta_{2,i+1} = \dfrac{A_{2i}\beta_{2i} + F_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i}A_{2i}} \end{cases} \tag{13}$$

bu yerda $i = 1, 2, ..., n$. $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \beta_{10}, \beta_{20}$ qiymatlarini (11) chegaraviy shartlardan topiladi.

Yuqorida qurilgan sonli sxema yordamida hisoblash tajribasi o‘tkazildi. Biz uning ayrim natijalarini keltiramiz. Hisoblash uchun to‘r qadami $h = 0.05$ tugunlar soni $N = 300$ va iteratsiya aniqligi sifatida $\varepsilon = 10^{-5}$ olingan.

Topilgan asimtotikalar iteratsiya jarayoni uchun boshlang‘ich yaqinlashish sifatida olingan.



$1 - rasm.$ $(1) - (3)$ *masalaning sonli yechimi* :

$p_1 = 2.0101, \ \ p_2 = 2.0105, \ \ q_1 = 1.85, \ q_2 = 1.95$

$b = 6, \ \ a\_1, a\_2 = [1, 1], eps = 0.001$

Sonli hisoblash tajribalari shuni ko‘rsatdiki, iteratsiyon jarayonlar 3-5 qadamda yaqinlashadi. Boshlang‘ich yaqinlashish sifatida olingan kompakt yurituvchili avtomodel yechimlar asimptotikasi iteratsiyon jarayonning yaqinlashishi uchun muhim rol o‘ynadi. Yuqoridagi grafiklarda sonli parametrlarning berilgan qiymatlarida reaksiya-diffuziya jarayonlarining chekli tezlikda sodir bo‘lishini ko‘rish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. **Wu, Z.Q., Zhao, J.N., Yin, J.X. and Li, H.L** *Nonlinear Diffusion Equations, Singapore:* World Scientific, 2001.
2. **Levine, H.** *The role of critical exponents in blowup theorems:* SIAM Rev., 1990, 32(2): 262-288.
3. **Rakhmonov Z. R., Urunbayev J. E.,** *On a Problem of Cross-Diffusion with Nonlocal Boundary Conditions.* Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics, №–5, 2019, 614-620.
4. **Rakhmonov Z.R., Khaydarov A., Urunbaev J.E.** *Global Existence and Nonexistence of Solutions to a Cross Diffusion System with Nonlocal Boundary Conditions* Mathematics and Statistics, 2020, №–8(4), P. 404-409.

UDK 519.644

Nochiziqli chegaraviy shartli diffuziya sistemalarini sonli va analitik tadqiq etish

Raxmonov Z. R. .[1], Xolmirzayeva N. A. .[2]

[1] O‘zbekiston milliy universiteti, f.-m.f.d., professor
e-mail: zraxmonov@inbox.ru
[2]Termiz Davlat universiteti, tayanch doktorant
e-mail:nigora.xolmirzayeva1988@gmail.com

Mazkur maqolada nochiziqli chegaraviy shartlarga ega bo‘lgan diffuziya tenglamalari sistemasi ko‘rib chiqiladi. Bunday sistemalar ko‘plab fizik, biologik va texnik jarayonlarni modellashtirishda uchraydi. Tadqiqotda diffuziya tenglamalari uchun analitik va sonli yechimlar quriladi, ularning solishtirma tahlili o‘tkaziladi va hisoblash usullarining afzalliklari ko‘rsatib beriladi. Diffuziya tenglamalari fizikada issiqlik tarqalishi, kimyoviy reaksiya va massaning tarqalishini modellashtiruvchi asosiy tenglamalardan biridir. Ko‘pgina real masalalarda chegaraviy shartlar nochiziqli bo‘lib, bu esa masalaning analitik tahlilini murakkablashtiradi. Shu sababli sonli metodlardan keng foydalaniladi. Ko‘rib chiqiladigan masala:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \tag{1}$$

bu yerda $u = u(x,t)$– diffuziya maydoni funksiyasi, D– diffuziya koeffitsiyenti, L– soha chegarasi.

Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar:

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = f_1(u), \quad u(L,t) = f_2(u),$$

bu yerda $f_1(u)$ va $f_2(u)$– nochiziqli funksiya ko‘rinishida berilgan chegaraviy shartlardir.

Yechish usullari

Analitik yondashuv Agar chegaraviy shartlar nisbatan soddalashtirilsa, masalan $f_1(u) = \alpha u$, separatsiya usuli, Fourier usuli yoki Laplas transformatsiyasi yordamida yechim olish mumkin. Biroq umumiy hollarda bu metodlar bilan qiyin bo‘ladi.

Sonli yondashuv Nochiziqli chegaraviy shartlarga ega masalalar uchun *chekli ayirmalar usuli* yoki *Chebyshev spektral usuli* qo‘llaniladi. Ikkinchi tartibli hosilalar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ markaziy ayirmalar bilan almashtiriladi, va vaqt bo‘yicha Eylerning chap yoki o‘ng ayirmali sxemalari ishlatiladi. Ko‘rib chiqilgan tenglama:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \tag{2}$$

boshlang‘ich va chegaraviy shartlar:

$$u(x,0) = x(1-x), \quad u(0,t) = \sin(u), \quad u(1,t) = e^{-u}.$$

Sonli parametrlar: $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.001$, $T = 1.0$.

C++dagi kodi

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
    int N = 20;
    double L = 1.0, T = 1.0;
    double dx = L / N;
    double dt = 0.001;
    double mu = dt / (dx * dx);
    int steps = T / dt;

    vector<double> u(N+1), u_new(N+1);
    for (int i = 0; i <= N; ++i) {
        double x = i * dx;
        u[i] = x * (1 - x); // boshlang‘ich shart
    }

    for (int n = 0; n < steps; ++n) {
        u_new[0] = sin(u[1]);       // chap chegara
        u_new[N] = exp(-u[N-1]);    // o‘ng chegara
        for (int i = 1; i < N; ++i) {
            u_new[i] = u[i] + mu * (u[i+1] - 2*u[i] + u[i-1]);
        }
        u = u_new;
    }

    for (int i = 0; i <= N; ++i) {
        double x = i * dx;
        cout << "x = " << x << ", u = " << u[i] << endl;
    }
    return 0;
}
```

Natijalar

Sonli hisoblash orqali quyidagi qiymatlar olindi (jadvalda $t = 0.2$ va $t = 0.5$ uchun):

x	$u(x, 0.2)$	$u(x, 0.5)$
0.0	0.26035	0.35225
0.1	0.26789	0.36805
0.2	0.28148	0.38533
0.5	0.35860	0.44651
0.8	0.48105	0.51965
1.0	0.57588	0.57191

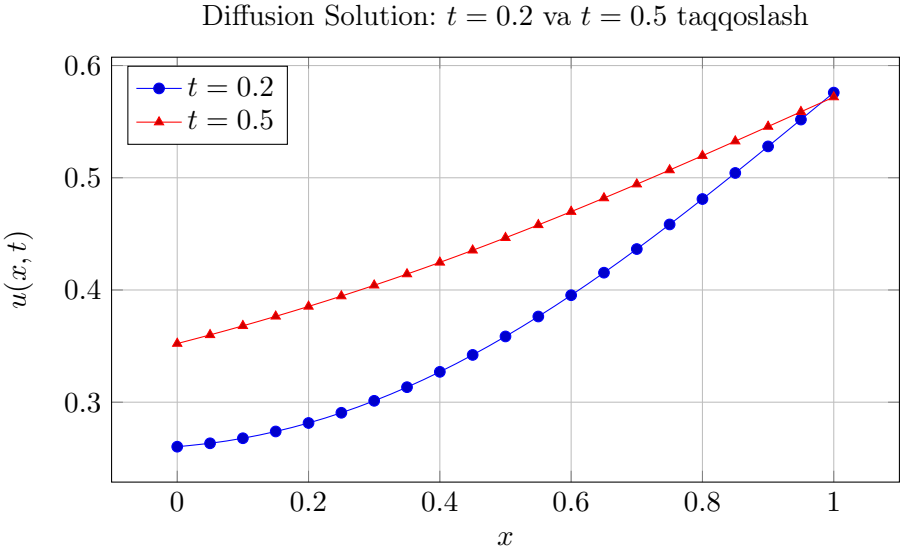


Рис. 5: $t = 0.2$ va $t = 0.5$ yechimlarining bir grafikda taqqoslanishi.

Sonli sxemaning barqarorligi Kourant mezoni orqali tekshirildi:

$$D\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Natijalar shuni ko‘rsatdiki, konvergensiya darajasi ikkinchi tartibli. Nochiziqli chegaraviy shartli diffuziya sistemalarining yechimi uchun sonli metodlar, ayniqsa chekli ayirmalar usuli samarali va barqaror yechim beradi. Analitik usullar esa faqat maxsus hollarda qo‘llanilishi mumkin. Bunday masalalarning tadqiqi fizik va texnik jarayonlarni modellashtirishda katta amaliy ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. **Samarskii A.A., Matus P.P., Vabishchevich P.N.** *Difference schemes for solving problems of mathematical physics* Nauka, 1995.
2. **Thomas J.W.** *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.* Springer, 1995.

УДК 311.21.378

GRAFLAR NAZARIYASINI BOSHQARUV JARAYONLARINI OPTIMALLASHTIRISHGA TATBIQINING NAZARIY ASOSLARI

Sakiyeva O. B.[1], Saidov J. N.[2]
[1]Termiz davlat universiteti,Termiz, O‘zbekiston;
ozodasakieva@gmail.com
[2]Termiz davlat universiteti 4-kurs talabasi,Termiz, O‘zbekiston
jorabeksaidov5@gmail.com

Graflar nazariyasi hozirgi vaqtda matematikaning jadal rivojlanayotgan sohasi hisoblanadi. Bu ko‘pgina ob’ektlar va vaziyatlarning graf modellar sifatida tasvirlanganligi bilan izohlanadi. Agar foydalanish mumkin bo‘lsa, ko‘plab matematik muammolarni hal qilishda ularni soddalashtirilgan graf sifatida ko‘rsatish ularga aniqlik va soddalik beradi.

Bugungi kunda raqamlashtirish usullaridan foydalangan holda boshqaruv strategiyasini ishlab chiqishda milliy sanoatning o‘ziga xos xususiyatlarini hisobga olish zarur, bu esa butun milliy iqtisodiyotning ham, har bir alohida xo‘jalik yurituvchi subyektning ham innovatsion rivojlanishini jadallashtiradi. Texnologik innovatsiyalarni qo‘llash va funksional tashkil etish talablari sanoat rivojlanishining asosiy tarkibiy qismlari hisoblanadi. Ushbu doirada mahalliy sanoatni raqamlashtirish ishlab chiqarish mashinalari, xavfsizlik tizimlari va sensorlarni birlashtirgan yagona tizimni ifodalaydi, bu turli jismoniy ob’ektlarni inson aralashuvisiz bir-biri bilan o‘zaro aloqada bo‘lishi mumkin bo‘lgan virtual tarmoqqa ulash imkonini beradi.

Keng ma’lumotlar oqimi biznesni tahlil qilish jarayonlari uchun yangi paradigma yaratdi, raqamli iqtisodiyotda ilg‘or tahliliy va kognitiv vositalar salohiyatini oshirdi. Katta ma’lumotlar va yangi texnologiyalar tashkiliy o‘zgarishlar va biznes jarayonlarini amalga oshirishga strategik yondashuvni talab qiladigan yangi turdagi boshqaruv tizimlarining paydo bo‘lishi uchun sharoit yaratdi. Yuqoridagilarni umumlashtirish uchun raqamlashtirish kontseptsiyasini amalga oshirish kontekstida real korxonalarda boshqaruv jarayonini tashkil etishning o‘ziga xos xususiyatlari keltirilgan.

Iqtisodiyotni raqamlashtirish sharoitida boshqaruv tizimlarini ishlab chiqish va tahlil qilish korxonalarning boshqaruv faoliyatini takomillashtirish sohasida alohida ahamiyatga ega. Raqamli texnologiyalarni joriy etish sharoitida korxonalarning ishlab chiqarish faoliyatini optimallashtirish usullarini ishlab chiqishga alohida e’tibor qaratish lozim.

Matematik modellashtirish yordamida yechimlarni optimallashtirish xato va noaniqlik ehtimolini yo‘q qiladi. Modellashtirishda qo‘llaniladigan matematik vositalar qatoriga graflar nazariyasi, to‘plamlar nazariyasi, matritsalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va boshqalar kiradi. Ular orasida graflar nazariyasi alohida qiziqish uyg‘otadi, u muammoning eng maqbul yechimini tanlash uchun ko‘rib chiqilayotgan tizimlarning butun xilma-xilligini vizual tarzda tasvirlash va tuzishga imkon beradi.

Graflar nazariyasi – diskret matematikaning graflarning xossalarini o‘rganuvchi va iqtisodiy masalalarni yechishda keng qo‘llaniladigan bo‘limi. Boshqaruv uchun ko‘plab afzalliklari tufayli u operatsion tadqiqotlarning mustaqil tarmog‘i sifatida ishlab chiqilgan. Graflar nazariyasining markaziy ob’ekti tugunlar va qirralardan tashkil topgan graf deb nomlanadigan matematik tushunchadir. Umuman olganda, har qanday kontseptual modelni barcha modellashtirish elementlarining qiymatlari (turi, tavsifi va boshqalar) yorliqlarga kiritilgan graf sifatida tasvirlash mumkin. Shunday qilib, graflar nazariyasi turli xil mavhum graflar shaklidagi muammolarni taklif qiladi. Graflar nazariyasining rivojlanishini 18-asrda L. Eyler faoliyatiga borib taqash mumkin bo‘lsa, graf algoritmlari ustida ish 1950-yillarda jiddiy boshlangan (masalan, Bellman-Ford-Mur algoritmi va eng qisqa yo‘llarni topish uchun Deykstra algoritmi).

Ushbu sinfning matematik modellari odatda chiziqli bo‘ladi, lekin, masalan, chiziqli dasturlash modellaridan farqli o‘laroq, ular tahlil qilinayotgan hodisalarni to‘liqroq tasvirlash, shuningdek, optimallashtirish jarayonining samaradorligini oshirish imkonini beruvchi tizimli xususiyatlarga ega.

Graflar nazariyasiga ehtimollik usullarining kiritilishi, xususan, P. Erdos va A. Renining asimptotik ehtimollik haqidagi tadqiqotlarida graflar aloqasi, tasodifiy graflar nazariyasi deb nomlanuvchi boshqa sohaning paydo bo‘lishiga olib keldi. Bu yerda eksponensial tarmoqlar va kichikroq tarmoqlar topologiyasini ko‘rsatish uchun graflarning vizual tasviri qo‘llaniladi.

Tadbirkorlik faoliyati eng murakkab bo‘lgan korxonalarda ishlab chiqarish, investitsiya, transport va marketing dasturlarini ishlab chiqishda graflar va tegishli matematik modellardan foydalanish amaliy zarurat hisoblanadi.

Graflar nazariyasidan foydalanib, tadqiqotchilar ko‘plab amaliy optimallashtirish muammolarini hal qiladilar, shuningdek, tarmoq elementlarining xatti-harakatlarini va ularning o‘zaro ta’sirini, shu jumladan elementlarning klasterlar yoki tizimlarga birikmasini modellashtiradilar.

Shunday qilib, graflar nazariyasidan foydalanib ko‘plab optimallashtirish muammolarini hal qilish, yani grafli modellashtirish optimallashtirishning berilgan maqsadga erishish uchun yechimlar to‘plami bilan ifodalangan oqimlar va resurslar haqida ma’lumotlar yaratish uchun kuchli vosita bo‘lib xizmat qiladi. Bu raqamli texnologiyalarni joriy etish va innovatsion korxonalarni rivojlantirish sohasida boshqaruv qarorlarini qabul qilish uchun samarali vosita sifatida graflardan foydalanishning maqsadga muvofiqligi haqidagi taxminimizni tasdiqlaydi.

Umuman olganda, raqamli ishlab chiqarish texnologiyalarini joriy etish jarayonini optimallashtirishda boshqaruv qarorlarini modellashtirish uchun graflar nazariyasidan foydalanish oqilona degan xulosaga kelishimizga imkon beradi.

Adabiyotlar

1. Xudoyberdiyev A.X. *Kombinatorika va graflar nazariyasi.* Toshkent, 2017.

2. Носов В.А. *Комбинаторика и теория графов.* Москва, 1999.

3. Марсавин В.В. *Применение теории графов для моделирования систем менеджмента (на примере модели метрологического обеспечения производства).* // Актуальные проблемы менеджмента качества, стандартизации и метрологии: сб. докл. VIII Всерос. науч.-практ. интернетконф. (Белгородский гос. технол. ун-т им. В.Г. Шухова). Белгород, 2021. Ст. 117−121.

Some methods of digital calculations of hydraulic parameters of main gas pipelines

Saryyeva B. [1], Owlyagulyyev G. [2], Yemshikov B. [3]

[1,2] The State Energy Institute of Turkmenistan, Ashgabat, Turkmenistan.

Management of gas pipelines requires the development of suitable methods of hydraulic calculations. These methods are based on simplifying assumptions (isothermality and quasi-stationarity of flow, constant speed of sound, etc.) that allow hydraulic calculations to be carried out using algebraic relations. Stationary movement of gas in high and medium pressure gas pipelines is written by the following system of equations [1]:
gas equation of motion

$$\frac{dP}{\rho} + \alpha\frac{d(\omega^2)}{2} + gdz + \lambda\frac{\omega^2}{2}\frac{dx}{D} = 0 \tag{1}$$

gas volume balance

$$M = \rho\omega F \tag{2}$$

gas condition

$$P = \rho \cdot ZRT \tag{3}$$

where: P - gas pressure $\left(Pa = \frac{N}{m^2}\right)$, ρ - mass density $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$, α - is measureless coefficient that accounts for the change in the longitudinal velocity of the gas pipeline ($\alpha \approx 1.2$ for turbulent flow, $\alpha \approx 2$ for laminar flow), ω - is the linear velocity of the gas $\left(\frac{m}{s}\right)$, g - free flight acceleration $\left(g = 9.81\frac{m}{s^2}\right)$, Z - measureless parameter that characterizes how real gases differ from ideal gases, λ - coefficient of hydraulic resistance (measureless), D - diameter of gas pipeline (m), M - mass consumption $\left(\frac{kg}{ms}\right)$,F-cross sectional area of the pipe(m^2), R - gas constant $\left(\frac{N \cdot m}{kg \cdot K}\right)$, T - gas temperature ($^\circ K$).

(1), (2), (3) - let reduce the system of equations to one equation. For this multiplying (1) equation to the (2) equation and from (2) and (3) equations find ρ:

$$\rho = \frac{M}{\omega F} = \frac{P}{c^2}, \;\; c = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{ZRT}.$$

From last equality:

$$P = \frac{Mc^2}{F} \cdot \frac{1}{c} \tag{4}$$

Considering (4) equation changing (1) equation's first part. Then we get:

$$2 \cdot \frac{dP}{\rho} = \frac{\frac{2 \cdot Mc^2}{F}}{\frac{M}{\omega F}} d\left(\frac{1}{\omega}\right) = 2\omega \cdot c^2 \left(-\frac{d\omega}{\omega^2}\right) = -c^2 \cdot \frac{d(\omega^2)}{\omega^2} \tag{5}$$

Considering equation (5) changing (1) equation:

$$-c^2 \frac{d(\omega^2)}{\omega^2} + \alpha \cdot d(\omega^2) + 2gdz + \lambda\omega^2 \frac{dx}{D} = 0. \tag{6}$$

Equation (6) is a single equation representation of the system of equations (1), (2), (3).

Let be the speed of sound in a gaseous medium inside a tube $c = \sqrt{\frac{P}{\rho}} =$ $=$const and $\lambda =$ const and be the coefficient of hydraulic resistance. Furthermore, let us assume that there is no gas loss along the pipe direction (i.e, $q = \rho\omega =$const) and assume that the pipe viscosity is constant, i.e, $\frac{dz}{dx} =$ const $= \frac{\Delta}{L}$ considering this, where Δz - the difference in the elevations of the start and end points of the pipeline, L - the length of the gas pipeline.

Putting the expression $dz = \frac{\Delta z}{L} \cdot dx$ in the (6) equation:

$$-c^2 \frac{d(\omega^2)}{\omega^2} + \alpha \cdot d(\omega^2) + 2g\frac{\Delta z}{L} \cdot dx + \lambda\omega^2 \frac{dx}{D} = 0. \tag{7}$$

As we seeing, (7) equation is an ordinary differential equation in which the variables are divided. Partitioning the variables in this equation, we get:

$$-\frac{c^2 d(\omega^2)}{\omega^2 \left(2g \cdot \frac{\Delta z}{L} + \frac{\lambda}{D}\omega^2\right)} + \frac{\alpha \cdot d(\omega^2)}{2g \cdot \frac{\Delta z}{L} + \frac{\lambda}{D}\omega^2} + dx = 0. \tag{8}$$

Let ω_0 denote the velocity of the gas at the beginning of the pipeline at $x = 0$ and ω_L the velocity of the gas at the end $x = L$. Let taking integration (8) equation from ω_0 to ω_L and from $x = 0$ to $x = L$. Then we get:

$$\frac{c^2 L}{2g\Delta z} ln\left(\frac{2g\cdot\Delta z}{\omega^2 L}+\frac{\lambda}{D}\right)\Bigg|_{\omega_0}^{\omega_L}+\alpha\frac{D}{\lambda}ln\left(2g\cdot\frac{\Delta z}{L}+\frac{\lambda}{D}\omega^2\right)\Bigg|_{\omega_0}^{\omega_L}=-L. \tag{9}$$

Multiplying (9) equation with $\dfrac{2g\Delta z}{c^2 L}$ expression and putting the integrals limits.

$$ln\frac{\frac{2g\Delta z}{\omega_L^2 L}+\frac{\lambda}{D}}{\frac{2g\Delta z}{\omega_0^2 L}+\frac{\lambda}{D}}=-\frac{2g\Delta z}{c^2}\left[1+\frac{LD}{\lambda L}\cdot ln\frac{2g\Delta zD+\lambda L\omega_L^2}{2g\Delta zD+\lambda L\omega_0^2}\right]. \tag{10}$$

The expression in square brackets in the last equation describes the effect of gas velocity variation along the length of the pipeline. Keeping this expression constant, the velocities on the left side of equation, respectively, $\omega_0=\frac{c^2M}{FP_0}$, $\omega_L=\frac{c^2M}{FP_L}$ write in terms of gas pressure and mass flow at the points and removing from logarithm the left side of the equation. For derived equation

$$\Psi=1+\frac{\alpha D}{\lambda L}ln\left(\frac{2g\Delta zD+\lambda L\omega_L^2}{2g\Delta zD+\lambda L\omega_0^2}\right), b=\frac{2g\Delta z}{c^2}, \tag{11}$$

inserting the values we get:

$$e^{-b\Psi}p_0^2-p_L^2=\frac{\lambda Lc^2M^2L}{F^2Db}(1-e^{-e\Psi}) \tag{12}$$

When (12) relation is used in practice $\Psi = 1$ approximation is adopted (Ψ when calculating, the change in the longitudinal velocity of the gas pipeline is not taken into account, i.e $\omega_0 = \omega_L$). This is P_0, M, P_L between the main hydraulic quantities

$$e^{-b}P_0^2-P_L^2=\frac{\lambda Lc^2M^2}{F^2D}\frac{(1-e^{-b})}{b} \tag{13}$$

allows you to come to a clear connection. Such assumptions lead to an error in the difference between the exact value of the quantity P_L obtained by the implicit equation (12) and its approximate value obtained by the explicit equation (13).

In this work, the error occurring in the calculation of the aforementioned hydraulic parameters is investigated. Our analyzes showed that in most cases the accuracy of equation (13) is sufficiently high (the error is less than 0.1%). However, for longer, larger mass flow gas pipelines, the approximation equation (13) should be used with caution. When $\dfrac{M^2}{F^2P_0^2}=0,05$ and $\dfrac{D}{\lambda L}=0,055$ for ($\Delta z = 0$), the pressure difference P at the end of the pipeline obtained based on equations (12) and (13) is doubled (more precisely, the pressure in equation (13) is reduced by a factor of 2).

Thus, it is reasonable to use equation (12), which is accurate, although not obvious in the hydraulic calculations of branched pipelines where different combinations of inlet sizes may fit. Therefore, in this work, several methods of numerical solution of equation (12) are presented: simple iteration and segmentation method and modification of segmentation method. The results obtained by these methods are presented in Figures 1-2-3.

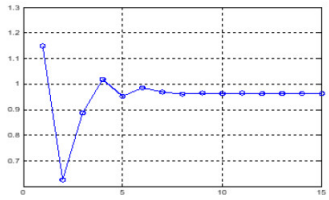


Рис. 6: Convergence of approximate solutions to an exact solution using the partitioning method.

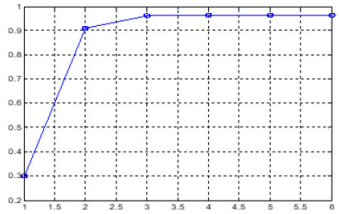


Рис. 7: To the exact solution by a simple iterative method of approximate solutions gathering.

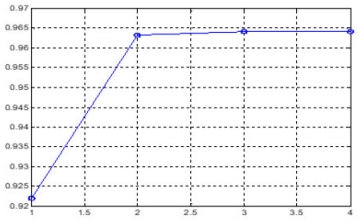


Рис. 8: Convergence of approximate solutions to an exact solution using a modification of the bisection method.

Finally, the conditions for the existence and uniqueness of the solution of the nonlinear equation (12) and the convergence of the approximate solution to the exact solution were investigated.

References:

1. Bobrovsky S.A., Shcherbakov S.G., Huseyin-zadeh M.A. Gas movement in gas pipelines with road selection. - M.: Nauka, 1972. P. 106.

Composition of Nonlinear Operators and Stability of Fixed Points

Seytov Sh.J.[1], Nishonov S.N.[2],Islamova M.I.[3]

[1]Tashkent state university of economics, Tashkent, Uzbekistan; sh-seytov@mail.ru

[2]Termiz State University, Surkhandarya, Uzbekistan; samad.nishonov@bk.ru

[3]Urgench state university, Urgench, Uzbekistan; islamovamavluda191@gmail.com

We study the composition of two nonlinear operators in the plane and investigate their dynamics restricted to the invariant line $x + y = 1$. Fixed points are determined explicitly, and their stability conditions are derived in terms of the parameters a and b.

Consider the discrete dynamical system generated by the composition of the following two operators:

$$F: \begin{cases} x_{n+1} = x_n(1 - ay_n), \\ y_{n+1} = y_n(1 + bx_n), \end{cases} \qquad G: \begin{cases} x_{n+1} = x_n(1 + ay_n), \\ y_{n+1} = y_n(1 - bx_n). \end{cases}$$

We define the new operator $H = G \circ F$, obtained by applying F followed by G.

A direct computation yields:

$$H: \quad \begin{cases} x_{n+2} = x_n(1 - ay_n)(1 + ay_n + abx_n y_n), \\ y_{n+2} = y_n(1 + bx_n)(1 - bx_n + abx_n y_n). \end{cases}$$

On the invariant line $x + y = 1$ (so $y = 1 - x$), the twoвЂ“dimensional system reduces to the onevЂ“dimensional map

$$f(x) = x(1 - a(1 - x))\big(1 + a(1 - x) + abx(1 - x)\big).$$

This is a cubic map that governs the dynamics of the system along the line $x + y = 1$.

Definition 1. A point x^* is a fixed point of the map f if $f(x^*) = x^*$.

Theorem 1. The map f has the following fixed points on the line $x + y = 1$:

1. Trivial points:
$$(x^*, y^*) = (0, 1), \quad (1, 0).$$

2. Internal points:
$$x^* = \frac{ab - a - b \pm \sqrt{\Delta}}{2ab}, \qquad y^* = 1 - x^*,$$
where
$$\Delta = a^2b^2 + 2a^2b + a^2 - 2ab^2 + 2ab + b^2.$$

Definition 2 A fixed point x^* is *stable* if $|f'(x^*)| < 1$, *unstable* if $|f'(x^*)| > 1$, and *neutral* if $|f'(x^*)| = 1$.

Theorem 2.

1. At $x^* = 0$:
$$f'(0) = 1 - a^2.$$
Hence, $x^* = 0$ is stable whenever $0 < a^2 < 2$.

2. At $x^* = 1$:
$$f'(1) = 1 - ab.$$
Hence, $x^* = 1$ is stable whenever $0 < ab < 2$.

remark For the internal fixed points, stability depends on the parameter values. Explicitly, one must compute

$$f'(x^*) = \frac{d}{dx}\Big(x(1 - a(1 - x))(1 + a(1 - x) + abx(1 - x))\Big)\Big|_{x=x^*}.$$

If $|f'(x^*)| < 1$, the fixed point is stable.

We obtained the composition of the given nonlinear operators and reduced the system to a one-dimensional cubic map on the invariant line $x + y = 1$. Explicit formulas for fixed points were derived, including trivial and internal solutions. The stability conditions were established:

- $x^* = 0$ is stable if $|a| < \sqrt{2}$,
- $x^* = 1$ is stable if $0 < ab < 2$,

- internal fixed points exist if $\Delta \geq 0$, and their stability depends on the derivative criterion.

This framework can be extended to study bifurcations and chaotic behavior in nonlinear operator compositions.

Literature

1. **Sh.J. Seytov, D. B. Eshmamatova,** *Discrete Dynamical Systems of LotkaвЂ“Volterra and Their Applications on the Modeling of the Biogen Cycle in Ecosystem.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 1471вЂ“1485 (2023).
2. **D. B. Eshmamatova, Sh.J. Seytov, N.B. Narziev,** *Basins of Fixed Points for Composition of the Lotka-Volterra Mappings and Their Classification,* Lobachevskii Journal of Mathematics. 558-569 (2023).
3. **R. N. Ganikhodzhaev, Sh.J. Seytov,** *Coexistence chaotic behavior on the evolution of populations of the biological systems modeling by three dimensional quadratic mappings,* Global and Stochastic Analysis. 41-45 (2021).

UDK 519.653

Coefficients of the optimal quadrature formula constructed for a singular integral equation with a Hilbert kernel in Sobolev space $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$)

Shadimetov Kh. M.[1,2], Jabborov Kh. Kh.[2,3]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
[2] V.I.Romanovsky Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
[3]University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan;
kholmatshadimetov@mail.ru, jabborovx@bk.ru,

Singular integral equations are encountered in the process of mathematical representation of many problems in physics and mechanics. One such equation is the following Fredholm type singular integral equation of the second kind with a Hilbert kernel:

$$a \cdot g(t) + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cot \frac{x-t}{2} dx = \varphi(t), \tag{1}$$

where $g(t)$ is an unknown function, $\varphi(t)$ is a known function, a and b are arbitrary constants.

Using Hilbert transforms, the integral equation (1) has the following solution if $a \neq 0$:

$$g(t) = \frac{a}{a^2+b^2}\varphi(t) - \frac{b}{2\pi(a^2+b^2)} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cot \frac{x-t}{2} dx +$$

$$+ \frac{b^2}{2\pi a(a^2+b^2)} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx. \tag{2}$$

The main problem encountered in the solution of integral equation (1) in the form (2) is calculating Cauchy's principal value

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cot \frac{x-t}{2} dx \tag{3}$$

of the integral. This problem persists even when expression (2) is regularized.

In this work, we consider the following quadrature formula

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cot \frac{x-t}{2} dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) \tag{4}$$

where C_β are coefficients, x_β are node points, $N \in \mathbb{N}$. $\varphi(x)$ functions belong to the $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ space belonging to, and this space is defined as follows

$$L_2^{(2)}(0, 2\pi) = \left\{ \varphi | \, \varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \, \varphi' - \text{abs. cont. and}, \, \varphi'' \in L_2(0, 2\pi) \right\}.$$

In the space $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$, the scalar product between the functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ is defined as follows

$$< \varphi, \psi >= \int_0^{2\pi} \varphi''(x)\psi''(x)dx. \tag{5}$$

and in this space (5) the norm of the function $\varphi(x)$ corresponding to the scalar product is determined as follows

$$\|\varphi\|_{L_2^{(2)}} = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\varphi''(x))^2 dx}. \tag{6}$$

The (4) difference between the integral and the quadrature sum in the quadrature formula is called **error**

$$(\ell, \varphi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cot \frac{x-t}{2} dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta). \tag{7}$$

For this difference, the following **error functional** belonging to the space $L_2^{(2)^*}(0, 2\pi)$ conjugate to $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ corresponds

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,2\pi]}(x) \cot \frac{x-t}{2} - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{8}$$

where $\varepsilon_{[0,2\pi]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[0, 2\pi]$, $\delta(x)$ is the Dirac's delta function.

Theorem. *The optimal coefficients of the quadrature formula in the form (4) for a singular integral with a Gilbert kernel in space $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ are as follows*

$$C_0 = \frac{6}{h^3} \Bigg((\sqrt{3} - 1) d^- h - (4 + 3\sqrt{3}) f_2(0) + f_2(1) + 6\sqrt{3} \sum_{\gamma=0}^{N} q^\gamma f_2(\gamma) +$$

$$+q^N\left(\frac{g_1h^2}{4}-\sqrt{3}\left(d^+h-\frac{1}{2}g_1h^2N\right)+3(1-\sqrt{3})f_2(N)\right)\Bigg);$$

$$C_\beta=\frac{6}{h^3}\Bigg(q^\beta\left(-\frac{1}{4}g_1h^2+\sqrt{3}d^-h+3(1-\sqrt{3})f_2(0)\right)+6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{|\beta-\gamma|}f_2(\gamma)+f_2(\beta-1)-$$

$$-8f_2(\beta)+f_2(\beta+1)+q^{N-\beta}\left(\frac{1}{4}g_1h^2-\sqrt{3}\left(d^+h-\frac{1}{2}g_1h^2N\right)+3(1-\sqrt{3})f_2(N)\right)\Bigg);$$

$$C_N=\frac{6}{h^3}\Bigg(q^N\left(-\frac{1}{4}g_1h^2+\sqrt{3}d^-h+(3-3\sqrt{3})f_2(0)\right)+f_2(N-1)+6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{N-\gamma}f_2(\gamma)+$$

$$+(1-\sqrt{3})\left(d^+h-\frac{1}{2}g_1h^2N\right)-(4+3\sqrt{3})f_2(N)\Bigg);$$

where $q=\sqrt{3}-2$ is the root of the second-order Euler polynomial.

References

1. **R. Estrada, R.P. Kanwal** *Singular Integral Equations.* BirkhΓ¤user, Boston, 2000.
2. **Sobolev S.L.** *Introduction to the theory of cubature formulas.* - Nauka, Moscow, 1974, 808 p.

UDC. 510.52; 519.642.2; 519.687.1

Analysis of the efficiency and complexity of parallel numerical solution algorithms in a model of radon volumetric activity with a fractional derivative of variable order

Tverdyi D. A.[1,2], Parovik R. I.[1]
[1]Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia; parovik@ikir.ru
[2]Digital technologies and artificial intelligence development research institute, Tashkent, Uzbekistan; dimsolid95@gmail.com

In modern science, close attention is paid to fundamental directions that have practical applications. the deformed state of the medium. For the Kamchatka region, in particular, this is a research of the processes of migration of subsurface radon gas using the most modern mathematical modeling methods in order to interpret anomalies preceding earthquakes. The authors in [1] propose mathematical hereditary α and $\alpha(t)$-models of RVA (volumetric radon activity), taking into account the nonlocality of the radon transport process over time. The main hypothesis of the hereditary models of OAR is that the order of the fractional derivative is associated with a change in the permeability of the geological environment due to a change in the stress-strain state of the medium.

In [2], the inverse problem is formulated and solved for the hereditary α-RVA model in order to restore the values of the model parameters, on the basis of which estimates of changes in the radon flux density are given with a change in the stress-strain state of the medium. The estimates obtained are reliable and more accurate than those based on the ODE model. The practical significance of the evaluation results is that it can help in more accurate selection of radon monitoring points.

When solving inverse problems, it becomes necessary to cyclically recalculate the direct problem for different values of model parameters and compare the results with experimental data. At the same time, a direct problem can have a sufficiently high computational complexity both when increasing the size of the input data N and when choosing a solution method. Therefore, it is important that the solution of each individual direct problem is completed in the shortest time, but at the same time it is necessary to take into account the possible memory costs of the algorithm used. All this leads us to the development of various parallel algorithms for the numerical solution of RVA model equations. This study examines parallel implementations of numerical solution methods: EFDS (non-local explicit finite difference scheme) [3] and IFDS-MNM (non-local implicit finite difference scheme solved by a modified Newton method) [3] in order to evaluate the computational complexity and efficiency of these algorithms. In particular, EFDS-omp and IFDS-MNM-omp based on the OpenMP API, as well as EFDS-hybrid and IFDS-MNM-hybrid hybrid CPU-GPU algorithms based on the OpenMP and CUDA APIs.

As a test example, we use hereditary $\alpha(t)$-RVA model, is a Cauchy problem of the form:

$$\partial_{0,t}^{\alpha(t)}\bar{A}(t) = -a(t)\bar{A}(t)^2 - b(t)\bar{A}(t) + c(t), \qquad \bar{A}(t) = \frac{A(t)}{A_{max}}, \quad \bar{A}(t_0) = \frac{A_0}{A_{max}},$$

where $\bar{A}(t)$ is RVA in dimensionless form; $A(t)$ –RVA; A_{max} is the maximum RVA value observed in the data; A_0 is the RVA at the initial moment of time; $t \in [t_0, T]$ is the time of the process under consideration; t_0 and $T > 0$ are the initial and final moments of time; $\partial_{0,t}^{\alpha(t)}\overline{A}(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\displaystyle\int_0^t \frac{\dot{\overline{A}}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}$– is a member of the model describing the delay in radon transport through the medium, a fractional derivative of the Gerasimov-Caputo type [4] of variable order $0 < \alpha(t) < 1$. Since only the time from the beginning to the end of the model calculation is important for this study, we will not specify the dimensions of the model members further to simplify the work.

According to [1], the problem is considered at the values of the parameters: $T = 22, \overline{A} = 0, \overline{A}_{max} = 1, \lambda_0 = 0.05$, $a(t) = -2\lambda_0 + 12\lambda_0\left(2\cos\left(\frac{\pi\ t}{T}\right)^2 + \cos\left(\frac{2\pi\ t}{T} - \frac{\pi}{11}\right)^2\right)$, $b(t) = \lambda_0$, $\alpha(t) = 0.99\left(1 - \left(\frac{(T-t)}{T}\cos\left(\frac{3\pi\ t}{T}\right)^2\right)\right)$, $c(t) = 12\lambda_0\left(\frac{12(T-t)}{10\ T}\sin\left(\frac{2\pi\ t}{T}\right)^2 + \frac{(T-t)}{T}\sin\left(\frac{3\pi\ t}{T}\right)^2\right)$, but with different N multiples of 100, this is done for clarity, simplification of plotting and convenience of working with estimates. This test case was chosen for two reasons. Firstly, such a task is not synthesized specifically to analyze the effectiveness of an algorithm, but is important from the point of view of applied mathematics. Secondly, the task may have a sufficiently high computational complexity for efficiency research with an increase of N by several tens of times.

The Cauchy problem was solved numerically, but regardless of the scheme, the solution is considered in a uniform grid domain: $\widehat{\Omega} = \{(t_i = ih) : 0 \le i < N\}$, $h = T/N$, $\overline{A}(t) = \overline{A}_i, 0 < \overline{A}_i < 1$, $a(t) = a_i, c(t) = c_i, \alpha(t) = \alpha_i$.

We will analyze the efficiency and estimates of the "time complexity"of parallel algorithms based on data on the average execution time of $T_{p,g}(N)$ in [sec.], where p is the number of CPU threads; g is the number of GPU multiprocessors; N is the size of the input data. Similarly, notation is introduced for estimates of "memory complexity"of $M_{p,g}^C(N)$ – RAM CPU and $M_{p,g}^G(N)$ – RAM GPU. The terms "number of operations"and "computational complexity"are sometimes used synonymously with the concept of "algorithm execution time"[5].

To analyze the efficiency, a series of computational experiments of the test example was conducted at $N = 6000$, but the number of CPU threads used changed in increments of 2 threads. Next, the data on $T_{p,g}(N)$ is considered in terms (TAECO) applicable to algorithms: T execution time, A acceleration, E efficiency, C cost, O cost-optimal indicator.

The complexity estimates were carried out as follows: a series of computational experiments of the test example was conducted at $N = 1000...15,000$ and a fixed, optimal number (16 pcs.) of CPU threads. Next, using polynomial interpolation, we construct $\mathbb{T}$, the algorithm's execution time function, where $\mathbb{T}$ is a n–th degree polynomial, and the growth order of the execution time function is determined by its senior, dominant term $f_{p,g}(N)$. We give Θ-asymptotically accurate estimates of the complexity of algorithms when the condition is fulfilled:

$$\Theta(f_{p,g}(N)) = \left\{ \mathbb{T}_{p,g}(N) : \begin{array}{c} \exists k_1 > 0, k_2 > 0, \quad \exists N_0 \in \{0,1,2,...\}, \\ 0 \le k_1 f_{p,g}(N) \le \mathbb{T}_{p,g}(N) \le k_2 f_{p,g}(N), \qquad \forall N \ge N_0. \end{array} \right\}$$

A similar logic applies to «memory complexity» and $\mathbb{M}$ are functions of the algorithm's memory usage.

Computational experiments on the test example were carried out using the FEVO v1.0 software package, designed to simulate and analyze the volumetric activity of radon as a precursor to strong earthquakes in Kamchatka. The MATLAB environment was used to analyze efficiency, construct polynomials, and estimate complexity. All calculations were carried out on a computer with the following characteristics: CPU – AMD Ryzen 9 7950X, 16×4.5 GHz core, cache L2 16 Mb & L3 64 Mb; RAM вТЬ 96 Gb; GPU – GeForce RTX 4090, 24 Gb, 2235 MHz, ALU 16384.

As a result, the following conclusions can be drawn for the considered software implementations of numerical methods for solving the hereditary model equation of radon volume activity:

- An analysis of the efficiency and optimal CPU utilization showed that for all the considered parallel algorithms, an increase in the number of CPU threads of more than 16 does not give a significant increase in performance;
- It is shown that the parallel EFDS-omp and EFDS-hybrid algorithms do not provide a significant increase in computing speed (on the order of 30%) compared to EFDS. However, taking into account the stability constraints associated with using an explicit scheme and the fact that orders of magnitude more RAM is needed, their use can speed up calculations when solving inverse problems;
- At the same time, the parallel IFDS-MNM-omp and IFDS-MNM-hybrid algorithms provide a significant increase in computing acceleration by 13 and 17 times, respectively, while increasing RAM costs by no more than 2.5 and 5 times, respectively, compared with sequential IFDS-MNM;
- The parallel EFDS-omp and EFDS-hybrid algorithms have an asymptotically accurate time complexity estimate of the order of $\Theta(n)$, however, the RAM estimate is already on the order of $\Theta(n^2)$;
- The parallel algorithms IFDS-MNM-omp and IFDS-MNM-hybrid have asymptotically accu-rate time and RAM complexity estimates of the order of $\Theta(n^2)$;
- It is also seen that when solving a test problem with a uniformly increasing input data size of N and an optimal number of CPU threads of 16, using `-hybrid` algorithms gives a significant advantage over `-omp` algorithms only when solving problems with $N \ge 15,000$, but with the total memory consumption of computing nodes, it is 4 times more. This is due to the fact that operations on vectors and matrices are carried out mainly on the GPU, which have an advantage over the CPU when working with large-dimensional tensors.

Funding. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (Reg. No. NIOKTR 124012300245-2).

References

1. **Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I.** *Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber.* Mathematics. - 2023. - vol. 11. - DOI: 10.3390/math11040850
2. **Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I.** *Estimation of radon flux density changes in temporal vicinity of the Shipunskoe earthquake with MW = 7.0, 17 August 2024 with the use of the hereditary mathematical model.* Geosciences. - 2025. - vol. 15. - DOI: 10.3390/geosciences15010030
3. **Tverdyi D.A., Parovik R.I.** *Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation.* Fractal and Fractional. - 2022. - vol. 6. - DOI: 10.3390/fractalfract6010023
4. **Caputo M., Fabrizio M.** *On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena.* Meccanica. - 2017. - vol. 52. - DOI: 10.1007/s11012-017-0652-y
5. **Storer J.A.** *An Introduction to Data Structures and Algorithms.* Boston: BirkhГ¤user Boston. - 2012. - 599 p.

UDC:519.644

SOLVING THE BURGERS-HUXLEY EQUATION BY USING THE SEMI-ANALYTICAL METHOD

Zainidin K. Eshkuvatov [1,2], Davron Khayrullaev [2], Bakhtiyar Khudayarov [1]

[1] Department of Higher Mathematics, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, National Research University (TIIAME, NRU), Tashkent, Uzbekistan, Email: ezainidin@gmail.com;
[2] Institute of Engineering Mathematics, Universiti Malaysia Perlis, 02600 Arau, Perlis, Malaysia, Email: zainidin@unimap.edu.my
[3] Faculty of Physics and Mathematics, Tashkent State Pedagogical University, Tashkent, Uzbekistan, Email: p4900@pps.umt.edu.my;
[1], Baxtiyar Khudayarov "Email: b.khudayarov@tiiame.uz"

The Burgers-Huxley equation models were implemented to traffic flows, acoustics, turbulence theory, hydrodynamics and mechanics. Thus, in this note semi-analytical technique is applied to obtain a universal solution for Dirichlet and symmetric boundary conditions of Burgers-Huxley equation. One of the famous semi-analytical approximation method is Adomian decomposition method (ADM) and homotopy analysis method (HAM). The Adomian decomposition method was first introduced by George Adomian in 1980 to solve the system of stochastic equations. This decomposition method can be an effective procedure for obtaining analytical solutions without linearization or perturbation or restrictive assumptions on stochastic cases. The HAM is proposed by the Liao in 1992 as semi-analytical method for highly nonlinear problems. Unlike perturbation techniques, the HAM is independent of any small/large physical parameters at all and can always transfer a nonlinear problem into sequence of iterations which can be solved easily.

In this study, we examine the generalized Burgers-Huxley equation of the form

$$u_t(x,t) + \alpha u^{\delta}(x,t)u_x(x,t) - \omega u_{xx}(x,t)$$

$$= \beta u(x,t)\left(1-u^{\delta}(x,t)\right)\left(\mu u^{\delta}(x,t)-\gamma\right),\ t>0,\ a<x<b, \tag{1}$$

$$u(x,0)=f(x),\ a<x<b \ \text{ subject to the initial condition} \tag{2}$$

$$u(a,t)=g_1(x),\ u(b,t)=g_2(x),\ t>0., \ \text{ and the boundary conditions} \tag{3}$$

where α, β, ω, γ, δ are parameters with $\beta \geq 0$, $\gamma \in (a,b)$ and $\delta > 0$ positive integer.

Let us generate few types of nonlinear PDEs from the Eq. (1). The equations under consideration are Burgers equation, Fisher equation, Huxley equation, and two combined forms of these equations namely, Burgers-Fisher and Burgers-Huxley. These equations are formulated as follows:

Burgers equation: $u_t + uu_x = u_{xx}$, $\alpha = \gamma = \omega = 1$, $\beta = 0$, $\mu, \gamma \in R$

Fisher equations: $u_t = u_x x + u(1-u)$, $\gamma = \omega = \beta = \mu = i = 1$, $\alpha = 0$,

Huxley equation: $u_t = u_x x + u(1-u)(u-\gamma)$, $\delta = \omega = \beta = \mu = 1$, $\alpha = 0$, $\gamma \in R$,

Burgers-Fisher equation: $u_t = u_x x + uu_x + u(1-u)$, $\delta = \omega = \beta = 1$, $\mu = 0$, $\alpha = \gamma = -1$,

Burgers-Huxley equation: $u_t - uu_x = u_x x + u(1-u)(u-\gamma)$, $\alpha = \delta = \omega = \beta = \mu = 1$, $\gamma \in R$.

In this note, new development of HAM (ND-HAM) and modified ADM (MADM) are successfully implemented to obtain approximate analytical solutions of the generalized Burgers-Huxley equations (GBHEs) with initial value problems (1)-(2). Few examples related to Burgers-Huxley, and Burger-Fisher equations were solved by ND-HAM and MADM and interpreted its solutions. Considered problems revealed that the ND-HAM is dominated over MADM. Both methods are simple, accurate and has great potential on solving Burgers-Huxley equation.

Keywords: Approximate solution; Homotopy analysis method; Adomian decomposition method; integro-differential equations

Literature

[1] Adomian G. On the convergence region for decomposition solutions. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 11, (1984), pp. 379-380, North-Holland.

[2] Liao S. J., (1992). The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University.

[3] Abbasbandy, The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, Physics Letters A, Vol. 360(1), pp. 109 -113, 2006.

[4] Z. K. Eshkuvatov. New development of homotopy analysis method for non-linear integro differential equations with initial value problems, Mathematical Modeling and Computing, Vol. 9, No. 4, pp. 842-859 (2022).

Экстремальная функция одной оптимальной квадратурной формулы в пространстве Гильберта

Азамов С.С., Хакимова И.К.

Ташкентский Государственный Транспортный Университет, Ташкент, Узбекистан; azamovs@mail.ru

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) \cong 0 \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{2}$$

где C_β и x_β ($x_\beta \in [0,1]$) коэффициенты и узлы формулы (1), $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – индикатор отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $S_2(P_3)$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\|\varphi|S_2(P_3)\|^2 = \left\{ \int_0^1 \left(\varphi'''(x) + 2\varphi''(x) + \varphi'(x)\right)^2 dx \right\}. \tag{3}$$

Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx. \tag{4}$$

Погрешность формулы (1) является линейным функционалом в $S_2^*(P_3)$, где $S_2^*(P_3)$ - сопряженное пространство к пространству $S_2(P_3)$.

По неравенству Коши-Шварца погрешность (4) формулы (1) оценивается при помощи нормы

$$|(\ell, \varphi)| \le \|\ell|S_2^*(P_3)\| \cdot \|\varphi|S_2(P_3)\|$$

функционала погрешности (2). Следовательно, оценка погрешности квадратурной формулы (1) на функциях пространства $S_2(P_3)$ сводится к нахождению нормы функционала $\ell(x)$ в сопряженном пространстве $S_2^*(P_3)$.

Очевидно, что норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов C_β и узлов x_β.

Чтобы построить оптимальную квадратурную формулы в пространстве $S_2(P_3)$ нам нужно последовательно решить следующие задачи.

Задача 1. *Найти норму функционала погрешности $\ell(x)$ расссматриваемой квадратурной формулы (1) в пространстве $S_2(P_3)$.*

Задача 2. *Найти такие значения коэффициентов C_β при фиксированных узлах x_β, чтобы дал наименьшее значение* $\left\|\overset{\circ}{\ell}(x)|S_2^*(P_3)\right\| = \inf_{C_\beta} \left\|\ell(x)|S_2^*(P_3)\right\|$.

Функция ψ, для которой выполняется равенство

$$(\ell, \psi) = \|\ell\| \cdot \|\psi\|, \tag{5}$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности $\ell(x)$.

Так как пространство $S_2(P_3)$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного функционала (см. [1-3]) существует единственная функция $\psi(x) \in S_2(P_3)$ для которой имеет место равенство

$$(\ell, \varphi) = < \psi, \varphi > \tag{6}$$

и $\|\ell\| = \|\psi\|$, где $< \psi(x), \varphi(x) >$ - скалярное произведение двух функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ из пространства $S_2(P_3)$. Напомним, что скалярное произведение $< \psi, \varphi >$ определяется

следующим образом:

$$< \psi, \varphi >= \int_0^1 \left(\psi'''(x) + 2\psi''(x) + \psi'(x)\right)\left(\varphi'''(x) + 2\varphi''(x) + \varphi'(x)\right) dx.$$

В частности, из (6) при $\varphi(x) = \psi(x)$ имеем

$$(\ell, \psi) =< \psi, \psi >= \|\psi\|^2 = \|\psi\| \cdot \|\ell\| = \|\ell\|^2.$$

Отсюда видно, что решение ψ уравнения (6) удовлетворяет уравнению (5) и является экстремальной функцией. Таким образом, для того чтобы вычислить норму формулы погрешности ℓ, сперва надо решить уравнение (6), т.е. найти экстремальную функцию $\psi(x)$ а потом вычислить скалярное произведение $(\ell, \psi) = \|\ell\|^2$.

Справедлива следующая

Теорема *Экстремальная функция $\psi_\ell(x)$ функционала погрешности $\ell(x)$ имеет следующий вид*

$$\psi_\ell(x) = -F_3(x) * \ell(x) + b_1 \cdot e^{-x} + b_2 x \cdot e^{-x} + P_0,$$

где b_1, b_2, P_0 – произвольные действительные числа,

$$F_3(x) = \frac{\text{sign}x}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \cosh x - \frac{3}{2} \cdot \sinh x + x\right)$$

– является решением уравнения

$$\psi_\ell^{(6)}(x) + 2\psi_\ell^{(4)}(x) + \psi_\ell''(x) = \delta(x).$$

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. -М.:Наука, 1974, 808 с.
2. В.С.Владимиров. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
3. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. 1996

УДК 519.61

Математический модель задачи о флаттере вязкоупругого стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейностью

Акбаров У. Й.[1], Мансуров М. М.[1], Нуритдинов Ж. Т.[1]
[1] Кокандский государственный университет, Коканд, Узбекистан;
akbarov.ummatali1961@gmail.com

Рассмотрим задачу флаттера вязкоупругого стержня с учетом физической нелинейностью

$$\sigma = (1 - R^*)\left(m_1\varepsilon + m_2\varepsilon^3\right), \quad \varepsilon = u_x, \ u = -zw_x \tag{1}$$

где

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

или

$$\sigma = (1 - R^*) \left(-m_1 z w_{xx} - m_2 z^3 w_{xx}^3\right) \tag{2}$$

где m_1 и m_2 упругие постоянные, определяющие в процессе испытаний материала на растяжение или кручение, причем $m_2 < 0$ для материала мягких, а $m_2 > 0$ жестких характеристик, $R(t)$ - ядро наследственности имеющее слабо-сингулярные особенности типа Абеля.

Следует учитывать также влияние аэродинамических нелинейностей. Учет этих нелинейностей важен при больших числах M. Для определения нормального давления на поверхности принимается так называемая "поршневая"теория. По одномерной теории газа давление газа на поршень

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{\chi - 1}{2} \frac{U}{c_\infty}\right)^{\frac{2\chi}{\chi - 1}} \tag{3}$$

где p_∞ и c_∞ - давление и скорость звука невозмущенном патоке, χ - отношение теплоемкости газа при неизменном давлении к теплоемкости при постоянном объеме (коэффициент политропа).

Рассмотрим линеаризированное течение газа вдоль поверхности, по которой распространяются упругие волны. В этом случае

$$U = V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \tag{4}$$

где w- перемещение системы по нормали к первоначальной ее поверхности.

Применим для уравнения (3) формулу бинома Ньютона и во втором приближении получим:

$$q = k \left[V \frac{\partial w}{\partial x} + \chi_1 V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial t}\right] \tag{5}$$

где $q = p - p_\infty, \quad k = \frac{\chi p_\infty}{c_\infty}, \quad \chi_1 = \frac{\chi + 1}{4 c_\infty}$.

Рассмотрим задачу о флаттере в нелинейной вязкоупругой постановке учитывающие физические и аэродинамические нелинейности. С этой целью построим математическую модель для исследования вязкоупругого стержня в потоке газа с учетом этих нелинейностей.

В данном случае, принимая гипотезу плоских сечений для изгибающего момента используем следующую формулу:

$$M_x = \int\limits_{-h/2}^{h/2} b(x) \sigma_x z dz \tag{6}$$

(2) поставим в (7) и получаем:

$$M_x = -(1 - R^*) \left[m_1 J_2 w_{xx} + m_2 J_4 w_{xx}^3\right] \tag{7}$$

где

$$J_i = \int\limits_F S^i dF, \ i = 2, 4$$

и равные для балок шириной $b(x)$ и высотой $h(x)$

$$J_2 = \frac{b(x) h^3(x)}{12}, \quad J_4 = \frac{b(x) h^5(x)}{80}.$$

Подставляя (6) и (7) в уравнение равновесия, т.е.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x,t) \tag{8}$$

имеем

$$-(1-R*)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[m_1 J_2 w_{xx} + m_2 J_4 w_{xx}^3\right] = m(x)w_{tt} + k\left[Vw_x + \chi_1 V^2 w_x^2 + zw_t\right]$$

Переходим к безразмерным координатам. Для этого введем следующие обозначения:

$$w = h_0\bar{w},\ x = a\bar{x},\ t = t_1\bar{t},\ m(x) = m_0\overline{F(x)},\ h(x) = h_0\overline{h(x)},\ b(x) = b_0\overline{b(x)},$$

$$J_2 = J_2^0\overline{J_2},\ J_4 = J_4^0\overline{J_4}$$

где

$$\bar{J}_2 = \frac{\overline{b(x)}\,\overline{h^3(x)}}{12}, \quad \bar{J}_4 = \frac{\overline{b(x)}\,\overline{h^5(x)}}{80}$$

и опуская штрихи имеем

$$-m_1 J_2^0\frac{h_0}{a^4}(1-R*)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[J_2(x)w_{xx} + \frac{m_2 J_4^0}{m_1 J_2^0 h_0^2}J_4(x)\left(\frac{h_0}{a}\right)^4 w_{xx}^3\right] = m_0 F(x)\frac{h_0}{t_1^2}w_{tt} +$$

$$+kV\frac{h_0}{a}w_x + k\chi_1 V^2\frac{h_0^2}{a^2}w_x^2 + kz\frac{h_0}{t_1}w_t = 0$$

Введя обозначения, получим дифференциальное уравнение в частных производных

$$(1-R*)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[J_2(x)w_{xx} + Q_1 J_4(x)w_{xx}^3\right] + F(x)w_{tt} + Pw_x + Q_2 P^2 w_x^2 + \gamma w_t = 0 \tag{9}$$

где

$$J_2^0 = \frac{b_0 h_0^3}{12}, \quad J_4^0 = \frac{b_0 h_0^5}{80}, \quad J_2(x) = b(x)h^3(x), \quad J_4(x) = b(x)h^5(x),$$

$$Q_1 = \frac{m_2 J_4^{(0)}}{m_1 J_2^{(0)} h_0^2}\left(\frac{h_0}{a}\right)^4, \quad Q_2 = \frac{m_1 b_0(\chi+1)}{48kc_\infty}\left(\frac{h_0}{a}\right)^4,$$

$$P = \frac{kVa^3}{m_1 J_2^{(0)}}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{m_0 a^4}{m_1 J_2^{(0)}}}, \quad \gamma = \frac{kza^4}{m_1 J_2^{(0)} t_1},\ F(x) = b(x)h(x)$$

h_0 - величина высоты стержня в концах, b_0 - величина ширины стержня в концах, m_0 - величина массы соответствующий единичному переменного сечения стержня.

Нелинейные дифференциальное уравнение в частных производных (9), вместе с граничными:

$$w = 0, \quad w_x = 0 \ \text{ при } \ x = 0$$

$$w_{xx} = 0, \quad w_{xxx} = 0 \ \text{ при } \ x = 1$$

и начальными:

$$w|_{t=0} = f_0(x), \quad w_t|_{t=0} = f_1(x)$$

условиями представляют математическую модель задачи о флаттере вязкоупругого стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейности. Требуется найти критические скорости P_{cr} приводящий к нарастающему амплитуде колебаний.

Литература

1. **Бадалов Ф.Б.** *Методы решения интегральных и интегро - дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости.* Ташкент: Мехнат. - 1987. - 269 с.
2. **Abdikarimov R.A., Mansurov M.M.** *Flutter of a viscoelastic rigidly restrained bar with account for nonlinearities.* International Conference on Actual Problems of Applied Mechanics - APAM-2021 AIP Conf. Proc. 2637, 030003 1-030003-6.
3. **Mansurov M., Abdikarimov R., Mirsaidov M.** *Self-oscillatory process of a viscoelastic elongated plate.* Construction of Unique Buildings and Structures, Vol 96, No. 9600, 2022.
4. **Mansurov M.M., Abdikarimov R.A., Kobilov M.Kh.** *Mathematical model of the problem of self oscillations (flutter) of a viscoelastic rod taking into account physical and aerodynamic nonlinearities.* Scientific and technical journal FerPI. Vol.28, No.7, pp. 9-15. 2024.
5. **Mansurov M.M.** *Автоколебания линейного консольного стержена.* JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN. Vol.3, No.6, 2024.

Моделирование транспортных процессов

Алмазова Г. М. [1], Гылыджов С. [2]
[1,2] Туркменский государственный архитектурно-строительный институт, Ашхабад, Туркменистан; e-mail almazovagulshat@gmail.com

В сложных системах обычно присутствует большое количество элементов, которые выполняют различную функцию. Получение модели довольно простой формы для подобных систем часто невозможна. Каждая система может быть разделена на подсистемы, а подсистемы — на блоки, а блоки – на элементы. Таким образом, модель функционально подразделяется на подмодели. Общая идея модели отображается в виде логической структурной схемы системы. Основная задача разбиения системы состоит в том, чтобы получить элементы, математическую характеристику которых можно выполнить. Такой подход достаточно эффективен и может быть легко осуществлен. При этом модель можно построить и усовершенствовать методом итерации, добавив в основную схему блок-блок. Построение моделей из блоков позволяет экспериментировать с ее реализацией и процессом машинного имитации. Построение модели из блоков дает возможность экспериментировать при ее реализации и в процессе машинной имитации [1]. Построение математической модели для сложных систем начинают с анализа отдельных «элементарных» процессов, протекающих в объекте моделирования, и выделения отдельных блоков, соответствующих какому-либо элементу или процессу системы. Для этого функции модели разделяют на логические подфункции с более высоким уровнем детализации. При составлении модели, состоящей из отдельных блоков, возможны два подхода в зависимости от назначения модели: Структурный подход — моделирование внутреннего механизма блока. В этом случае математическая модель должна отражать механизм взаимодействия узлов, элементов и деталей рассматриваемого блока; должны моделироваться как внутренняя структура блока, так и функционирование его элементов. Этот подход должен применяться тогда, когда задачей моделирования является, например, проверка структуры блока, правильности взаимодействия его частей и общей логики работы модели. Критерием правильности структуры блока является выполнение блоком заданной в ходе моделирования функции[2]. Функциональный подход — моделирование функции блока. Этот подход применим к тем блокам, внутреннее содержание которых не описывается данной моделью. Такие блоки рассматриваются как неделимые

элементы моделируемой системы. Выбор того или иного подхода к моделированию функциональных блоков зависит от поставленной задачи. В ряде случаев моделирующий алгоритм бывает настолько сложным для реализации с помощью имеющихся в наличии вычислительных средств, что требуется измерить формулировку исходной задачи моделирования для упрощения математического описания. Это упрощение часто достигается за счет снижения точности математической модели путем сокращения полноты математического описания при исключении из модели части параметров или взаимодействий моделируемого объекта. Совокупность элементов некоторой системы может рассматриваться как ее подсистема. Обычно подсистемы являются некоторыми самостоятельно функционирующими частями системы. Например, в производственном комплексе предприятия можно выделить подсистемы, соответствующие отдельным цехам или технологическим линиям. Правильное выделение подсистем сложной системы способствует упрощению расчетов при моделировании и более наглядной интерпретации его результатов. Модель подсистемы составляется в виде структуры из моделей блоков и элементов и целиком входит в полную модель системы. Поскольку подсистема — это самая крупная, функционирующая отдельно от общих связей, структурная единица, важным этапом работы является ее декомпозиция, основанная на сборе фактов, выявлении и оценке различных воздействующих факторов. Транспортная система - это совокупность реальных объектов и связей между ними, которые используются на определенной территории для выполнения перевозок. Для решений задач разрабатываются новые методики, базирующиеся на использовании новых технологий и методов расчета. К новым технологиям относятся моделирование и использование моделей для решений задач управления и принятия решений. Во многих ситуациях они являются единственно возможным и эффективным методом, позволяющим получить ответ на поставленный вопрос [2]. Моделирование транспортных процессов – это эффективный инструмент для анализа и оптимизации работы транспортных систем, который позволяет наглядно представить процессы и принять обоснованные решения. Моделирование транспортных процессов имеет ряд целей и задач, которые помогают логистам и специалистам в области транспорта принимать обоснованные решения и оптимизировать работу транспортных систем. Вот некоторые из них. Одной из основных задач моделирования транспортных процессов является анализ и прогнозирование потоков грузов и пассажиров. Модели позволяют оценить объемы и направления этих потоков, что помогает планировать и оптимизировать использование транспортных ресурсов[4]. Моделирование транспортных процессов предоставляет логистам и специалистам в области транспорта информацию, необходимую для принятия обоснованных решений. Модели помогают оценить различные варианты и выбрать наиболее оптимальный с точки зрения затрат, эффективности и надежности. Таким образом, моделирование транспортных процессов играет важную роль в логистике и транспорте, позволяя анализировать, прогнозировать и оптимизировать работу транспортных систем. Модели транспортных процессов могут быть разделены на несколько типов в зависимости от их целей и характеристик. Рассмотрим основные типы моделей. Детерминированные модели транспортных процессов используются для точного предсказания и оптимизации транспортных потоков. Они основаны на точных математических моделях и учитывают все факторы, влияющие на транспортные процессы. Детерминированные модели позволяют прогнозировать объемы грузовых перевозок, оптимизировать маршруты и расписание транспортных средств, а также оценивать затраты и эффективность транспортной системы [1]. Стохастические модели транспортных процессов используются для анализа случайных и непредсказуемых факторов, которые могут влиять на транспортные потоки. Они основаны на статистических методах и моделируют вероятностные распределения грузовых перевозок, времени доставки и других параметров. Стохастические модели позволяют оце-

нить риски и вероятности различных событий, таких как задержки, аварии или изменения спроса на транспортные услуги. Дискретно-событийные модели транспортных процессов используются для моделирования динамических систем, в которых происходят дискретные события. Они позволяют анализировать и оптимизировать работу транспортных узлов, таких как порты, аэропорты или железнодорожные станции. Дискретно-событийные модели учитывают различные факторы, такие как загрузка и разгрузка грузов, перемещение транспортных средств и обработка документации [2].

Литература

1. **1. Башкин Т.А.** *Управление устойчивым развитием логистики транспортных средств* // Монография. - Питер: ФИНЭК, 2014. 592 с.
2. **Бнал М.И.** *Логистика фирмы.- Киев, Украинско Финский институт менеджмента и бизнеса.* // 2012. 501 с.
3. **Бужина И.А.** *Маневренная схема логистики транспортных средств.* // - М.: Прогресс, 2011. З40 с.
4. **Доенин В.** *Моделирование транспортных процессов и систем .* // Издательство. Спутник 2012 г.
5. **Никитченко А.В.** *Транспортная логистика.* 2017.

УДК 519.644

Элемент Рисса одной интерполяционной формулы

Болтаев А. К.[1], Давронов Ж. Р.[2], Амонов М. К.[3]
[1]Международный Университет Нордик, Ташкент, Узбекистан;
a.boltayev@nordicuniversity.org
[2]Международный Университет Ташкента, Ташкент, Узбекистан;
javlondavronov77@gmail.com
[3]Международный Университет Ташкента, Ташкент, Узбекистан;
merganjan.yt@gmail.com

Рассмотрим следующую интерполяционную формулу

$$\varphi(x) \cong P_{\varphi}(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta}(x)\varphi(x_{\beta}) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x,z) = \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta}(z)\delta(x-x_{\beta}), \tag{2}$$

где $C_{\beta}(x)$ – коэффициенты ($x_{\beta} \in [0,1]$) – узлы формулы (1), $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $L_2^{(m,0)}(0,1)$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\left\|\varphi|L_2^{(m,0)}(0,1)\right\| = \left[\int_0^1 \left(\left[\varphi^{(m)}(x)\right]^2 + \varphi^2(x)\right) dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Погрешностью интерполяционной формулы (1) в точке $x = z$ называется разность

$$(\ell, \varphi) = \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x-x_\beta) \right) \varphi(x)dx. \tag{4}$$

Задача построения оптимальных интерполяционных формул в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$ - это вычисление следующей величины:

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\right\|_{L_2^{(m,0)*}} = \inf_{C_\beta(z)} \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{L_2^{(m,0)}}}. \tag{5}$$

Погрешность формулы (1) является линейным функционалом в $L_2^{(m,0)*}(0,1)$, где $L_2^{(m,0)*}(0,1)$ - сопряженное пространство к пространству $L_2^{(m,0)}(0,1)$.

Эта задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму $\|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}}$ функционала погрешности ℓ в пространстве $L_2^{(m,0)*}(0,1)$, а потом минимизировать его по коэффициентам $C_\beta(z)$ и узлам x_β.

Теперь мы занимаемся решением первой части этой задачи, т.е. вычислением нормы функционала погрешности ℓ. Для этого мы пользуемся понятием экстремальной функции функционала погрешности ℓ, введенным С.Л.Соболевым [1-3].

Функция ψ_ℓ, для которой выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\| \cdot \|\psi_\ell\|, \tag{6}$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности ℓ.

Справедлива

Теорема. *Экстремальная функция ψ_ℓ функционала погрешности ℓ оптимальной интерполяционной формулы (1) имеет вид:*

$$\psi_\ell(x) = -\ell(x) * G_m(x),$$

где

$$G_m(x) = \frac{signx}{2m} \left[\sinh(x) + \sum_{k=1}^{m-1} e^{x\cos\frac{\pi k}{m}} \cos\left(x\sin\left(\frac{\pi k}{m}\right) + \frac{\pi k}{m} \right) \right],$$

$m-$ нечетное натуральное число.

Доказательство теоремы привидено в работе [4]. Кроме того, вычислена квадрат нормы функционала погрешности (2) следующем образом:

$$\left\|\ell(x,z)\right\|^2_{L_2^{(m,0)*}} = 2\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta G_m(z-x_\beta) - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta(z)C_\gamma(z)G_m(x_\beta - x_\gamma).$$

Литература

1. **Соболев С.Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука. - 1974. - 808 с.
2. **Соболев С.Л., Васкевич В.Л.** *Кубатурные формулы* Новосибирск.: Издательство ИМ СО РАН. - 1996. - 484 с.
3. **Шадиметов Х.М.** *Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева.* Ташкент.: Издательство "Fan va texnologiya". - 2019. - 224 с.
4. **Давронов Ж.Р.** *Об одной дискретной системе типа Винера-Хопфа* Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2022. -№ 5/1(44). -С. 84-92.

Дробная динамика модели Лотки-Вольтерры

Бозоров А.[1], Файзуллаева Ш.[2], Бобоярова Н. [3].
[1]V.I.Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent;
bozaxror9@gmail.com [2]Tashkent State Transport University, Tashkent;
shahlo9735@gmail.com [3]Urgench Ranch technological university, Urgench;
boboyarova@gmail.com

Классические модели Лотки-Вольтерры широко применяются для описания динамики взаимодействующих систем. Однако они не учитывают *эффекты памяти* и запаздывания, которые важны для реальных биологических, экологических и экономических процессов. Для их описания естественно использовать *производные дробного порядка.*

Классическая дискретная динамическая система Лотки-Вольтерры имеет вид ([1])

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(1+ax_2), \qquad x_2' = x_2(1-ax_1), \\ x_3' &= x_3(1+bx_4), \qquad x_4' = x_4(1-bx_3), \qquad 0 < a,b,c \le 1. \\ x_5' &= x_5(1+cx_6), \qquad x_6' = x_6(1-cx_5), \end{aligned} \tag{1}$$

Она распадается на три независимые пары (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6).

Для учета памяти введем производную Капуто D^α, $\alpha \in (0,1]$ ([2]) :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x'(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds.$$

Тогда дробная модель имеет вид

$$D^\alpha x_i = f_i(x), \qquad i = 1, \dots, 6, \tag{2}$$

где $f_i(x)$ совпадают с правыми частями (1).

Для одной пары (x, y) уравнения примут форму

$$D^\alpha x = x(1+\kappa y), \qquad D^\alpha y = y(1-\kappa x), \quad \kappa > 0.$$

Классическая система ($\alpha = 1$)

Уравнения стационарности дают единственную точку $(0,0)$ в неотрицательной области. Линеаризация дает собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, следовательно, $(0,0)$ – неустойчивый узел. Для полной системы $(0,0,0,0,0,0)$ также является неустойчивым равновесием.

Дробная система ($0 < \alpha < 1$)

Критерий устойчивости для $D^\alpha z = Az$: $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$. Так как в нашей модели $\lambda = 1 > 0$, условие не выполнено $\Rightarrow$ нулевая точка остается неустойчивой при любом α.

Модификация с самоограничением

Чтобы получить положительные внутренние равновесия, добавим логистические члены:

$$\begin{cases} D^\alpha x = x(1 - \mu x + \kappa y), \\ D^\alpha y = y(1 - \mu y - \kappa x), \end{cases} \qquad \mu > 0. \tag{3}$$

Стационарные точки: $(0,0)$, $(0,1/\mu)$, $(1/\mu,0)$ и внутренняя

$$(x^*, y^*) = \left(\tfrac{\kappa+\mu}{\kappa^2+\mu^2},\ \tfrac{\mu-\kappa}{\kappa^2+\mu^2}\right), \quad \text{существует при } \mu > \kappa.$$

Устойчивость:

- $(0,0)$ – всегда неустойчива;
- $(0,1/\mu)$ – седло;
- $(1/\mu,0)$ – устойчива при $\mu < \kappa$, седло при $\mu > \kappa$;
- внутренняя точка устойчива при $\mu > \kappa$.

Для $\alpha < 1$ эти результаты сохраняются: если вещественные части собственных чисел отрицательны, устойчивость выполняется для всех $0 < \alpha \leq 1$.

Заключение

Предложенная дробная модель Лотки-Вольтерры расширяет классические схемы за счет учета памяти, что позволяет адекватнее описывать реальные процессы. Стационарные точки совпадают с фиксированными точками исходного оператора V, однако их устойчивость существенно зависит от порядка дробной производной α. Практические области применения включают биологию и экологию (популяционная динамика, эпидемии с иммунологической памятью), экономику (конкуренция фирм, рыночные процессы с задержкой), физику и химию (автокаталитические реакции, аномальная диффузия), а также социальные и информационные системы (распространение информации с эффектом памяти).

Таким образом, модель может служить универсальным инструментом анализа широкого класса взаимодействующих систем, где значима роль прошлого в текущей динамике.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B., Akhmedova D.D., Muminov U.R.** *Linear Homogeneous Inequalities and Trajectory Routes of the Degenerate Lotka-Volterra Operators,* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2025, 46(3). 1257-1265.
2. **Псху А.В.** *Уравнения в частных производных дробного порядка.* - М.: Наука, 2005. - 199 с.

УДК 532.546

ПЛОСКО – РАДИАЛЬНАЯ АНОМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

Зокиров М. С [1]., Кулжанов Ж.Б [2]

[1]Самаркандский государственный университет им.Шарофа Рашидова
mzokirov45@gmail.com
[2]Самаркандский институт экономики и сервиса
j.kuljanov86@gmail.com

Известно, что нефти многих месторождений имеют аномальные реологические свойства. Аномальные свойства нефти обусловлены наличием в ее составе различных веществ, в частности асфальтенов, смол, парафинов и др. Аномальная вязкость нефти отражается на движение ее в системе сбора и внутрипромысловый подготовки, трубопроводного транспорта и др. Аномальная вязкость обычно оказывает сильное влияние на процесс движения нефти в пласте [1], что отражается на законе фильтрации.

Развитие релаксационной теории фильтрации нашло свое отражение в [2]. С недавнего времени в релаксационной теории фильтрации стал использоваться аппарат дробного дифференцирования [3].

В работе рассматривается обобщенная релаксационная дробно-дифференциальная модель фильтрации однородной жидкости с учетом предельного градиента давления (ПГД) в плоско - радиальной пористой среде.

Выведено уравнение релаксационной фильтрации на основе уравнения неразрывности и закон Дарси. Поставлена и численно решена задача фильтрации для этого уравнения. Закон фильтрации в радиальном случае с учетом ПГД записывается в виде

$$v+\lambda_v D_t^{\beta} v=\begin{cases} 0 & \left|\frac{\partial p}{\partial r}\right|\le g_0\ , \\ -\frac{k}{\mu}\left(\frac{|\frac{\partial p}{\partial r}|-g_0}{|\frac{\partial p}{\partial r}|}\frac{\partial p}{\partial r}+\lambda_p D_t^{\alpha}\left(\frac{|\frac{\partial p}{\partial r}|-g_0}{|\frac{\partial p}{\partial r}|}\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right) & \left|\frac{\partial p}{\partial r}\right|>g_0\ , \end{cases} \tag{1}$$

где $g_0=|\frac{\partial p}{\partial r}|$ -модуль предельного градиента давления, λ_v, λ_p - времена релаксации скорости фильтрации $\overrightarrow{v}$ и давления p, k - проницаемость среды, μ-вязкость жидкости,r-координата, D_t^{β}, D_t^{α}-операторы дробной производной в смысле Капуто [4] по времени t порядка α , β, соответственно.

В (1) времена релаксации λ_v и λ_p имеют дробную размерность : $\lambda_v=T^{\beta}$, $\lambda_p=T^{\alpha}$, где T -размерность времени. Данный подход характеризует нелокальные во времени эффекты.

Из (1) в частности имеем

$$v+\lambda_v D_t^{\beta} v=0 \quad \text{при} \quad \left|\frac{\partial p}{\partial r}\right|\le g_0, \tag{2}$$

$$v+\lambda_v D_t^{\beta} v=-\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial p}{\partial r}-g_0+\lambda_p D_t^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial r}\right] \quad \text{при} \quad \frac{\partial p}{\partial r}>g_0\ , \tag{3}$$

$$v+\lambda_v D_t^{\beta} v=-\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial p}{\partial r}+g_0+\lambda_p D_t^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial r}\right] \quad \text{при} \quad \frac{\partial p}{\partial r}<0,\ \left|\frac{\partial p}{\partial r}\right|>g_0. \tag{4}$$

Здесь на основе (1) выведено уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\lambda_v D_t^{\beta+1} p=\kappa\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}+\lambda_p D_t^{\alpha}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right), \tag{5}$$

где $\kappa = \frac{k}{\mu\beta^*}$ - коэффициент пьезопроводности.

Как видно из (5) для давления получено уравнение пьезопроводности, не зависящее от g_0.

При отмеченных условиях начальные и граничные условия принимаются в следующем виде

$$p(0,r) = p_k, \qquad D_t^{\beta} p(0,r) = 0, \tag{6}$$

$$p(t,r_c) = p_c, \qquad p(t,R) = p_k, \tag{7}$$

$p_k, p_c = conct.$

Задача (1)-(7) решена численно и анализировано влияние λ_v, λ_p, α и β на распределение скорости фильтрации в пласте. Некоторые результаты представлены на рис.1.

Сравнение рис.1а с рис.1б показывает, что ПГД укорачивает зону распространения поля скорости фильтрации. При этом влияние уменьшения β такое же, как ПГД. Так, если с ПГД при $t = 3600c$, $\beta = 0.7$ зона распространения скорости фильтрации $|v|$ доходит до ~ 10, то без ПГД это расстояние равно ~ 25. При этом дополнительная застойная зона от $r \approx 10$ до $r \approx 25$ возникает за счет g_0.

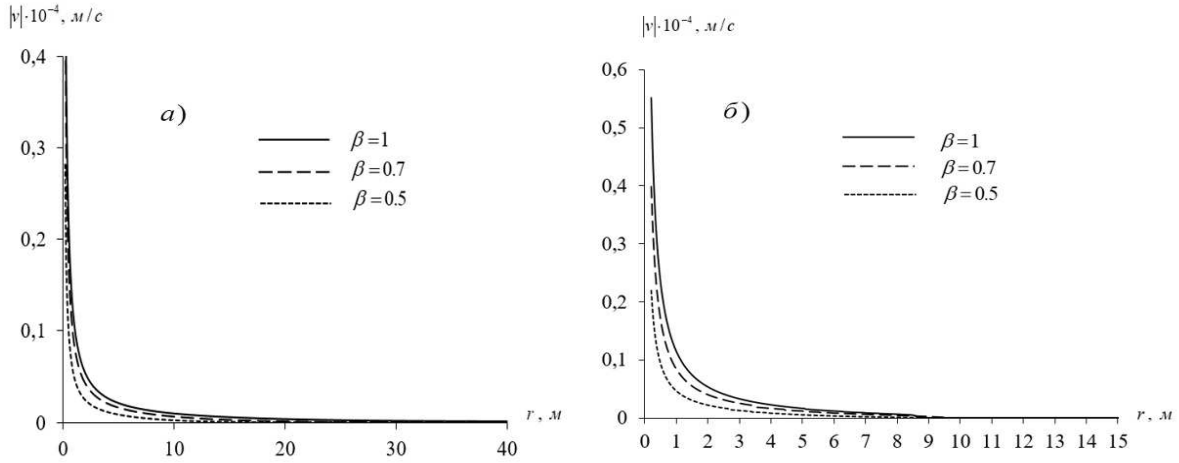


Рис.1. Профили изменения скорости при различных β при $t = 3600c, \lambda_v = 1000c^{\beta}, \lambda_p = 500c^{\alpha}$ а) $g_0 = 0\,\text{Па/м}$, б) $g_0 = 10^5$ Па/м.

Литература

1. **1. Девликамов В.В., Хабибуллин З.А., Кабиров М.М.** *Аномальные нефти.* М.: «Недра».- 1975. - 168 с.

2. **Молокович Ю.М., Непримеров Н.И., Пикуза В.И., Штанин А.В.** *Релаксационная фильтрация.* Казань: Изд-во Казан. ун-та. -1980.- 136 с.

3. **Булавацкий В.М.** *Математические модели и задачи дробно дифференциальной динамики некоторых релаксационных фильтрационных процессов.* Кибернетика и системный анализ. -2018, том 54, № 5. - 57-60 с.

4. **Caputo M.** *Models of flux in porous media with memory.* Water Resources Research. -2000, Vol. 36, №3. P. 693-705.

УДК 519.24

Методы распространения ограничений в интеграции с аффинной арифметикой для гарантированного решения систем нелинейных уравнений

Ибрагимов А. А.[1], Абдухалилов Ш. Я.[1]
[1]Навоийский государственный университет, г.Навоий, Узбекистан
alim-ibragimov@mail.ru, shohrux.abduxalilov.14@gmail.com

Интервальные методы распространения ограничений (Interval Constraint Propagation, ICP) является мощным инструментом для решения нелинейных уравнений и задачи оптимизации, обработки непрерывных доменов с гарантированной точностью, а также для работы (в комбинации) с другими методами. Их основное преимущество – это устойчивость к ошибкам округления и возможность работы там, где классические численные методы неэффективны. Данный подход широко применяется в глобальной оптимизации, робототехнике и верификации моделей.

Базовый интервальный метод надежен, но страдает от излишнего расширения оценок (эффект зависимости), что приводит к медленной сходимости.

В данной работе исследуется гибридный подход, сочетающий алгоритм ICP и аффинную арифметику (AA) для решения систем нелинейных уравнений. Показано, что интеграция AA позволяет преодолеть основной недостаток классической интервальной арифметики, то есть *проблему зависимости*, что приводит к существенному сужению областей поиска и ускорению сходимости. Основная цель в этом случае является исследование возможности и эффективности интеграции аффинной арифметики в алгоритм распространения ограничений для снижения эффекта зависимости и ускорения поиска решений.

В аффинной арифметике $\mathbb{AR}$ интервальная величина $\boldsymbol{x}$ представляются в аффинной форме:

$$\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n, \tag{1}$$

где x_0 – центральное значение, $\varepsilon_i \in [-1, 1]$ – шумовые символы, представляющие источники неопределенности, а x_i – коэффициенты при соответсвующих символах шума.

Линейные операции для двух интервалов

$$\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n \in \mathbb{AR},$$

$$\boldsymbol{y} = y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \ldots + y_n\varepsilon_n \in \mathbb{AR},$$

выполняются точно:

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma = (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) + (\alpha x_1 + \beta y_1)\cdot\varepsilon_1 + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n)\cdot\varepsilon_n,$$

но нелинейные операции (умножение, деление, функции) требуют аппроксимации и введения нового шумового символа для погрешности.

Классический ICP использует интервальную арифметику на шаге сужения, что приводит к быстрому завышению оценок из-за проблемы зависимости. Интервальная арифметика не отслеживает корреляции между переменными. Например, для $\boldsymbol{x} = [0, 1]$:

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = [0, 1] - [0, 1] = [-1, 1] \qquad \text{(вместо точного результата } [0, 0]).$$

В AA интервал $\boldsymbol{x} = [0, 1]$ представляется по формуле (1) как $\boldsymbol{x} = 0.5 + 0.5\varepsilon_1$, тогда

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = (0.5 + 0.5\varepsilon_1) - (0.5 + 0.5\varepsilon_1) = 0,$$

что дает точный результат. Поэтому, использование аффинной арифметики в рамках парадигмы распространения ограничений (ICP) может значительно повысить его эффективность и точность.

Предлагаемый нами **гибридный подход** включает следующие шаги:

1. Каждую переменную инициализируем в независимой аффинной форме как в (1).
2. Выразим ограничение $f_i(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = 0$ через шумовые символы.
3. Применяем сжимающий оператор, т.е. решим получившуюся систему (линейную или линеаризованную) относительно допустимых значений ε_i. Например, для ограничения $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 5$ уравнение

$$(x_{10} + x_{20} - 5) + x_{11}\varepsilon_1 + x_{21}\varepsilon_2 = 0,$$

позволяет найти новые ограничения на ε_1 и ε_2.
4. Если сужение ограничения изменило диапазоны для каких-либо шумовых символов, это изменение немедленно влияет на все аффинные формы, которые используют эти символы. Таким образом, информация распространяется по всей системе очень эффективно.
5. Если сужение застопорилось, алгоритм выбирает переменную для бисекции. Но теперь он бисекционирует не интервал, а диапазон одного из шумовых символов ε_i, что зачастую является более осмысленным выбором.

Главное преимущество предлагаемого метода – это кардинальное снижение эффекта зависимости. Метод дает гораздо более узкие и точные границы для решений, а также обеспечивает более быструю сходимость, благодаря чему требуется меньше итераций сужения и бисекций для достижения заданной точности. Кроме того, аффинные формы несут в себе информацию о том, как переменные связаны, что дает более глубокое понимание структуры задачи.

Для простых задач или в случаях, когда эффект зависимости незначителен, можно ограничиться классической интервальной арифметикой в силу ее простоты и быстродействия [2]. Для сложных же задач с большим количеством взаимозависимых переменных (например, в робототехнике, компьютерном зрении или проектировании систем) применение аффинной арифметики в рамках ICP-фреймворка позволяет получать надежные, точные и гарантированные результаты, недостижимые при использовании лишь классической интервальной арифметики.

Литература

1. **Benhamou, F., Granvilliers, L., Goualard, F.** *Interval Constraints: Results and Perspectives.* In: Apt, K.R., Monfroy, E., Kakas, A.C., Rossi, F. (eds), New Trends in Constraints. Lecture Notes in Computer Science, vol. 1865, 2000, Springer, Berlin, Heidelberg.

2. **Ибрагимов А.А., Абдухалилов Ш.Я.** *Интервальные методы распространения ограничений в решении нелинейных уравнений и их некоторые приложения.* Материалы Республиканской научно-практической конференции “Современные подходы к преподаванию точных и естественных наук: проблемы и решения”, 18-19 апреля, НавГУ, 2025, с. 97-102.

УДК 519.852

Численное исследование методов математического моделирования для минимизации затрат в туристической задаче: алгоритмы имитационного отжига и 2-opt

Кожамкулова Ж.Ж. [1], **Ержанкызы Д.** [2]

[1]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан; zhazira0423@gmail.com

[2]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан; danaerjankyzy@gmail.com

В данной работе проводится сравнительный анализ алгоритмов 2-opt и имитационного отжига (Simulated Annealing, SA) для решения задачи коммивояжёра (TSP). Исследование ориентировано на сферу туризма, где выбор оптимальных маршрутов играет ключевую роль в снижении транспортных издержек и повышении эффективности организации поездок. Метод имитационного отжига основан на вероятностном механизме принятия новых решений, что позволяет алгоритму избегать преждевременной фиксации в локальных минимумах и увеличивает вероятность нахождения глобального оптимума:

$$P = \exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right), \tag{1}$$

где ΔE — приращение целевой функции, а T — параметр температуры, определяющий вероятность перехода к менее выгодному решению.[1] В отличие от него, алгоритм 2-opt оптимизирует маршрут за счёт замены рёбер и устранения пересечений, что сокращает общую длину пути[4]:

$$d(A, B) + d(C, D) > d(A, D) + d(B, C). \tag{2}$$

На примере маршрутов по 6 и 12 городам Казахстана продемонстрированы вычислительные характеристики указанных методов, а также их практическая значимость для туристической отрасли. Для шести крупных городов (Астана, Алматы, Шымкент, Актобе, Караганда, Усть-Каменогорск) оба метода обеспечили маршрут длиной около 4648,1 км.Для 12 городов (включая Атырау, Костанай, Павлодар, Тараз, Кызылорду и Петропавловск) длина маршрута составила 5949,9 км. Сравнение показателей приведено в таблице:

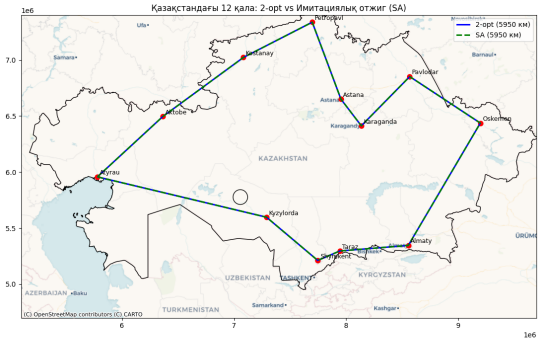
Таблица 3: Сравнение методов 2-opt и SA на маршрутах Казахстана

Города	2-opt		SA	
6	Длина: 4648,1 км	Итерации: 6	Длина: 4648,1 км	Итерации: 6905
12	Длина: 5949,9 км	Итерации: 90	Длина: 5949,9 км	Итерации: 9138

Эксперименты были реализованы на языке Python с последующей визуализацией результатов на карте Казахстана.



(a) 6 городов



(b) 12 городов

Рис. 9: Сравнение маршрутов по 6 и 12 городам Казахстана (визуализация в Python)

Оба метода показали корректность решений и одинаковую длину маршрутов. Алгоритм 2-opt отличается высокой скоростью и простотой, что делает его удобным для маршрутов малого масштаба. Имитационный отжиг, хотя и требует больше времени, обеспечивает более широкий поиск и подходит для сложных туристических маршрутов Казахстана, где важно избежать локальных минимумов. Рассмотренные методы подтверждают свою эффективность для оптимизации туристических маршрутов. Алгоритм имитационного отжига продемонстрировал высокую устойчивость к локальным минимумам и оказался более производительным в задаче крупного масштаба. Алгоритм 2-opt выгоден для быстрых оценок и простых случаев, но его ограниченность проявляется при увеличении числа городов.

Практическая значимость исследования заключается в применении указанных методов для планирования туристических поездок по Казахстану, что позволяет сократить транспортные расходы и время в пути. Перспективой дальнейшей работы является разработка гибридных алгоритмов и интеграция методов машинного обучения для повышения эффективности маршрутизации.

Литература

1. **Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P.** *Optimization by Simulated Annealing* // Science. – 1983. – Vol. 220, №4598. – P. 671–680.
2. **Croes G.A.** *A Method for Solving Traveling Salesman Problems* // Operations Research. – 1958. – Vol. 6(6). – P. 791–812.
3. **Applegate D.L., Bixby R.E., Chvatal V., Cook W.J.** *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study.* – Princeton University Press, 2006.
4. **Gunawan P.H., Iryanto.** *Simulated Annealing – 2 Opt Algorithm for Solving Traveling Salesman Problem* // International Journal of Computing. – 2023.

УДК 519.644

Квадрат нормы функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы в пространстве Соболева

Нуралиев Ф.А.[1,2,3], Мирзакабилов Р.Н.[4], Миркомилов Д.М.[2]
[1]Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан;
[2]Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан;
[3]Ташкентский международный университет, Ташкент, Узбекистан;
[4]Джизакский государственный педагогический университет, Джизак, Узбекистан;

В настоящей работе будет найден квадрат нормы функционала погрешности квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\,\varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} d_0[\beta]\,\varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} d_1[\beta]\,\varphi'(h\beta), \tag{1}$$

с функционала погрешности

$$l(x) = E_{[0,1]}(x)e^{2\pi i\omega x} - \sum_{\beta=0}^{N} d_0[\beta]\,\delta(x-h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} d_1[\beta]\,\delta'(x-h\beta). \tag{2}$$

Здесь

$$d_0[\beta] = \begin{cases} h\left(\dfrac{K_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h}}{e^{2\pi i\omega h}-1} - \dfrac{1}{2\pi i\omega h}\right), & \beta = 0, \\ hK_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h}, & \beta = \overline{1,N-1}, \\ h\left(\dfrac{K_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h}}{1-e^{2\pi i\omega h}} + \dfrac{e^{2\pi i\omega}}{2\pi i\omega h}\right), & \beta = N, \end{cases}$$

$K_{\omega,1} = \left(\dfrac{\sin\pi\omega h}{\pi\omega h}\right)^2$.

$d_1[\beta]$—коэффициенты квадратурной формулы (1), $E_{[0,1]}(x)$—характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$—дельта-функция Дирака. Функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_2^{(m)}(0,1)$, где $L_2^{(m)}(0,1) = \left\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \varphi^{(m-1)}\right\}$ абсолютно непрерывно и $\varphi^{(m)} \in L_2^{(m)}(0,1)$ пространство Соболева комплекснозначных функций со скалярным произведением определённое равенством:

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\cdot\overline{\psi^{(m)}(x)}\,dx,$$

здесь $\overline{\psi}$—сопряжённая функция к функции ψ и норма функции φ соответственно определяется формулой

$$\|\varphi\| = \langle\varphi,\varphi\rangle^{1/2} = \left\{\int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\cdot\overline{\varphi}^{(m)}(x)\,dx\right\}^{1/2}.$$

Квадрат нормы функционала погрешности вычисляется с помощью экстремальной функции.

Определение. Функция называется экстремальной функциий функционала $l(x)$ [1], если

$$(l, \varphi_e) = \|l|L_2^{(m)*}\| \cdot \|\psi_e|L_2^{(m)}|.$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Решение $\psi_e(x)$ краевой задачи является экстремальной функцией функционала погрешности (2) в пространствеL$_2^{(m)*}(0,1)$ и имеет вид где*

$$\psi_e(x) = (-1)^m \bar{l}(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1} \operatorname{sign} x}{2(2m-1)!}$$

является решением уравнения

$$\psi^{(2m)}(x) = \delta(x),$$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$P_{m-1}(x)$ – многочлен степени $m-1$, $\delta(x)$ – известная дельта функция Дирака.

Теорема 2. Квадрат нормы функционала погрешности (2) квадратурной формулы вида (1) на пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ имеет вид:

$$\|l\|^2 = (-1)^{m+1} \left[\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} d_1[\beta]\overline{d_1}[\beta] \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-3}}{2(2m-3)!} \operatorname{sign}(h\beta - h\gamma) + \right.$$

$$+ \sum_{\beta=0}^{N} \int_0^1 \overline{d_0}[\beta] e^{2\pi i\omega x} + d_0[\beta] e^{-2\pi i\omega x}) \frac{(x - h\beta)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \operatorname{sign}(x - h\beta)\, dx -$$

$$- \sum_{\beta=0}^{N} \int_0^1 (d_1[\beta] e^{2\pi i\omega x} + d_1[\beta] e^{-2\pi i\omega x}) \frac{(x - h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \operatorname{sign}(x - h\beta)\, dx -$$

$$- \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} (d_0[\gamma]\overline{d_1}[\beta] + d_1[\beta]\overline{d_0}[\gamma]) \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!} -$$

$$- \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} d_0[\beta]\overline{d_0}[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \operatorname{sign}(h\beta - h\gamma) -$$

$$\left. - \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} e^{-2\pi i\omega x} \frac{(x-y)^{2m-1}}{2(2m-1)!} \operatorname{sign}(x-y)\, dx\, dy \right]. \tag{3}$$

Литература

1. Соболев С. Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* — М.: Наука, 1974. 808с.

УДК 517.929:004.85

Некоторые аспекты применения нейросетевых методов решения начальных и краевых задач для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения Лейна-Эмдена

Паровик Р. И.[1]

[1]Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Камчатский край, с. Паратунка, Россия; parovik@ikir.ru

В работе исследуется применение нейросетевых методов, основанных на ортогональных полиномах Лежандра [1], Чебышева [2] и Лагерра для решения начальных и краевых задач [3], в которых содержаться нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. В работе на конкретном примере решения начальных и краевых задач для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения Лейна-Эмдена второго порядка, которое возникает в задачах математического описания структуры космических звезд [4].

Проводится сопоставление с нейронными сетями другой архитектуры. Показана эффективность полиномиальных нейронных сетей по сравнению с многослойными нейронными сетями. Исследованы вопросы переобучения полиномиальных нейронных сетей и даны рекомендации по минимизации этого эффекта. Показано, что качественные результаты моделирования с помощью полиномиальных нейронных сетей зависят от оптимального выбора значений их гиперпараметров: порядка полинома, скорости обучения и т.д.

Реализация алгоритмов полиномиальных нейронных сетей и визуализация их работы были осуществлены на языке программирования Python в среде PyCharm [5].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН №124012300245-2. Тема "Взаимодействие физических процессов в системе ближнего космоса и геосфер"(2024-2028 гг.).

Литература

1. **Yang Y., Hou M., Luo J.** *A novel improved extreme learning machine algorithm in solving ordinary differential equations by Legendre neural network methods* // Advances in Difference Equations. 2018. Vol. 2018. No. 1. 469.

2. **Chaharborj S. S., Chaharborj S. S., See P. P.** *Application of Chebyshev neural network to solve Van der Pol equations* // International Journal of Basic and Applied Sciences. 2021. Vol. 10. No. 1. P. 7-19.

3. **Tan L. S., Zainuddin Z., Ong P.** *Solving ordinary differential equations using neural networks* // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1974. No. 1. P. 020070.

4. **Yildirim A., Ozis T.** *Solutions of singular IVPs of Lane–Emden type by the variational iteration method* // Nonlinear Anal. 2009. Vol. 70. P. 2480–2484.

5. **Van Horn II B. M., Nguyen Q.** *Hands-on application development with PyCharm: Build applications like a Pro with the ultimate Python development tool.* Packt Publishing Ltd, 2023.

УДК 519.624.2

Численное моделирование сингулярно-возмущенного уравнения третьего порядка с применением полиномов Чебышева второго рода

Турсунова Б. А.[1] Нормаматов А.[2]
[1,2] Термезский государственный университет,Термез,Узбекистан
barno.tursunova.2016@mail.ru

Рассмотрим сингулярно-возмущенную дифференциальную уравненую третьего порядка

$$8\varepsilon^{\frac{3}{2}}y''' + 4(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon + \varepsilon^{\frac{3}{2}})y'' + 2(1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}})y' + y = 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(-1) = 3, y'(-1) = -1 - \varepsilon^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-1}, y''(-1) = 1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2}, \tag{2}$$

где ε - малый параметр.

Для численного решения дифференциальной задачи (1)-(2) применяем спектральный метод с полиномами Чебышева второго рода. Приближенное решение задачи (1)-(2) ищем в виде следующего конечного ряда:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n U_n(t), \tag{3}$$

где $U_n(t)$ - полиномы Чебышева второго рода, $a_n (n = 0, 1, ..., N)$- неизвестные коэффициенты разложения. Производные первого, второго и третьего порядка ряда (3) вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{n=0}^{N-3} 2(n+1)\Big(\sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n\equiv 1(mod 2)}}^{N} a_p \Big) U_n(t), \tag{4}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{n=0}^{N-3} (n+1)\Big(\sum_{\substack{p=n+2 \\ p\equiv n(mod 2)}}^{N} (p-n)(p+n+2)a_p \Big) U_n(t), \tag{5}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \sum_{n=0}^{N-3} 4(n+1)\Big(\sum_{\substack{p=n+3 \\ p+n\equiv 1(mod 2)}}^{N} \Big((\frac{p-n-1}{2})^4$$

$$+2(\frac{p-n-1}{2})^3(n+2) + (\frac{p-n-1}{2})^2(n^2+5n+5) + (\frac{p-n-1}{2})(n^2+3n+2)\Big) a_p \Big) U_n(t). \tag{6}$$

Начальные условия (2) с помощью ряда (3) записываются в виде:

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n (n+1) a_n = 3,$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n 2(n+1)^2\Big(\sum_{\substack{p=n+1\\ p+n\equiv 1(mod 2)}}^{N} a_p\Big) = -1-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}-\varepsilon^{-1}, \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{N-2}(-1)^n(n+1)^2\Big(\sum_{\substack{p=n+2\\ p\equiv n(mod 2)}}^{N}(p-n)(p+n+2)a_p\Big) = 1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-2}$$

Подставляя ряды (4)-(6) в дифференциальное уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов Чебышева и с учетом начальных условий (7) задачу (1)-(2) можно записать в виде алгебраической системы относительно неизвестных коэффициентов.

В следующей таблице представлены результаты численного эксперимента, проведённого с применением спектрального метода, при различных значениях малого параметра и различном количестве базисных полиномов 20, 50 и 100.

ε-малый параметр	**Число полиномов**	**максимальная погрешность**	**При увеличении числа многочленов в 5 раз, т.е. от 20 до 100**
0.3	20	$4.29e^{-7}$	максимальная погрешность уменьшается примерно в 3(3,27) раза.
	50	$1.01e^{-7}$	
	100	$9.68e^{-9}$	
0.4	20	$3.92e^{-7}$	максимальная погрешность уменьшается почти в 5 (4,47) раз.
	50	$3.72e^{-8}$	
	100	$6.48e^{-9}$	
0.6	20	$3.56e^{-7}$	максимальная погрешность уменьшается почти в 6 (5.9) раз.
	50	$2.58e^{-8}$	
	100	$4.46e^{-9}$	
0.8	20	$2.94e^{-7}$	максимальная погрешность уменьшается примерно в 6(6.33) раза.
	50	$1.93e^{-8}$	
	100	$3.43e^{-9}$	

Литература

1. **Normurodov Ch.B.,Tursunova B.A.** *Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind* Results in Applied Mathematics, 19 (2023) 100388, https:// doi.org/10. 1016/j.rinam. 2023. 100388

2. **Gupta P., Kumar M.** *Multiple-scales method and numerical simulation of singularly perturbed boundary layer problems* Applied mathenatics and Information Sciences An international Journal, 2016, Vol 10, No 3, pp.1119-1127, http:dx.doi.org/10.18576/amis/100330

УДК 519.63

Приближенное решение задачи балки Эйлера – Бернулли

Усманов Х.И.
[2]Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкет, Узбекистан;
hojiakbar170853@mail.ru

В качестве основной расчётной модели рассмотрим дифференциальное уравнение балки Эйлера – Бернулли (основание модели Винклера) в безразмерных переменных [1], [2]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \lambda w = \sin(\omega_0 \tau)\delta(\xi - v\tau), \xi \in [0,1], \tau \in [0, T_0] \tag{1}$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями:

$$w(\xi, 0) = 0, \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \tau} = 0, \xi \in [0,1], \tag{2}$$

$$w(0,\tau) = 0, \frac{\partial w(0,\tau)}{\partial \xi} = 0, w(1,\tau) = 0, \frac{\partial w(1,\tau)}{\partial \xi} = 0, \tau \in 0, T_0, \tag{3}$$

где $w(\xi, \tau)-$ прогиб балки, искомая функция; $\lambda-$ коэффициент основания; $v-$ скорость движущейся нагрузки; ω_0- частота колебания балки; T_0- период исследования, $\delta(\xi - v\tau)-$ дельта-функция Дирака.

Для решения задачу (1) – (3) применим следующий подход. Так как интенсивность воздействия на балку представляет собой гармоническую функцию, а искомую функцию, определяющая вынужденные колебания той же частоты ω_0, т.е. $w(\xi, \tau) = y(\xi, \tau)\sin(\omega_0)$, где $y(\xi, \tau)-$ неизвестная функция.

Так как функция $\delta(\xi - v\tau)$ зависит от времени, тогда для каждого временного слоя будет необходимо найти $y(\xi, \tau)$. Поэтому переходя конечной разности по времени и подставляя приведённых выражений в уравнение (1), имеем краевую задачу в обыкновенных дифференциальных уравнениях:

$$y^{(4)}(\xi, \tau_j) = (\omega_0^2 - \lambda)y(\xi, \tau_j) + \delta(\xi - v\tau_j), \tag{4}$$

$$y(0, \tau_j) = \frac{dy(0, \tau_j)}{d\xi} = y(1, \tau_j) = \frac{dy(1, \tau_j)}{d\xi} = 0, \tag{5}$$

где $y(\xi, \tau)-$ искомая функция в $j-$ том временном слое, $\tau_j = \Delta\tau \cdot j, j = \overline{0, M}, \Delta\tau-$ шаг по времени.

Для решения краевую задачу (4) – (5) уравнение (4) сведем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [3]:

$$y(\xi, \tau_j) = \mu \int_0^1 G(s, \tau_j)y(s, \tau_j)dsG(\xi, v\tau_j), \tag{6}$$

где $\mu = \omega_0 - \lambda, G(\xi, \tau_j)-$ функция Грина. Для решения интегрального уравнения (6) применим метод оптимальных квадратурных формул с производными в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ [4]. Решение задачи (1) - (3) определяется $w(\xi, \tau) = y(\xi, \tau)\sin(\omega_0\tau)$.

Чтобы найти аналитического решения нашей задачи определяем функцию Грина для однородного уравнения [3]:

$$y^{(4)}(\xi, \tau_j) + \mu y(\xi, \tau_j) = 0, \xi \in [0, 1]$$

с учётом граничных условий (5). После чего можно написать аналитическое решения неоднородного уравнения

$$y(\xi, \tau_j) = \int_0^1 G(s, \tau_j)\delta(s - v\tau_j)ds = G(\xi, v\tau_j).$$

Отсюда аналитическое решение задачи (1) – (3) $w(\xi, \tau) = y(\xi, \tau)\sin(\omega_0\tau)$.

На основе выше приведённого алгоритма составлена программа на языке Matlab. Результаты проделанных расчётов приведены в таблице 1 и таблице 2.

Таблица 4: Осредненные значения абсолютной погрешности параметру метода m.

m	1	2	3	4	5	6
E	$9.263E-05$	$2.235E-06$	$1.142E-06$	$3.636E-07$	$3.636E-07$	$3.636E-07$

Таблица 5: Значения средней абсолютной погрешности метода.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
E	$0.000E+00$	$5.278E-08$	$4.088E-07$	$3.071E-07$	$7.154E-07$	$5.271E-07$
x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	Средние
E	$6.925E-07$	$5.013E-07$	$3.088E-07$	$2.172E-07$	$2.685E-07$	$3.636E-07$

Исходя из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- в процессе расчётов определён оптимальное значение параметра метода квадратурных формул с производными (m = 4);

- получено аналитическое решение с помощью функции Грина;

- получена функция Грина в символьном виде, которая используется для решения интегрального уравнения;

- получено высокого порядка точности приближенное решение, которого доказывают значения абсолютной погрешности;

- возможность рассматривать другой модели, т.е. другие граничные условия необходимо учесть в построения функцию Грина.

Предложенный метод может быть обобщён для решения более сложных задач балок Эйлера - Бернулли.

Литература

1. **Timoshenko S. P.** *Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail* / in "Proc. 2nd Int. Congr. for Appl.Mech."Zurich., - 1927. - pp. 407 - 418.

2. **Курбацкий Е.Н., Зернов И.И., Бадьина Е.С.** *Применение обобщённых функций и интегрального преобразования Фурье при моделировании воздействия подвижной нагрузки на балку, лежащую на упругом основании.* Интернет-журнал «Транспортные сооружения», 2023, Том 10, № 3.

3. **Калашников А. Л.** *Методы приближенного решения интегральных уравнений второго рода.* Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2017, 51с.
4. **Shadimetov Kh. M., Usmanov Kh. I.** *Weighted optimal quadrature formulas in Sobolev space and their applications.* Algoritms 2025, 18, 374. https:/doi.org/1030/a18070374.

УДК 532.546

Численный анализ задач и об аномальной фильтрации жидкости в неоднородной среде

Хужаёров Б.Х.[1,2], Туйгунов Ж.Р.[3]
[1]Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова; [2]Институт математики имени В.И.Романовского, Академия наук, Ташкент, Узбекистана;
b.khuzhayorov@mail.ru
[3]Самаркандский государственный университет архитектуры и строительства им. М. Улугбека;
tuygunovjavlonbek@mail.ru

Исследование процесса аномальной фильтрации в кусочно-неоднородных пористых средах является одной из актуальных задач. В таких средах из-за различий в свойствах различных слоёв, пористости и проницаемости, сложность поля потока и распределения вещества, аномальные явления фильтрации становятся ещё более очевидными [1, 2].

В данной работе рассмотрена аномальная фильтрация жидкости в кусочнонеоднородной пористой среде. Задача была численно решена путем аппроксимации производных дробного порядка. Определены поля давления, профили давления и скорости фильтрации для различных значений коэффициентов проницаемости и производных дробного порядка в различные моменты времени. Оценена роль влияния α на эти свойства.

Закон Дарси с учетом аномальности записываем в виде [3]

$$v = -\frac{k_f(x)}{\mu}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right), \tag{1}$$

где v - скорость фильтрации, $k_f(x)$-фрактальная кусочно-неоднородная проницаемость, p - давление, t - время, β^* - коэффициент упругоемкости среды, μ - динамический коэффициент вязкости, $\alpha(0 \le \alpha < 1)$ - порядок производной.

Уравнение фильтрации в одномерном случае имеет вид

$$\mu\beta^*\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_f(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}\right)\right). \tag{2}$$

Пусть отрезок $[0, L_1]$ состоит из трех частей, которых назовем зонами $[0, L_1/3]$, $[L_1/3, 2L_1/3]$,
$[2L_1/3, L]$. В каждой зоне проницаемость $k_f(x)$ описывается различными функциями $k_{f_1}(x)$, $k_{f_2}(x)$, $k_{f_3}(x)$, соответственно. В точках $L_1/3$, $2L_1/3$ проницаемость в общем случае имеет разрывы первого рода. Такая среда представляет собой кусочнонеоднородную среду.

Начальное условие принимаем в виде:

$$p(0, x) = p_0 = \text{ const }. \tag{3}$$

Граничные условия следующие:

$$p(t,0)=p_c, \quad p\,(t,L_1)=0, \qquad p_c=\ \text{const}\ . \tag{4}$$

В точках разрыва проницаемости давление и скорость фильтрации являются непрерывными. Соответственно, принимаются следующие условия

$$p(t,x)|_{x=L_1/3^{-0}}=p(t,x)|_{x=L_1/3^{+0}} \tag{5}$$

$$p(t,x)|_{x=2L_1/3^{-0}}=p(t,x)|_{x=2L_1/3^{+0}} \tag{6}$$

$$\frac{k_{f_1}}{\mu}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Big|_{x=\frac{L_1}{3}-0}=\frac{k_{f_2}}{\mu}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Big|_{x=\frac{L_1}{3}+0} \tag{7}$$

$$\frac{k_{f_2}}{\mu}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Big|_{x=\frac{2L_1}{3}-0}=\frac{k_{f_3}}{\mu}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\Big|_{x=\frac{2L_1}{3}+0}. \tag{8}$$

Проницаемость среды принимаем в виде

$$k_f(x)=\begin{cases} k_{f_1}=k_0(1+x), x\in\left[0,\frac{L_1}{3}\right], \\ k_{f_2}=-\frac{3}{L_1}x^2+2x+2, x\in\left[\frac{L_1}{3},\frac{2L_1}{3}\right], \\ k_{f_3}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{x}}{\sqrt{L_1}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\frac{3\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \quad x\in\left[\frac{2L_1}{3},L_1\right]. \end{cases}$$

Задача (3) - (5) численно решена и проанализировано влияние α на распределение давления и скорости фильтрации в пласте.

Некоторые результаты для давления и скорости фильтрации для двух значений α приведены на рис.1-2.

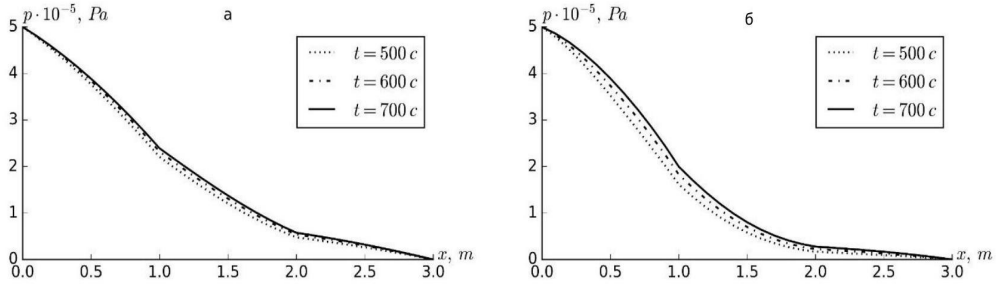


Рис.1. Профили давления $\alpha=0$(а), 0,15(б).

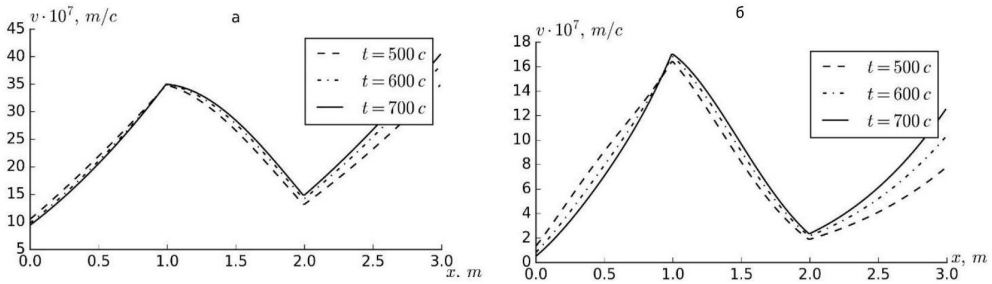


Рис.2. Профили скорости фильтрации при $\alpha=0$(а), 0,15(б).

Как видно из графиков, валяние α в различных зонах изменения $k_f(x)$ проявляется различным образом. В первой зоне $[0,L_1/3]$ отмечается незначительное увеличение давления при увеличении α. Во второй и третьей зонах, наоборот, с увлечением α значения давления уменьшаются. В целом, в этих зонах влияние α характеризуется запаздывающей динамикой давления.

Литература

1. **Hossain M. E., Mousavizadegan S. H., Ketata C., Islam M. R.** *A novel memory based stress-strain model for reservoir characterization.* Journal of Nature Science and Sustainable Technology - 2007. 1(4).- 565-593 c.
2. **Хужаёров Б.Х., Акрамов Ш.Б.** *Задача аномальной фильтрации с заданным граничным потоком в одномерном пласте.* Журнал: Механика муаммолари. - Ташкент: Фан. -2024. №4. - 29-36 с.
3. **Caputo M.** *Diffusion of fluids in porous media with memory.* Geothermics. -1999. 28. -113-130 c.

УДК 519.644

Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления быстроосциллирующих интегралов

Шадиметов Х.М.[1,2], Гуломов О.Х.[2,3]

[1]Ташкентский государственный университет транспорта, Ташкент, Узбекистан; kholmatshadimetov@mail.ru

[2]Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;

[3]Национальный исследовательский университет Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан; otabek10@mail.ru

В настоящей работе мы будем заниматься построением оптимальных квадратурных формул для быстроосцилирующих интегралов

$$I(\varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)\,dx$$

В пространстве периодических комплекснозначных функций.

Пусть $\widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$ - пространство Соболева классов периодических комплекснозначных функций. Пространство $\widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$ становится гильбертовым, если на нём ввести скалярное произведение

$$(\varphi,\psi) = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\,\overline{\psi^{(m)}}(x)\,dx.$$

Норма функций $\varphi(x)$ в этом пространстве определяется равенством

$$\left\|\varphi\left|\widetilde{L_2^{(m)}}\right.\right\| = \left(\int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\,\overline{\varphi^{(m)}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

здесь $\overline{\varphi}(x)$ - сопряженная функция к функции $\varphi(x)$.

Рассмотрим для функции из пространство $\widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$ следующую квадратурную формулу с равноотстоящими узлами

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k\varphi(hk), \tag{1}$$

где C_k коэффициенты квадратурной формулы, $N = 2, 3, ...;\ \omega \in \mathbb{Z}$ множество целых чисел, $h = \frac{1}{N}$.

Задача о построении квадратурной формулы в периодическом случае - это то же самое, что и задача о приближении функционала, равного функции $\exp(2\pi i\omega x)$ в области интегрирования с помощью линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^{N} C_k\phi_0(x - hk),$$

где

$$\phi_0(x - hk) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - hk - \beta)$$

В этом случае функционал погрешности квадратурной формулы записывается как

$$l(x) = \exp(2\pi i\omega x) - \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - hk - \beta) \tag{2}$$

где $\delta(x)$- дельта функция Дирака.

Погрешность квадратурной формулы (1) через функционал погрешности (2) задается в виде

$$(l(x), \varphi(x)) = \int_0^1 \exp(2\pi i\omega x)\varphi(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} C_k\varphi(hk) =$$

$$= \int_0^1 \left[\exp(2\pi i\omega x) - \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - hk - \beta)\right]\varphi(x)\,dx$$

Предположим, что $l(x) \in \widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$. Это означает, в частности, что

$$(l(x), 1) = \int_0^1 l(x)dx = 0 \tag{3}$$

Задача о построении оптимальной квадратурной формулы вида (1) в пространстве Соболева - периодических функций заключается в следующем. Требуется найти величину

$$\left\| l \left| \widetilde{L_2^{(m)}} \right. \right\| = \inf_{C_k} \left[\sup_{\varphi \in \widetilde{L_2^{(m)}}} \frac{|(l, \varphi)|}{\left\| \varphi \left| \widetilde{L_2^{(m)}} \right. \right\|} \right],$$

т.е. функцию $\psi_l(x) \in \widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$ для которой достигается точная верхняя грань, а также коэффициенты $\overset{o}{C}_k$ - для которых достигается точная нижняя грань. При этом функция $\psi_l(x)$ будет экстремальной функцией функционала $l(x)$, $\overset{o}{C}_k$ - оптимальные коэффициенты квадратурной формулы, а $\left\| l \left| \widetilde{L_2^{(m)*}} \right. \right\|$ - нормой функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы. В этой работе доказана следующая теорема

Теорема. *Среди квадратурных формул вида (1), где N заданное натуральное число, формула*

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{N} \overset{o}{C}_k\ \varphi(h\beta)$$

Определяемая узлами и оптимальными коэффициентами $x_\beta = h\beta,\ k = 1,2,...,N,\ h = \frac{1}{N},\ N = 2,3,...$

$$\overset{o}{C}_k = h\left(\frac{\sin(\pi\omega h)}{\pi\omega h}\right)^{2m} \frac{(2m-1)!e^{2\pi i\omega kh}}{2\sum\limits_{n=0}^{m-2} a_n^{(2m-2)}\cos(2\pi(m-1-n)\omega h) + a_{m-1}^{(2m-3)}}$$

является единственной оптимальной в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$- периодических функций.

УДК 519.644

Квадрат нормы функционала погрешности составных оптимальных квадратурных формул

Шадиметов Х. М.[1,2,a], Маматова Н. Х.[3,b]
[1]Ташкентский Государственный Транспортный Университет, Ташкент, Узбекистан;
[2]Институт математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан;
[3]Бухарский Государственный Университет, Бухара, Узбекистан;
[a]kholmatshadimetov@mail.ru; [b]nilufar.mamatova.76@mail.ru

Составной квадратурной формулой называется приближенная формула, выражающая значение интеграла в виде линейной комбинации значений подынтегральной функций и ее производных в точках, называемых узлами:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{t} C_k^{(\alpha)}\varphi^{(\alpha)}(x_k), \tag{1}$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{[0,1]}(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{t} C_k^{(\alpha)}\varphi^{(\alpha)}(x_k),$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$—индикатор (или характеристическая функция) отрезка $[0,1]$, $t \le m-1$. Узлы x_k называют узлами квадратурной формулы, а числа $C_1^{(\alpha)}, C_2^{(\alpha)}, ..., C_N^{(\alpha)}$— ее коэффициентами, $\varphi(x) \in \widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$.

Напомним, что функция $f(x)$ называется 1-периодической, если для любого целого $\beta \in \mathbf{Z}$ и всех x выполняется $f(x) = f(x+\beta)$. Приводим определения 1- периодичского пространство Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$.

Пространство $\widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$ при $m \geq 1$– гильбертово пространство 1- периодичсках функций $f(x), -\infty < x < \infty$, отличающихся более, чем на константу, m—е производные(в обобщенном смысле) квадратично интегрируемы со скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_0^1 \frac{d^m f}{dx^m}\frac{d^m g}{dx^m}dx.$$

Норма в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$ определяется формулой

$$\|\varphi|\widetilde{L_2^{(m)}}\|^2 = \int\limits_0^1 \left(\frac{d^m}{dx^m}\varphi(x)\right)^2 dx.$$

Погрешностью квадратурной формулы называют разность

$$(\ell,\varphi) = \int\limits_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{t} C_k^{(\alpha)}\varphi^{(\alpha)}(x_k) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{t} C_k^{(\alpha)}(-1)^\alpha\delta^{(\alpha)}(x-x_k)\right) * \phi_0(x)\right]\varphi(x)dx$$

где $\delta(x)$— дельта функция Дирака, $\phi_0(x) = \sum\limits_{\beta}\delta(x-\beta)$,

$$\ell(x) = \left(\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{k=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{t} C_k^{(\alpha)}(-1)^\alpha\delta^{(\alpha)}(x-x_k)\right) * \phi_0(x). \tag{2}$$

В настоящей работе результаты интегрированию периодических функций полученных функциональными методами из [1,2] обобщаются на случай составных квадратурных формул. Для квадрат нормы функционала погрешности (2) оптимальных квадратурных формул справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Квадрат нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул вида (1) при $t = 0,1$ имеет вид*

$$\|\mathring{\ell}|\widetilde{L_2^{(m)*}}(0,1)\|^2 = \frac{h^{2m}|B_{2m}|}{(2m)!}.$$

Теорема 2. *Квадрат нормы функционала погрешности составных квадратурных формул вида (1) при $t = 2$ имеет вид*

$$\|\mathring{\ell}|\widetilde{L_2^{(m)*}}(0,1)\|^2 = \frac{h^{2m}}{(2m)!}\left(|B_{2m}| - \frac{|B_{2m-2}|^2}{|B_{2m-4}|}\frac{(2m-1)2m}{(2m-2)(2m-3)}\right).$$

Литература

1. **Соболев С.Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука. - 1974. - 808 с.
2. **Shadimetov Kh.M., Mamatova N.H.** Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 2, pp. 839–850.

УДК 519.644

Квадрат нормы функционала погрешности весовых квадратурных формул в пространстве Соболева

Шадиметов Х.М., Турсунмурадов С.Т.
Ташкентский Государственный Транспортный Университет, Ташкент, Узбекистан;
kholmatshadimetov@mail.ru

Рассмотрим квадратурные формулы вида

$$\int_0^1 p(x)\,\varphi(x) \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\,\varphi[\beta], \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)\,p(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\,\delta(x-h\beta), \tag{2}$$

здесь $p(x)-$ весовая функция. Требуется, чтобы интеграл от этой функции существовал в каком то смысле, т.е. $\int\limits_0^1 p(x)\,dx < \infty$, $\varphi(x) \in H_2^{(m)}(0,1)-$ пространство Соболева комплекснозначных функций со скалярным произведением и нормой, соответственно

$$(\psi,\varphi)_{H_2^{(m)}} = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{\omega^{2k}} \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k}\overline{\psi}(x)\,\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)dx, \tag{3}$$

$$\|\varphi\|_{H_2^{(m)}} = \left(\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{\omega^{2k}} \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k}\overline{\varphi}(x)\,\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ и $\omega \neq 0$, $\overline{\psi}(x)$ сопряженная функция к функции $\psi(x)$, $C[\beta]$, $\beta = 0,1,...,N$ коэффициенты квадратурной формулы (1), $\varepsilon_{[0,1]}(x)$-характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$-дельта функция Дирака, $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$, $[\beta] = h\beta$, $h = \frac{1}{N}$, $N = 1,2,...$.

Следующая разность

$$(\ell_N,\varphi) = \int_0^1 p(x)\,\varphi(x)\,dx - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\,\varphi[\beta] = \int_R \ell_N(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{5}$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1).

Из неравенства Коши–Шварца

$$|(\ell_N, \varphi)| \le \left\|\ell_N|H_2^{(m)*}\right\| \cdot \left\|\varphi|H_2^{(m)}\right\|$$

видно, что абсолютное значение погрешности квадратурной формулы (1) оценивается с помощью нормы

$$\left\|\ell_N|H_2^{(m)*}\right\| = \sup_{\varphi,\ \|\varphi\|\neq 0} \frac{|(\ell_N, \varphi)|}{\left\|\varphi|H_2^{(m)}\right\|} \tag{6}$$

функционала погрешности (2) в сопряжённом пространстве $H_2^{(m)*}$.

Отсюда следует, что оценка погрешности квадратурной формулы (1) на комплекснозначных функциях пространства Соболева $H_2^{(m)}(0,1)$ сводится к нахождению нормы функционала погрешности (2) в сопряжённом пространстве $H_2^{(m)*}(0,1)$.

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности $\ell_N(x)$ квадратурных формул в пространстве $H_2^{(m)*}(0,1)$ используется так называемая экстремальная функция данного функционала [1,2].

Определение (С.Л. Соболев) функция $\psi_{\ell,H}(x) \in H_2^{(m)}(0,1)$ называется экстремальной функцией данного функционала $\ell_N(x)$, если выполняется

$$(\ell, \psi_{\ell,H}(x)) = \left\|\ell_N|H_2^{(m)*}\right\| \cdot \left\|\psi_{\ell,H}|H_2^{(m)}\right\|. \tag{9}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *В пространстве Соболева $H_2^{(m)}(0,1)$ экстремальная функция функционала погрешности $\ell_N(x)$ задается формулой*

$$\psi_{\ell,H}(x) = \ell_N(x) * \varepsilon_m(x) = \int_0^1 \overline{p}(y)\,\varepsilon_m(x-y)\,dy - \sum_{\beta=0}^{N} \overline{C}[\beta]\,\varepsilon_m(x-h\beta), \tag{10}$$

где

$$\varepsilon_{m,\omega}(x) = \frac{\omega e^{-\omega|x|}}{2^{2m-1}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m-k-2)!(2\omega)^k|x|^k}{k!\,(2m-k-1)!}. \tag{11}$$

$\overline{\ell}_N(x)$ - сопряженный функционал к функционалу $\ell_N(x)$, $\overline{p}(y)$ - сопряжённая функция к функции $p(y)$, $\overline{C}[\beta]$ - сопряжённый коэффициент к $C[\beta]$.

УДК 519.622

Дискретный аналог дифференциального оператора второго порядка с переменными коэффициентами

Шадиметов Х. М.[1,2], Эсанов Ш. Э.[3]

[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;

[2]Институт математики им. В.И.Романовского , Ташкент, Узбекистан;

[3]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;

kholmatshadimetov@mail.ru, esanovsher@mail.ru.

Дискретные аналоги дифференциальных операторов играют важную роль при построении оптимальных кубатурных, квадратурных, интерполяционных и разностных формул

в различных функциональных пространствах. Впервые построением дискретного аналога полигармонического оператора занимался С.Л. Соболев [1].

Нетрудно проверить, что функция

$$\mu(x) = \frac{e^{-|x|}}{4}(|x| - 1)$$

является фундаментальным решением следующего дифференциального оператора

$$L(x) = \frac{d^2}{dx^2} + 2\text{sign}x\frac{d}{dx} + 1,$$

т.е. является решением уравнения

$$L(x)\mu(x) = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

В этой работе мы будем построит дискретный аналог оператора L.

Этот дискретный оператор $L_h[\beta]$ является решением уравнения

$$L_h[\beta] * \mu_h[\beta] = \delta[\beta]. \tag{1}$$

Здесь свёртка определяется в виде

$$L_h[\beta] * \mu_h[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} L_h[\gamma] \cdot \mu_h[\beta - \gamma],$$

где

$$\mu_h[\beta] = \frac{e^{-|h\beta|}}{4}(|h\beta| - 1), \tag{2}$$

$\delta[\beta]$ - дискретная дельта-функция. Эта функция равна единице при $\beta = 0$, а в остальных целых β она равна нулю.

Справидлива следующая теорема.

Теорема. *Дискретный аналог $L_h[\beta]$ дифференциального оператора*

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + 2\text{sign}x\frac{d}{dx} + 1$$

определяются формулами (3)-(5).

$$L_h[0] = \frac{4a_2}{a_1^2} - 8\cosh(h) + \frac{B_{1,1}}{\lambda_1}, \tag{3}$$

$$L_h[1] = L_h[-1] = \frac{2}{a_1} + B_{1,1}, \tag{4}$$

$$L_h[\beta] = B_{1,1}\lambda_1^{|\beta|-1}, \ |\beta| \geq 2. \tag{5}$$

Здесь

$$a_1 = h\cosh(h) + \sinh(h),$$

$$a_2 = h + \cosh(h)\sinh(h),$$

$$B_{1,1} = \frac{2\left(\lambda_1^2 - 2\cosh(h) + 1\right)^2}{a_1\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$\lambda_1 = \frac{h + \sinh(h)\left(\cosh(h) - \sqrt{\sinh^2(h) - h^2}\right)}{h\cosh(h) - \sinh(h)}.$$

Литература

1. **Соболев С.Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука. - 1974. - 808 с.

УДК 519.644

Экстремальная функция периодического функционала погрешности быстроосцилирующих квадратурных формул

Шадиметов Х.М.[1,2] , Элмуратов Г. [1]
[1]Ташкентский государственный транспортний университет, Ташкент, Узбекистан;
[2]Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан;
kholmatshadimetov@mail.ru

Интегралы быстроосцилирующих функций появляются в основном в теории специальных функций и анализе Фурье, но также и в других прикладных и вычислительных науках и технике, например, в теоритической физике (в частности, в теории рассеяния), акустическом рассеянии, квантовой химии, теории процессов переноса. Например, в последнее время весьма привлекательной задачей является численное решение интегрального уравнения Вольтерра второго (или первого) рода с сильно осцилирующим ядром.

Как известно, приближительное вычисление быстроосцилирующих интегралов

$$I_\omega = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\omega x} f(x)dx, \tag{1}$$

где ω произвольное действительное число, играющего важную роль в вычислительной математике, наталкавается на определенные трудности при больщих значениях ω из-за того, что подинтегральная функция сильно осциллирует.

Пусть $\tilde{H}_m(0,2\pi)$ - гильбертого пространства 2π-периодических, комплекснозначных функций f, отличающихся друг от друга на константу, m-е производные которых (в обобщенным мысле) квадратично интегрируемы со скалярным произведениям

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} \frac{d^m f(x)}{dx^m} \frac{d^m g(x)}{dx^m} dx. \tag{2}$$

Для $f(x) \in \tilde{H}_m$ рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\omega x} f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k f(\frac{2\pi k}{N}), \tag{3}$$

где C_k – коэффициенты квадратурный формулы, $N = 2, 3, \ldots$.

Погрешностью быстроосцилирующей квадратурной формулы (3) задаётся в следующим виде

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\omega x} f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} C_k f(\frac{2\pi k}{N}) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\mathrm{e}^{i\omega x} - \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi\beta) \right] f(x)dx = (l(x), f(x)). \tag{4}$$

Здесь, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака и

$$\ell(x) = \mathrm{e}^{i\omega x} - \sum_{k=1}^{N} C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi\beta) \tag{5}$$

-периодический функционал погрещности быстроосцилирующих квадратурных формул.

Задача о построении оптимальной квадратурной формулы для интеграла (1) заключается в следующем.

Требуются решить следующих задач.

Задача 1. Вычислить норму функционала погрешности быстроосцилирующих квадратурных формул.

Задача 2. Найти минимум нормы функционала погрешности быстроосцилирующих квадратурных формул.

Известно, что в [1] квадрат нормы функционала погрешности квадратурных формул определяется формулой

$$\|\ell|H_m^*\|^2 = (\ell, U_\ell).$$

Здесь $U_\ell(x)$ – экстремальная функция функционала погрешности квадратурных формул.

В настоящей работе найдена экстремальная функция функционала погрешности (5).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Экстремальная функция периодического функсионала погрешности $\ell(x)$ быстроосцилирующей квадратурной формулы вида (3) в пространстве $\tilde{H}_m(0, 2\pi)$ имеет вид*

$$U_\ell(x) = \frac{e^{-i\omega x}}{\omega^{2m}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\bar{C}_k}{2\pi} \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{i\beta(x-\frac{2\pi k}{N})}}{\beta^{2m}} + \nu.$$

Здесь $\bar{C}_k$ сопряженное число к C_k, ν – некоторая постоянная.

УДК 519.644

Оптимальные квадратурные формулы для быстроосцилирующих интегралов

Шадиметов Х. М. [1,2], **Уринбоев Р.** [2]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
e–mail: kholmatshadimetov@mail.ru

Вариационным методом рассмотрим задачу об оптимальном вычислении весовой быстроосциллирующих интегралов.

Вычисление интеграла

$$I_{p,\alpha} = \int_0^1 x^\alpha e^{2\pi i p x} f(x) dx \tag{1}$$

или его многомерного аналога играет важную роль в вычислительной математике. Хорошо известно, что численное вычисление таких интегралов наталкивается на определенные трудности при больших значениях p из за того, что подинтегральная функция сильно осциллирует.

Вычисление интеграла (1) при $\alpha = 0$ часто выполняется методом Файлона. Метод Файлона напоминает квадратурную формулу Симпсона. Однако в то время, как в методе Симпсона вся подинтегральная функция заменяется параболой, в методе Файлона параболой заменяется только функция $f(x)$. Таким образом Файлон получил квадратурную формулу с коэффициентами, зависящими от p.

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 x^\alpha e^{2\pi ipx}\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi[\beta],$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = x^\alpha e^{2\pi ipx}\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x-h\beta),$$

где $\alpha \geq 0$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$-характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $C[\beta]$-коэффициенты квадратурной формулы, $\delta(x)$ - дельта функция Дирака.

Пусть $H^{(m)}(0,1)$ — гильбертово пространство комплекснозначных функций $\varphi(x)$, m-е производные которых (в обобщенном смысле) квадратично интегрируемы со скалярным произведением

$$(f,g)_m = \int_0^1 f^{(m)}(x)\,\overline{g^{(m)}}(x)\,dx.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. В пространстве $H^{(m)}(0,1)$ следующая квадратурная формула является оптимальной

$$\int_0^1 x^\alpha e^{2\pi ipx}\,\varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} \mathring{C}[\beta]\varphi(\beta).$$

При этом оптимальные коэффициенты $\mathring{C}[\beta]$ задаются формулой

$$\mathring{C}_\beta = \frac{h}{2}\left[2\sum_{n=0}^{\alpha}\frac{(-1)^n\alpha!}{(\alpha-n)!(2\pi i\omega)^{n+1}}\,D_1[\beta] * \left((h\beta)^{\alpha+1-n}e^{2\pi i\omega h\beta}\right)\right.$$
$$\left. - 2\sum_{n=0}^{\alpha}\frac{(-1)^n(\alpha+1)}{(\alpha+1-n)!(2\pi i\omega)^{n+1}}\,D_1[\beta] * \left((h\beta)^{\alpha+1-n}e^{2\pi i\omega h\beta}\right)\right].$$

Здесь $D_1[\beta]$ — дискретный аналог дифференциального оператора второго порядка:

$$D_1[\beta] = \begin{cases} 0, & \text{при } |\beta| \geq 2, \\ h^{-2}, & \text{при } |\beta| = 1, \\ -2h^{-2}, & \text{при } \beta = 0. \end{cases}$$

6 – SHO‘BA.MATEMATIKA VA INFORMATIKA O‘QITISH METODIKASI.

СЕКЦИЯ 6. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 515.55

Topologiya kursini o‘qitishda interfaol metodlardan foydalanishning haftalik dars rejasi

Akmurzayeva A. V.[1], Mamatov J. X.[2]
[1]Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, Uzbekistan;
vaziraakmurzayeva446@gmail.com
[2]Jizzax Politexnika instituti, Jizzax, Uzbekistan;
johansson_world@mail.ru

Ushbu ishda topologiya kursini o‘qitishda interfaol metodlardan foydalanishning haftalik dars rejasini tuzish bo‘yicha metodik tavsiyalar asoslab berilgan. Tavsiya qilinayotgan reja 14 haftalik semestr uchun mo‘ljallangan. Har bir hafta: asosiy mavzu + interfaol metod + mustahkamlash usuli kabi rejalashtirilgan.

1-hafta. Topologiya faniga kirish.

Mavzu: To‘plamlar nazariyasidan takrorlash, topologik fazo tushunchasi.

Metod: Muammoli savol - "Nima uchun hozirgi zamonaviy matematikada metrik fazo tushunchasi yetarli emas?"

Amaliyot: Oddiy to‘plamlar ustida turli topologiyalar qurish.

2-hafta. Ochiq va yopiq to‘plamlar.

Mavzu: Ochiqlik aksiomalari, yopiq to‘plamlarning xossalari.

Metod: Flipped classroom - talabalar uyda nazariyani o‘qib keladi, darsda misollar yechadi.

Amaliyot: GeoGebrada ochiq va yopiq to‘plamlarni tasvirlash.

3-hafta. Baza va subbaza

Mavzu: Bazaning ta’rifi, oldbaza orqali topologiya hosil qilish.

Metod: Guruhli ishlash - har bir guruh berilgan to‘plam uchun turli bazalarni topadi.

Amaliyot: 2D va 3D fazolarda ochiq sharlar orqali bazani qurish.

4-hafta. Metrik fazolar va keltirilgan topologiya.

Mavzu: Metrik topologiyalar, keltirilgan topologiya.

Metod: Case-study - Internet tarmog‘i va yo‘l tarmoqlari topologiyasini muhokama qilish.

Amaliyot: Metrika yordamida topologiya hosil qilish bo‘yicha mashqlar.

5-hafta. Bog‘lanishlilik.

Mavzu: Bog‘lanishli fazo, chiziqli bog‘lanishlilik.

Metod: O‘yinlashtirish - "Bog‘lishli bo‘lmagan dunyo"kvesti: berilgan grafik/figuralarni bog‘lanishli yoki bog‘lanishli emasligini tekshirish.

Amaliyot: Myobius yaprog‘i va sfera kabilarda misollar yechish.

6-hafta. Kompaktlik.

Mavzu: Kompakt fazo, Geine-Borel teoremasi.

Metod: Muammoli vaziyat - "Cheksiz chiroqlarni qanday qilib bitta tugma bilan boshqarish mumkin?"(Kompaktlik metaforasi).

Amaliyot: [0,1] kesmada kompaktlikni isbotlash.

7-hafta. Uzluksizlik.

Mavzu: Topologik fazolar orasidagi uzluksiz akslantirishlar.

Metod: Matematik debat - "Uzluksizlik topologik ta'rifda qiyinroqmi yoki $\varepsilon - \delta$ orqali?"
Amaliyot: Oddiy funksiyalarning uzluksizligini topologik usulda tekshirish.
8-hafta. Fartor va Tixonov topologiyalari.
Mavzu: Fartor fazolar, Tixonov topologiyasi.
Metod: Matematik laboratoriya – Klein butilkasi va Torni qog‘oz orqali yasash.
Amaliyot: Dekart ko‘paytma ustida topologiya hosil qilish.
9-hafta. Ajrimlilik aksiomalari (T_1, T_2, T_3...)
Mavzu: Hausdorf fazolari.
Metod: Flipped classroom - talabalar aksiomalarni uyda o‘rganib keladi va ularni taqqoslaydi.
Amaliyot: Turli fazolarni ajramlilik aksiomalariga tekshirish.
10-hafta. To‘plamlarning zichligi va bazaviy xossalar.
Mavzu: Zich to‘plamlar, sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi, Lindelyof sharti.
Metod: Case-study - "Ishonchli tarmoq topologiyasi qanday bo‘lishi kerak?"
Amaliyot: Yevklid fazosida ratsional sonlar zichligini isbotlash.
11-hafta. Gomomorfizmlar va gomeomorfizmlar.
Mavzu: Fazolar orasidagi gomeomorfizm tushunchasi.
Metod: Vizualizatsiya - rezina, ip va qog‘oz orqali obyektlarni cho‘zish va deformatsiya qilish.
Amaliyot: Kvadrat va doira orasida gomeomorfizm mavjudligini tekshirish.
12-hafta. Sanoqlilik aksiomalari va tadbiqlari.
Mavzu: Normal va regulyar fazolar.
Metod: Guruhli ishlash - guruhlar normal bo‘lmagan fazolarni topadi.
Amaliyot: Uryson lemmalarini misollarda qo‘llash.
13-hafta. Topologiyaning amaliy qo‘llanmalari.
Mavzu: Fizika, informatika va biologiyada topologiya.
Metod: Case-study - DNK zanjirining tugun nazariyasi.
Amaliyot: Internet marshrutlash topologiyasini grafiklar orqali modellashtirish.
14-hafta. Umumiy takrorlash va talabalarning ijodiy ishlari.
Mavzu: Butun kurs bo‘yicha umumlashtirish.
Metod: Ijodiy loyiha taqdimoti - talabalar o‘zlari tanlagan topologik obyektni 3D model, prezentatsiya yoki video tarzida himoya qiladi.
Amaliyot: Qisqa viktorina + ochiq muhokama.

Qo‘shimcha tavsiyalar: Har hafta yakunida talabalar "Bugun nimani o‘rgandim?"degan savolga javob yozish. Onlayn platformalar (Moodle, Google Classroom) orqali mini-testlar yechish. 7- va 14-haftalarda "yarim semestr"va "yakuniy interfaol test"o‘tkazish tavsiya etiladi.

Adabiyotlar

1. **Diego Vizcaнno, Victor Vargas, Adriana Huertas** *Teaching of Topology and its Applications in Learning: A Bibliometric Meta-Analysis of the Last Years from the Scopus Database* Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2006, 117.

KO‘PHADLAR UCHUN UMUMLASHGAN BE’ZU TEOREMASI

Allakov I.[1)], Xudoyberdiyev S.[2)], Akromova S.[3)]
[1)]Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston
iallakov@mail.ru
[2),3)]Termiz davlat universiteti, Matematika yo‘nalishi talabalari.

Algebra kursida ko‘phadlarni bo‘lish amali va natijada hosil bo‘ladigan qoldiq masalasi muhim o‘rin egallaydi. Har qanday ko‘phadni $x-a$ ga bo‘lgandagi qoldiqni *Bezu teoremasi* yordamida oson aniqlash mumkin [1]. Ammo bo‘luvchi darajasi ikkinchi darajali bo‘lganda, masalan x^2+bx+c, qoldiq topish ancha murakkablashadi. Ushbu ishda biz aynan shunday holatlar uchun qulay formulani ishlab chiqamiz.

Faraz qilaylik $P(x)$ — darajasi $n \geq 2$ bo‘lgan ko‘phad bo‘lsin. Bu ko‘phadni x^2+bx+c uch hadga bo‘laylik:

$$P(x) = (x^2+bx+c)\,Q(x) + R(x), \tag{1}$$

bu yerda $R(x)$ — qoldiq ko‘phad.

Ko‘phadlar uchun qoldiqli bo‘lish haqidagi teoremaga asosan qoldiqning darajasi bo‘luvchining darajasidan kichik bo‘lishi kerak [2], shuning uchun:

$$R(x) = Ax + B,$$

bu yerda A, B — noma’lum sonlar. Endi biz A va B ni topamiz.

Agar x_1 va x_2 sonlari $x^2+bx+c=0$ tenglamaning ildizlari bo‘lsa, u holda Viyet teoremasiga asosan [3]:

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 \cdot x_2 = c$$

o‘rinli bo‘ladi. (1) ga asosan quyidagi tenglik o‘rinli:

$$P(x_i) = R(x_i), \quad (i = 1, 2),$$

ya’ni:

$$P(x_1) = Ax_1 + B, \quad P(x_2) = Ax_2 + B.$$

Bu ikki tenglikdan A va B ni topamiz:

$$\begin{cases} Ax_1 + B = P(x_1), \\ Ax_2 + B = P(x_2). \end{cases}$$

Sistemadan A va B ni topib

$$A = \frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad B = \frac{x_1P(x_2) - x_2P(x_1)}{x_1 - x_2} \tag{2}$$

ga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, qoldiq ko‘phad

$$R(x) = \frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}\,x + \frac{x_1P(x_2) - x_2P(x_1)}{x_1 - x_2.}$$

ga teng.

Misol. Ko‘phadni $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ ni $x^2 + x + 1$ ga bo‘laylik.

Bu holda $b = 1, c = 1$, demak

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

(2) ga asosan:

$$A = \frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad B = \frac{x_1 P(x_2) - x_2 P(x_1)}{x_1 - x_2}.$$

Bundan $A = 2$, $B = 4$ kelib chiqadi. Demak, qoldiq: $R(x) = 2x + 4$ va

$$P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) + 2x + 4$$

tenglik bajariladi.

Adabiyotlar ro‘yxati

1. **Allakov I.** *Algebra I (o‘quv qo‘llanma).* Termiz. «Surxon-Nashr» nashriyoti 2024. 332 b.
2. **Ayupov Sh.A., Xudoyberdiyev A.X., Omirov B.** *Algebra (darslik)* Fizika, matematika va informatika. 2003, №3, 25-33 b.
3. **Allakov I.** *Sonlar nazariyasidan misol va masalalar (yechimlari bilan).* Termiz. «Surxon-Nashr» nashriyoti 2020.
4. **Erdonov B.X.** *Ba’zi murakkab sonlarning bo‘linish belgilari va mavjud bo‘linish belgilariga yangicha yondashuv.* NamDU ilmiy axborotnomasi. 2023. №12, 509-513 b.

RAQAMLI TEXNOLOGIYA MUHITIDA INTEGRATIV YONDASHUV VOSITASIDA O‘QITISH METODIKASINI TAKOMILLASHTIRISH

Avliyoqulov A. A.[1]
[1]Termiz davlat universiteti, Termiz, Uzbekistan;
avliyoqulov 2017@gmail.com

O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh. Mirziyoyev o‘z asarlarida ta’kidlaganlaridek: - "Bizning navqiron avlodimiz manfaatlarini ta’minlash borasidagi faoliyatimiz yaqinda qabul qilingan "Yoshlarga oid davlat siyosati to‘g‘risida"gi Qonun asosida qat’iy davom ettiriladi"[1; 26]. Zero, kelajak har tomonlama bilimdon, zukko va salohiyatli yoshlar qo‘lida. Mustaqil va ijodiy fikrlaydigan, intellektual jihatdan rivojlangan, o‘z dunyoqarashiga ega bo‘lgan yoshlarni tarbiyalash har doimgidek dolzarb bo‘lib qolmoqda. Mamlakatimizda raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuv asosida o‘qitishda tarixiy materiallardan, rivoyat va xalq maqollaridan suhbat asosida misollar keltirib dars mashg‘ulotlarini olib borish o‘quvchilarni aniq va tabiiy hamda ijtimoiy fanlariga bo‘lgan qiziqishlari ortishiga zamin yaratadi. Shunday vazifalardan biri raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni o‘qitishda integratsiyalashgan darslarni tashkil etish yangi bir vaqtning o‘zida bir fanni bir necha fan bilan bog‘lagan holda yanada sermazmun dars o‘tish metodikasini tashkil qilishni takomillashtirish iboratdir. Umumta’lim maktablarida raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni o‘qitish samaradorligini oshirish bugungi kunning asosiy muammolaridan biri bo‘lib kelmoqda. Integratsiyalashgan metodlardan foydalanish orqali bir qancha yutuqlarga erishish bilan bir qatorda, kamchiliklarga yo‘l qo‘yish ehtimoli yo‘q emas. "Agar o‘quvchilarning psixologik va aqliy imkoniyatini hisobga olmasak, uning uchun murakkab terminlardan foydalansak, o‘quvchi saviyasi doirasidan chetga chiqsak, unda aqliy zo‘riqish, mavzuni umuman tushunmaslik oqibatlariga olib keladi"[2; 65-b.]. Raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni o‘qitishda integrativ yondashuv asosida tashkil etishning shakli va mazmunidan kelib chiqib fanning xususiyatini hisobga olgan holda o‘quvchilarga bilim berish tavsiya etiladi. "Integrativ ta’lim oddiydan murakkabga, bilishdan-ilmga, tartibsizlikdan-uyg‘unlikka, chanqoqlikdan mohirlikka va ijodga bo‘lgan harakatni taklif

qiladi"[3; 69-b.]. Raqamli texnologiyalar muhitida fanlarni integrativ yondashuv asosida tashkil etish boshqa fanlar doirasida o‘zlashtirish o‘quvchilar uchun qiyinchilik tug‘dirmaydi va ularni bilim darajasini to‘ldirishga yordam beradi. Biz yuqorida keltirgan integrativ yondashuv vositalaridan ta’lim jarayonida foydalanish yuqori samara beradi.

Raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni o‘qitishda integrativ yondashuv metodikasining quyidagi konseptual metodik asoslari mavjud:

- raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni o‘qitishda so‘nggi zamonaviy pedagogik texnologiyalardan foydalanish va ilg‘or xorijiy tajribalarni o‘zlashtirish;

- o‘quvchilarga raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuv metodikasi mazmuni, tarkibi va asosiy muammolari bo‘yicha ma’lumotlar berish hamda ularni mazkur fanda kompetensiyalarini oshirishga ko‘maklashish;

- ta’lim-tarbiya jarayonida fanning mazmuni, funksiyalari, tarkibiy qismlarini yoritish va ulardan foydalanish mahoratini takomillashtirish.

Umumta’lim maktablarida raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuv asosida o‘qitish metodikasida o‘quvchilar bilim va kompitentligiga qo‘yiladigan talablar quyidagilardan iborat:

- yangi innovatsion va pedagogik texnologiyalarni xalqaro qiyosiy tahlili asosida o‘qitish hamda raqamli texnologiyalar vositasida fanlar sohasiga oid yangi konsepsiyalar va o‘quv adabiyotlarni tahlil qilish;

- raqamli texnologiyalar vositasida fanlardagi yangi tendesiyalarni mashg‘ulotlarda o‘quvchilarga tushuntirib bera olish hamda raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni tizimlashtirish, aniq, tushunarli ravishda bayon etish;

- modulli yondashuv asosida o‘quv jarayonini tashkil etish hamda raqamli texnologik yondashuv asosida ta’lim va tarbiya jarayonini boshqarish lozim. Raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni umumiy o‘rta ta’lim maktablarida o‘qitish metodikasida quyidagi shakllardan foydalanildi:

- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan masala yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosa chiqarish);

- bahs va munozaralar (misol va masalalar yechimi bo‘yicha asosli mulohaza yuritish, eshitish va yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

Raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuv asosida o‘qitishdan maqsad - o‘quvchilarning tafakkur va madaniyatini shakllantirish va rivojlantirish bilan birga o‘rganilgan bilimlarni hayotga tadbiq etishga o‘rgatishdan iboratdir. Raqamli texnologiyalar vositasida fanlarning boshqa fanlar bilan uzviy aloqasi quyidagi ikki yo‘l bilan amalga oshiriladi:

-raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuv asosida o‘qitish dasturlarini moslashtirish; boshqa fanlarda raqamli texnologiyalar vositasida fanlar qonuniyatlar metodikasini o‘rganish bilan bog‘liq bo‘lgan materiallardan foydalanish.

Raqamli texnologiyalar deyarli barcha fanlar bilan bog‘liq bo‘lib barcha fanlar uchun asos hisoblanadi. Raqamli texnologiyalar vositasida fanlardan nazariy bilimlarni berish, tegishli tushunchalar, tasdiqlar, isbotlash metodikasini o‘rgatish, olgan nazariy bilimlarini masalalar yechishga tatbiq eta bilish ularda mantiqiy mushohada qilish, fazoviy tasavvur hamda abstrakt tafakkur kabi innovatsion faoliyatining barcha sohalari uchun zarur bo‘lgan qobiliyatni shakllantirishdan iboratdir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. **SH. Mirziyoyev** *Oliy Majlisga Murojaatnomasi* Toshkent shahri. - 2020. - 01. 24.1-2 bet.
2. **Shorustamova D.S.** *Boshlang‘ich ta’lim darslarini integrasiyalashda pedagogik-psixologik*

yondashuv. Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan dissertatsiya. Toshkent. 2014 yil. 98 bet.
3. **Avliyoqulov A** *Umumta'lim maktablarida tabiiy fanlarni integratsiya asosida o'qitishning nazariy asoslari.* "O'zMU xabarlari"jurnali. T. 2025 y. №2. 56 b.

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR ASOSIDA V-VI SINFLARNI INTEGRATIV YONDASHUVLAR ORQALI O'QITISH METODIKASI

Avliyoqulov A. A.[1]
[1]Termiz davlat universiteti, Termiz, Uzbekistan;
avliyoqulov 2017@gmail.com

Respublikamiz umumta'lim maktablarida raqamli texnologiyalar vositasida fanlarning amaliy ahamiyati kundan-kunga ortib bormoqda. Raqamli texnologiyalar vositasida fanlarning integratsiyalashuvi, mantiqi va izchilligi, ularni eng zamonaviy boshqarish tizimini yanada chuqurlashtirish, takomillashtirish va liberlashtirish bo'yicha jiddiy ehtiyojlar sezilmoqda. Yangi-yangi uyg'un fikr-g'oya esa o'quvchilarni raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni puxta o'zlashtirishlarida, kelgusi faoliyatlarida samarali foydalanish hamda ijodiy yondashishni ta'minlashga qaratilgan asosiy vazifalardan biridir.

Raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni o'rganishda o'quvchilar o'zlarining fikr-mulohazalarini aniq, mazmunli tarzda bayon etishga odatlanishlari, yozuvlarni tushunarli va savodli bajarish malakalari shakllanadi. Umumta'lim maktab V-VI sinflarida raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuvlar vositasida o'qitish jarayonida ijobiy natijalarga erishish bilan birga amaliyotda qo'llash muhim vazifalardan biri bo'lib kelmoqda. Fanlararo integratsiya tushunchasi turli pedagogik va o'qitish uslibiyotiga oid boshqa adabiyotlarda turlicha talqin qilinadi. "Ayrim manbalarda fanlararo aloqadorlik texnologiyasi, sinergetik texnologiya, fanlararo integratsiya tarzida bayon qilinadi"[1; 18-b.]. Umumta'lim maktab V-VI sinflarda raqamli texnologiyalar vositasida fanlar darslarini integrativ yondashuv asosida o'qitishni ta'minlash bugungi kunning asosiy muammolaridan biri bo'lib qolmoqda. Bu masala ta'lim tizimida integrativ yondashuv asosida raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni uzviyligini ta'minlash metodikasi muhim ahamiyatga ega. Raqamli texnologiyalar vositasida fanlar turdosh fanlarning poydevori bo'lib hisoblanadi, ular negizida yangi-yangi fan bo'limlari paydo bo'lmoqda, ularni o'zlashtirishda ko'pgina tushunchalar aql, ong bilan idrok etishni talab etmoqda. Shu tariqa, uzviylik asosida tashkil etilgan integrasiya fanlar ta'limi mazmunining asosiy mexanizmi sifatida namoyon bo'ladi. "Ta'lim sohasidagi siyosatni isloh qilishdagi asosiy ustuvor vazifalar raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni o'qitishda integrativ yondashuv asosida tashkil etishning shakli va mazmunidan kelib chiqib fanning xususiyatini hisobga olgan holda o'quvchilarga bilim berish tavsiya etiladi"[2; 4-b.]. Ta'lim har doim komil va yangilanishga mushtoqdir. Shuning uchun, iloji boricha, ta'limning yangi metodikalari ustida izlanishimiz talab etiladi. Chunki, o'quvchilarga ham bir xil qolipdagi darslar yoqmaydi, ularni zeriktiradi. Natijada o'quvchilar darslarni yaxshi o'zlashtira olmaydi. Me'yoridan oshmasligi, o'quvchilarni zeriktirmasligi uchun usullarning turlicha bo'lishi darsning samaradorligini yanada oshiradi. Dars jarayonlarida notiqlik, suhbat, hikoya, mustaqil ish, yozma ish, zamon bilan bog'lash, mustaqil fikrga tayanish shakllariga va integrativ metodlarga yondashgan holda dars o'tishga katta e'tibor berishimiz lozim. Bu esa umumta'lim maktab V-VI sinflarida raqamli texnologiyalar vositasida darslarni ketma-ketlik va boshqa fanlar bilan o'zaro aloqasi hamda ushbu fanning uslubiy jihatdan uzviy va mantiqiy bog'liqlik asosida tashkil etish esa o'quvchilarni keyingi sinflarda bilim olishlari uchun zamin yaratadi. Ta'limdagi integratsiya - bu ta'lim

oluvchilarning bilim darajasini rivojlantirish va o‘z-o‘zini boshqarish dunyodagi yaxlit ko‘rinishini shakllantirish uchun ma’lum bir ta’lim tizimni tarkibiy qismlari o‘rtasida aloqalarni o‘rnatish jarayoni. "Integratsiya ta’limdagi murakkablikni engillashtirishga, tizimlilikka o‘rgatadigan jarayondir"[3; 447-b.]. Umumta’lim maktab V-VI sinflarda raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni o‘qitishda integrativ yondashuv maqsad va mazmunini belgilash jarayonlarini ko‘rib chiqamiz: Maqsadli jarayon - umumta’lim maktab V-VI sinf o‘quvchilariga raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuv metodikasi asosida o‘qitish o‘quvchilarning fanlarga bo‘lgan qiziqishini oshirish, fan darsliklari bilan mustaqil ishlash tajribasini oshirish va olgan bilimlarini amaliyotda qo‘llay olishdan iborat; Metodologik jarayon - umumta’lim maktab V-VI sinf o‘quvchilariga raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuv asosida o‘qitishda o‘quvchilarning kompetensiyalarini shakllantirish va o‘quvchilar subektivlik, tizimlilik, hamkorlik, o‘z-o‘zini nazorat qilish, mustaqillik tamoyillariga ega bo‘lishlaridan iborat; Baholash jarayon - o‘qituvchi tomonidan V-VI sinf o‘quvchilarini raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni motivatsion va kognitiv usulda o‘zlashtirgan bilimlarini yuqori, o‘rta, pastga darajada baholash, sifat va samaradorlik hamda natijadorlikka erishishdan iborat. Tashkiliy-mazmunli jarayon - umumta’lim maktab V-VI sinf o‘quvchilariga raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuv metodikasi asosida o‘qitish. Umumta’lim maktab V-VI sinf o‘quvchilariga raqamli texnologiyalar vositasida fanlarni integrativ yondashuv asosida o‘qitishning modeli metodologik, tashkiliy mazmunli bloklar va monitoring blokini o‘z ichiga oladi. Maqsadli blok o‘quvchilarning o‘quv guruhida moslashuviga pedagogik hamrohlik qilish funksiyasining maqsadi, vazifalari, tamoyillaridan iborat. Mazmunli blok pedagogik ta’sirlarning ichki tuzilishi va yo‘nalishlarini belgilaydi. Mazmunli blokni ajratishda biz tomondan aniqlangan omillarga asoslanildi, bunda hamrohlikni, ularning yanada samarali moslashuv hamda moslashuv jarayonini sekinlashtiradigan yoki unga to‘sqinlik qiladigan omillarning salbiy ta’sirini minimallashtirishga yordam beradigan konstruktiv salohiyatidan foydalanishga yo‘naltirilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. **Amrullayeva B.A.** *VI sinflarda tabiiy fanlar (Sciense)ni o‘qitish metodikasi.* "Afzalzoda books"nashriyoti. Toshkent. 2023 yil. 118 bet.
2. **Avliyoqulov A** *Umumta’lim maktablarida tabiiy fanlarni integratsiya asosida o‘qitishning nazariy asoslari.* "O‘zMU xabarlari"jurnali. T. 2025 y. №2. 56 b.
3. **Avliyoqulov A.** *Umumiy o‘rta ta’lim maktablarida aniq va tabiiy fanlarni o‘qitishda integrativ yondashuvlarning konseptual asoslari.* "Xalq ta’limi"ilmiy-metodik jurnali. Toshkent. 2023 yil. 4-son, 177 bet.

TALABALARNING IJODIY FIKRLASHINI RIVOJLANTIRISHDA GEOMETRIK MASALALARDAN FOYDALANISH USULLARI

Aytuvganov U. X.[1], Saidxonov J. S.[2]
[1] Termez state university, Termez, Uzbekistan
aytuvganovu@mail.ru
[2] Termez state university, Termez, Uzbekistan
jamshidsaidxonov@gmail.com

Zamonaviy ta’lim bitiruvchidan o‘rganilayotgan sohani chuqur bilish va uni mohiyatiga yetishni talab etadi. Tushunchalarning qayerda muhim, qayerda muhim emasligini ulardan kerakli joyda foydalanishni bilishlari kerak. Shunga ko‘ra, psixologik muammo sifatida talabalarning

masala yechish jarayonida ijodiy fikrlashini rivojlantirishni tahlil qilish muammosini keltirib chiqaradi.
Ravshanki, fikrlash bo‘lajak matematika o‘qituvchisi kompetensiyasini shakllantirish faoliyati sifatida qaraladi. Kompetensiyaning shakllanganligi asosida talabani bilim sifati darajasini baholash imkoniyati paydo bo‘ladi.Masalalarni turli usullar yordamida yechish talabalarning ijodiy fikrlashini rivojlantirishda muhim ahamiyatga ega. Agar masala bitta usulda yechilsa talaba boshqa usul haqida fikrlashga o‘rin yo‘q deb o‘ylaydi. Agar masala ikki usulda yechilsa boshqa usuli ham bor yoki yo‘qligini o‘ylab ko‘radi, natijada, ijodiy fikrlash shakllana boshlaydi. Yuqoridagi fikrlash, ijodiy fikrlash tushunchalaridan xulosa qilgan holda quyidagi ta’rifni kiritamiz:
Ta’rif. ***Berilgan masala yechimini topish eshigini ochishga xizmat qiluvchi g‘oyalarga ega bo‘lgan talabalarga ijodiy fikrlaydigan talabalar deyiladi*** [2].
Ijodiy fikr juda ko‘p xususiyatlarga ega: talabalar masalani yechimini topishda zarur bo‘ladigan juda ko‘p faktlarni yodda saqlashlari kerak; matematik til va belgilarni o‘z o‘rnida qo‘llash; masalaga mos chizmani yasash; aniq qoida bo‘yicha teran fikr yuritish; ta’rif va teoremalarni bilish, shuningdek xulosa va natijalarni to‘g‘ri ifodalash. Masalaning yechimini topish talabaning tizimli faoliyati va umumlashtirishdan iborat. Talabalik davri maxsus qobiliyatlarni rivojlantiruvchi, turli vaziyatlarda to‘g‘ri qaror qabul qilish, muhim bo‘lgan ijodiy fikrlashni rivojlantirish uchun samarali davr, buning uchun talabaga har doim ijodiy topshiriqlar berish, taqqoslashga, asosiyisini ajratib olishga, ichki va tashqi bog‘lanishlarni o‘zlashtirishga o‘rgatish zarur. Yuqoridagi fikrni talabalarning ijodiy fikrlashini rivojlantirishga va unda intutsiyani shakllantirishga xizmat qiluvchi yangi g‘oyalarning paydo bo‘lishini aniq misollarda ko‘rib o‘tamiz.

Masala yechish jarayonida talabalarning ijodiy fikrlashini rivojlantirishda quyidagilarga e‘tiborni qaratish maqsadga muvofiq:

1) talabani ijodiy fikrlashga yo‘naltiruvchi planimetriya va stereometriya masalalarini bir tizimga solish; 2) masalani turli metodlar bilan yechish; 3) usul, metod va ijodiy yondashuvlarni aniq masalalarni yechishda qo‘llash. Bular har doim dolzarb va amaliy ahamiyatga ega bo‘lib kelgan.

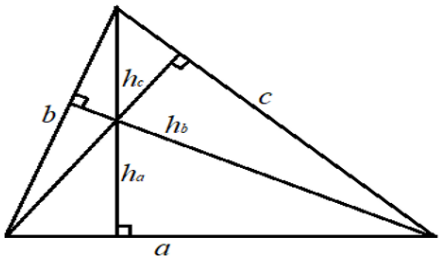
Talabaning ijodiy fikrlashini rivojlantirish jarayoni uchta yondashuvni talab etadi: masalani geometrik yechimi; masalaning algebraik yechimi; masalaning geometrik va algebraik yechimi, ya’ni har ikkala metodning integratsiyasidan foydalaniladi. Qaysi yo‘l tanlanmasin, bu yo‘lining samarali amalga oshirilishi, tabiiyki matematik bilim va uni qo‘llashga bog‘liq.

Matematika o‘qitish metodikasi fani o‘quv jarayonida o‘qituvchi yuqoridagi fikrlarga asoslanib talabalarning ijodiy fikrlashini rivojlantirish maqsadida quyidagicha masalalarni tanlashi mumkin.

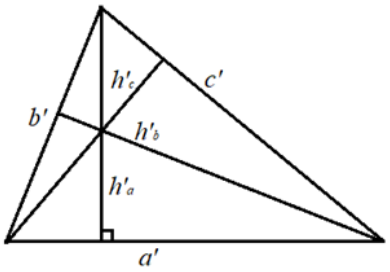
1-Masala. Teng uchburchaklarda mos balandliklar, mos medianalar va mos bissektrisalar tengligi ma’lum. **Ijodiy fikrlash** ta’rifiga ko‘ra masala **strategiyasi** quyidagicha qo‘yilishi mumkin: agar ixtiyoriy uchburchakda mos balandliklar, mos medianalar va mos bissektrisalar teng bo‘lsa u holda berilgan uchburchaklarning tengligini isbotlang.

Isbot. Masala shartiga ko‘ra

$$h_a = h_a^1, \quad h_b = h_b^1, \quad h_c = h_c^1.$$



2.7 rasm



2.8 rasm

Uchburchaklar yuzini topamiz:

$$2S = h_a \cdot a, \quad 2S = h_b \cdot b, \quad 2S = h_c \cdot c \quad \text{va} \quad 2S = h_a^1 \cdot a^1,$$

$$2S = h_b^1 \cdot b^1, \quad 2S = h_c^1 \cdot c^1$$

bundan,

$$a = a^1, \quad b = b^1 \quad \text{va} \quad c = c^1$$

kelib chiqadi. Talabalar bir necha munozaradan so‘ng quyidagi yangi g‘oyani (bilimni) taklif qilaydilar: *ixtiyoriy ikkita uchburchakning teng bo‘lishi uchun mos balandliklarning teng bo‘lishi zarur va etarlidir.*

O‘qituvchi ijodiy fikrlash ta’rifiga ko‘ra masala strategiyasini quyidagicha o‘zgartirishi mumkin: bu masala sharti medianalar uchun bajariladima? Talabalar so‘zsiz ha deb javob beradilar. Chunki, uchta medianaga ko‘ra uchburchak yasash mumkinligi va uni yagona echimga ega ekanligi darsliklarda ko‘rsatilgan [1]. O‘qituvchi masalani murakkablashtirib bissektrisa bo‘lsa-chi? Muammoli vaziyat yuzaga keladi. O‘qituvchi sirkul va chizg‘ich yordamida uchta bissektrisaga ko‘ra uchburchak yasash mumkin emasligi to‘g‘risida fikr bildiradi. Talabalar bir necha usul bilan harakat qiladilar, bissektrisalarning analitik ifodasi yordamida tuzilgan tenglamalar sistemasi echimga ega bo‘lmadi. Bundan, talabalar darhol yangi g‘oyani quyidagicha ifodalaydilar: *ixtiyoriy ikkita uchburchakda mos bissektrisalarning tengligidan uchburchaklarning tengligi kelib chiqmaydi.*

Yuqoridagi mulohazalardan quyidagicha xulosaga kelinadi: *agar biror F figura chiziqli elementlariga ko‘ra yasalsa va yagona echimga ega bo‘lsa, u holda F figuraga teng bo‘lgan boshqa F^1 figura topiladi.*

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Жумаев Э.Э. Развитие творческого мышления учащихся в процессе решения геометрических задач. Диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук по специальности 13.00.02-теория и методика преподавания математики Киев-1997.-162 s.
2. Вигодский Л.С. Психология равития человека. Издательство Эксмо-Москва 2005.-1136 с
3. Aytuvganov U.X. “Talabalarning ijodiy fikrlashini rivojlantirishda geometrik masalalarning o‘rni va roli”. Samarqand davlat universiteti ilmiy axborotnomasi. Samarqand. 2020.2-son (120).-B.140-144.

УДК 513.317.38

O‘QUVCHILARDA MATEMATIK SAVODXONLIKNI SHAKLLANTIRISH MUAMMOLARI VA ULARNI HAL ETISH STRATEGIYALARI

Berdiyeva O. B.
Surxondayo viloyat Pedagogik mahorat markazi,Termiz, O‘zbekiston
Oygul1974@umail.uz

Bugunga kelib matematika o‘qituvchisi ilg‘or xorijiy tajribalarga tayangan holda halqaro ta’lim tizimida fanni o‘qitish va uni rivojlantirish uchun qanday ishlar amalga oshirilayotganini bilishi kerak. Hozir o‘ziga xos vaqt: matematikani o‘qitishning ko‘plab an’anaviy g‘oyalari va amaliyotlari rad etildi va taklif qilinayotgan yangisi sinovdan o‘tkazilmoqda. Shunday ekan, zamonaviy o‘qituvchi hozirda rivojlangan mamlakatlar ta’lim tizimida matematika fanini o‘zlashtirish uchun qanday bilim berilayotganligini bilishi kerak.

Gap shundaki, innovatsion va axborot texnologiyalari rivojlanayotgan asrda Xalqaro matematik ta’limning an’anaviy tizimi yaratildi, uni quyidagi xususiyatlar bilan tavsiflash mumkin:

1) umumiy o‘rta ta’lim maktabida o‘rganilgan mustaqil fanlardan – matematika, algebra, geometriya fanlardan iborat matematika kursi o‘qitiladi. Boshlang‘ich sinflarda matematika fani o‘rtasida uzluksizlik bo‘lmasligi uchun boshlang‘ich maktabda matematika fan sifatida belgilangan. Bu esa umumta’lim maktablarining rasmiy mantiqiy matematikasi;

2) matematika fanini o‘rganish maqsadi soddalashtirildi;

3) matematik g‘oyalarni emas, balki matematik savodxonlikni shakllantirish maqsadida maktabda o‘rganilgan mavzular va tushunchalarni hayotiy misollar orqali o‘zlashtirilishi o‘quvchilarning kasbiy faoliyatni shakllanishida fanni o‘rganish muhim hisoblanadi.

Respublikamizda maktab matematika fanini matematika – fanga yaqinlashtiradigan yangi dasturlar, darsliklar va metodlarni yaratish harakati boshlandi.

Ta’lim sifatini yaxshilash va innovatsion ta’lim texnologiyalarini joriy etish bo‘yicha ilg‘or jahon tajribasiga tayanib, yangi davlat ta’lim standartlari va umumiy o‘rta ta’lim o‘quv dasturlarini, shu jumladan STEAM usulini bosqichma-bosqich joriy etish va takomillashtirish maqsadida maktab o‘quv dasturi va darsliklarida loyiha ishlari kiritildi [1].

Shunday ekan, bugun ushbu tadbirlarni amalga oshirish uchun fan mutaxassislari qay darajada tayyor. Gap shundaki, ta’lim mazmuni qanchalik yangilanmasin yangi dasturlar, standartlar yaratilmasin, ularning samaradorligi va qay darajada o‘quv jarayoniga tadbiq etilishi asosan o‘qituvchilarning bilimi, malakasi, kasbiy mahorati, ijodkorligi, fidoiyligiga bog‘liq bo‘lib qolaveradi. Ta’lim sifati hech qachon o‘qituvchi sifatidan oshib ketmaydi. Mamlakatimizda olib borilayotgan ta’lim islohatlari ta’lim sifatini oshirish va o‘quvchi yoshlarni kelajakda jamiyatga kerakli kadrlar qilib tayyorlash, o‘quvchilarni ongli kasb tanlashga yo‘naltirish – bu maktabning bosh vazifasidir.

O‘zbekiston 2022-yilda PISA tadqiqotlariga ishtirok etishi ham aynan aniq fanlar bilan bog‘liq. PISA muayyan o‘quv dasturlarining ustunligini o‘rganishga, o‘quvchilarning asosiy mavzularda bilim va ko‘nikmalarini qo‘llay olish qobiliyati, muammolarni tahlil qilish, sharhlash va samarali hal qilish, fikrlash, muloqot qilish imkoniyatlarini ko‘rib chiqadi [2].

Matematik savodxonlik – shaxsning matematikani turli xil sharoitlarda shakllantirish, qo‘llash va sharhlash qobiliyati. U matematik asoslashni, matematik tushunchalarni, usullarni, faktlarni va vositalarni tavsiflash, tushuntirish va taxmin qilish uchun ishlatishni o‘z ichiga oladi. Bu odamlar dunyodagi matematikaning rolini tushunishlariga, asosli qarorlar chiqarishiga va fuqarolarning konstruktiv, faol va fikrlashi kerak bo‘lgan qarorlar qabul qilishlariga yordam beradi [3].

Ayni paytda harakatdagi darsliklarimizdagi misol va masalalar bu talabni bajarishga mo‘ljallanmagan. Bizning darsliklarda PISA topshiriqlariga o‘xshash masalalar juda kam yoki umuman yo‘q. Masalalarda ko‘rilayotgan vaziyatni tavsiflovchi juda katta hajmdagi axborot berilib, ularda juda ko‘p yangi matnli ma’lumotlarning borligi – masalani tushunish va uni yechishni yana og‘irlashtiradi.

O‘quvchilarni an’anaviy usullarda o‘qitishda bunday vazifalarni amalga oshirish ancha mushkul ish. Buni ilmiy-uslubiy jurnallarda e’lon qilinayotgan maqolalar va o‘qitishning yangi metodlarini izlab topish borasidagi izlanishlar ham ko‘rsatib turibdi. Chunki an’anaviy o‘qitishning mohiyati o‘quvchilarga faqat ma’lumot berishdan iborat. Bunda asosan tushuntirish-namoyish metodi ustunlik qiladi. Bu hol esa o‘quvchilarga ilgari olgan bilimlaridan kasbiy ta’lim fanlarini o‘rganish va ixtisoslikka oid masalalarni yechishda foydalanish, shuningdek, amaliy faoliyatida faollik ko‘rsatishlariga katta imkon bermaydi.

Ushbu maqola orqali fan sirlarini o‘rganishlari uchun matematika fani mutaxasislariga quyidagi kompitentlik shakllangan bovlishi lozim deb o‘ylaymiz:

- o‘quvchilarning ijodiy faoliyatini tarbiyalash, mustaqil ishlash malakasini hosil qilishga yordam beruvchi vosita va metodlardan to‘g‘ri foydalanishni bilishi;
- fanni o‘zlashtirish uchun tayyor bilimlarni bermasdan, balki fikrlashga undovchi muammoli vaziyatlarni yarata olishi;
- matematikadan turli mavzularni o‘rganishda doimo aniq misollar orqali ko‘rsatmalilikdan foydalanishni bilishi;
- matematikaning boshqa fanlardan farqli go‘zal jihatlarini mavzuga kirishdan oldin topishga va ochishga o‘quvchining tafakkuri orqali tasavvurini shakllanishiga erishishi;
- o‘quvchilar o‘qituvchining o‘z fani, shu darsining mavzusi bilan astoydil shugullanayotganini sezdirishi va o‘ziga ergashtira olishni bilishi;
- sinfda e’tiborsizlar va zerikuvchilar bo‘lmasligi, matematikani "quruq va qiziqarlimas"(ko‘plarga shunday tuyuladi) fandan qiziqarli va jozibali fanga aylantirish uchun har bir darsni turli xil metodlardan foydalanib tashkil eta olishni bilishi;
- mavzuni amaliyot, xayot bilan bog‘lash, ko‘plab misollarni tevarak atrofdan izlab topish va uni o‘quvchining o‘zi yechishiga erishishi uchun yo‘naltiruvchi savollarni qo‘ya bilishi lozim.

Matematika tafakkur va tasavvurni rivojlantirib, aqlni tartibga soladi. Uning amaliy tadbiq qilinish sohasi juda katta. Siz qaysi fanni o‘rganmang, qaysi oliy o‘quv yurtiga kirmang, qaysi sohada ishlamang, agar siz o‘sha yerda iz qoldirishni istasangiz, buning uchun hamma yerda shu fanni bilishingiz zarur.

Adabiyotlar

1. Mirziyoyev Sh.M. "2018–2021-yillarda O‘zbekiston Respublikasi xalq ta’limi tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha chora-tadbirlar dasturi to‘g‘risida"gi 2018-yil 5-sentabrdagi PQ–3931-son qarori.

2. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining "Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son qarori.

3. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2018-yil 8-dekabrdagi "Xalq ta’limi tizimida ta’lim sifatini baholash sohasidagi xalqaro tashkilotlarni tashkil etish chora tadbirlari to‘g‘risida"gi 997-sonli qarori.

4. PISA–2021 tadqiqodlarining ustivor yo‘nalishi: matematik savodxonlikni baholash, –N. Karimov ma’ruzasi.

Ta'lim sifati va samaradorligini oshirishda baholashning o'rni.

Djavliyeva G. R.[1], Qudratova Sh.I.[2]
[1,2] Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston

Muhokamani tushuntirishdan oldin mamlakatimizdagi ilmiy rivojlanish haqida biroz ma'lumot berib o'tsam. O'zbekiston mustaqillika erishganidan so'ng, ilm-fan va innovatsiyalarni rivojlantirish davlat siyosatining ustuvor yo'nalishiga aylandi. Prezidentimiz Shavkat Mirziyoyev bu borada shunday deganlar:

"Biz jamiyatimizda ilm-fan ta'lim va innovatsiyani rivojlantirmas ekanmiz, hech qachon yangi taraqqiyot bosqichiga chiqa olmaymiz "

So'ngi yillardagi yutuqlar-"Yosh olim" va "Ilm-fan-2025" dasturlar orqali yuzlab ilmiy loyihalar moliyalashtirilmoqda. So'nggi yillarda O'zbekistonning ilmiy maqolalari Scopus va Web of Science bazalarida ko'paymoqda.

Prezident stipendiyalari, Beruniy, Ulug'bek, Zulfiya va boshqa mukofotlar ta'sis etilgan shularga ilmli va bilimli harakatchan O'zbekiston talaba yoshlari ega bo'lishlari mumkin.

Baholash-ta'lim sifatida oshirishda muhim vosita . U nafaqat o'quvchi bilimini , balki ta'lim jarayoning samaradorligini ham ko'rsatadi. Baholashning asosiy vazifalari:
*bilim ko'nikma va malakalarni aniqlash;
*ta'lim jarayonini boshqarish va takomillashtirish;
*ta'lim sifatini nazorat qilish;
*sifatli kadrlar tayyorlash.

Shu ta'lim sifati uchun uni oshirish uchun Prezidentimiz Shavkat Miromonovich Mirziyoyev so'zlariga to'xtalib o'tamiz- "Muammolarimizning yechimi , savolarimizning javobi faqat va faqat ta'limda. Hamma eshiklarini ochadigan kalit ham-ta'lim va tarbiyadadir", "Maktabni maktab qiladigan kuch esa-o'qituvchilardir", "Yangi O'zbekistonda eng muhim soha-ta'lim , eng hurmatli insonlar o'qituvchi va murabbiylardir" shular misoliga.

Bilim ko'nikma va malakalarni aniqlashda to'xtalib o'tamiz-baholash orqali o'qituvchining egallagan bilim darajasini aniqlash . Ta'lim jarayonini boshqarish to'g'ri baholash o'qituvchiga darsni rejalashtirishda yordam beradi. O'quvchilarning o'zlashtirish sur'ati va qiyinchiliklariga qarab metodlarini o'zgartirish imkoni beradi.

Ta'lim sifati va samaradorligini oshirishda baholashning o'rni juda katta. Shunga doir misollar keltirib o'tamiz:
* O'zbekiston o'quvchilari PISA, TIMSS, PRILS xalqaro dasturlarda ishtirok etmoqda;
* Universitetlarda 5 ballik baholash tizimi joriy etilgan ;
* Ta'lim inspeksiyasi sifat monitoringini olib bormoqda ;
* 2022-2026-yillarda pedagoglarni xalqaro standartlar asosida baholash belgilangan .

Ta'lim to'g'risidagi ko'plab qonunlar va hujjatlarni keltiramiz:
• "talim to'g'risida"gi qonun (2020-yil);
• " pedagogning maqomi to'g'risida"gi qonun;
• PQ-4708 qarori – matematika ta'limni rivojlantirish milliy dasturi Statistik ma'lumotlar :
• 6,2 mln nafar o'quvchi umumta'lim maktablarda ;
• 10 mingdan ortiq umumta'lim maktablari ;
• 500 mingdan ortiq o'qituvchilar ;
• OTMlarda 1,5 mln ga yaqin talaba;
• So'nggi 10 yilda kunduzgi ta'limdagi talabalar soni 2,7 barobarga oshdi;
• Islohotlar va maqsadli srategiyalar :
• O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasi tasdiqlandi.

• Maktab ta'lim sohasidagi islohotlar yangi bosqichga ko'tarilmoqda, samaradorlikni oshirish vazifalari belgilab o'tilmoqda .
• Prezident Shavkat Mirziyoyev maktab ta'limi tizimidagi islohotlar bo'yicha yig'ilishlar o'tkazmoqda.

Baholash natijalari asosida ta'lim muassalari o'z fao,liyatini tahlil qiladi. Bu esa zamon talabiga mos bilimli, raqobatbardosh yoshlarni yetishtirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Maqsad:

Mavzuning maqsadi — ta'lim jarayonida baholashning ahamiyatini, uning ta'lim sifati va samaradorligiga ta'sirini ilmiy asosda o'rganish va yoritishdan iborat. Ta'lim sifatini baholashning mohiyati va ahamiyatini ochib berish;
Zamonaviy baholash tizimlarining ta'lim samaradorligiga ta'sirini tahlil qilish;
Baholash orqali o'quvchi va o'qituvchi faoliyatini takomillashtirish yo'llarini ko'rsatish;
Prezident farmonlari, qarorlar va qonunlar asosida ta'lim sifatini baholashning dolzarbligini yoritish;
O'zbekiston ta'lim tizimida joriy etilayotgan yangicha baholash yondashuvlarini tahlil qilish.

Xulosa qilib aytishimiz mumkinki, baholash – ta'limning ajralmas qismi bo'lib , u nafaqat o'quvchi bilimini, balki ta'lim jarayonining samaradorligini ham aniqlaydi. Adolatli, tizimli va zamonavi baholash usullaridan foydalish ta'lim sifatini oshirishda eng muhim omillardan biridir. Bugungi kun O'zbekiston Respublikasida baholash tizimini takomillashtirish, xalqaro standartlarga moslashtirish, adolatli, shaffof mezonlar asosida o'tkazish bo'yicha keng islohotlar amalga oshirilmoqda. Prezidentimiz Shavkat Mirziyoyev ta'kidlaganlaridek:- "Yangi O'zbekistonni barpo etish yo'lida eng muhim vazifamiz ta'lim sifatini oshirishdir." Shunday ekan baholash tizimi faqatgina natijani aniqlovchi vosita emas, balki ta'limning sifatini kafolatlovchi, inson kapitalini rivojlantiruvchi, taraqqiyotga yo'naltirilgan omildir.

Литература

1. *O'zbekiston Respublikasi "Ta'lim to'g'risida"gi qonun (yangi tahriri, 2020-yil 23-sentabr).*
2. *"Pedagogning maqomi to'g'risida"gi qonun (2019-yil 30-dekabr).*
3. *O'zbekiston Respublikasi prezidenti Shavkat Mirziyoyevning nutqlari va farmonlari*
4. *2022-2026-yillarda O'zbekiston Respublikasi rivojlantirish bo'yicha yangi O'zbekiston strategiyasi.*
5. *Xalq ta'limi vazirligi va Oliy ta'lim , fan va innovatsiyalar vazirligi axborotlar (rivojlanish dasturlari, 2021-2024-yillar)*
6. *Ilmiy qo'llanmalar (Rahmonov. N. "Ta'lim sifatini baholashning zamonaviy yondashuvlari", "Ta'lim innovatsiyalar jurnali", 2022)*

Zamonaviy ta'lim jarayonida innovatsion pedagogik texnologiyalar va elektron ta'lim vositalarining ahamiyati

Djurayeva D.Sh.[1], Qo'ldosheva D.[2]
[1,2] Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston

Zamonaviy ta'lim jarayonida innovatsion pedagogik texnologiyalar va elektron ta'lim vositalarining ahamiyati. Zamonaviy ta'lim jarayonida innovatsion pedagogik texnologiyalar va elektron ta'lim vositalarining ahamiyati kundan-kunga oshib bormoqda. Innovatsion pedagogik texnologiyalar va elektron ta'lim vositalari ta'lim jarayonini modernizatsiya qilish, o'qitish metodlarini diversifikatsiya qilish, o'quvchilarning mustaqil fikrlashini rivojlantirish uchun juda muhim vositalar sifatida xizmat qiladi.

Innovatsion pedagogik texnologiyalar: ta‘rif va xususiyatlar. Innovatsion pedagogik texnologiyalar – bu ta‘lim jarayonida pedagogik maqsadlarni amalga oshirish uchun zamonaviy texnologiyalardan foydalanish, o‘quvchilarning qobiliyatlarini rivojlantirishga qaratilgan yangi pedagogik metodlar va vositalardir. Bu texnologiyalar an‘anaviy o‘qitish usullariga qo‘shimcha ravishda, o‘quvchilarning faol ishtirokini ta‘minlash, ularni mustaqil fikrlashga o‘rgatish, shuningdek, o‘qituvchilar uchun ta‘lim jarayonini boshqarish va baholashda yangi imkoniyatlar yaratadi.

Innovatsion pedagogik texnologiyalarning asosiy xususiyatlari:

1. Interaktivlik: Innovatsion texnologiyalar o‘quvchilarni faollashtiradi va ularni o‘qish jarayoniga to‘liq jalb qiladi. O‘quvchilarning o‘qituvchilar bilan aloqasi va bir-biri bilan hamkorlikda ishlash imkoniyatlari oshadi.

2. Moslashuvchanlik: Ta‘lim jarayonini o‘quvchilarning individual ehtiyojlariga moslashtirish imkoniyatini yaratadi. O‘quvchilar o‘z bilim darajasiga mos ravishda o‘rganish imkoniga ega bo‘ladilar.

3. Kreativlikni rivojlantirish: Innovatsion texnologiyalar yordamida o‘quvchilar yangi g‘oyalar yaratishda va muammolarni ijodiy hal qilishda o‘zlarining kreativliklarini rivojlantiradilar.

4. Resurslarga keng kirish: Internet va raqamli resurslardan foydalanish imkoniyati o‘quvchilarga global bilim bazasidan foydalanish imkonini beradi.

N.Yu. Алексеев (2021) tomonidan yozilgan “Интерактивные образовательные технологии и их роль в профессиональной подготовке учителей” tadqiqotida interfaol va raqamli texnologiyalar asosida o‘qituvchilarni tayyorlash masalasi ko‘rib chiqilgan. Tadqiqotda interfaol texnologiyalar va raqamli resurslarning o‘qituvchilarni professional tayyorlashdagi roli tahlil qilingan.

Innovatsion pedagogik texnologiyalar zamonaviy ta‘lim jarayonining ajralmas qismiga aylanmoqda. Ular o‘qitish metodlarini diversifikatsiya qilish, o‘quvchilarning ijodiy fikrlashini rivojlantirish, ta’lim samaradorligini oshirish, o‘quvchilarni faollashtirish va mustaqil o‘rganish imkoniyatlarini yaratish kabi afzalliklarga ega. Bu texnologiyalar nafaqat o‘quvchilar uchun, balki o‘qituvchilar uchun ham ta‘lim jarayonini takomillashtirish, metodologik bilimlarni yangilash va innovatsion yondashuvlarni joriy etish imkoniyatlarini yaratadi. Shu bilan birga, ta‘lim tizimi innovatsion pedagogik texnologiyalar bilan boyitilganda, o‘quvchilarning umumiy ta‘lim va ijodiy kompetensiyalarini rivojlantirishda muhim rol o‘ynaydi. Elektron ta‘lim vositalari o‘quvchilar va o‘qituvchilar uchun ta‘lim jarayonini samarali tashkil etish, ma’lumotlarni taqdim etish, baholash va o‘quvchilarning bilim darajasini monitoring qilishda muhim rol o‘ynaydi. Ular ta‘limni yanada interaktiv, shaxsiylashtirilgan va samarali qilish imkoniyatini yaratadi. Quyida elektron ta‘lim vositalarining asosiy turlari va ularning ta‘lim jarayonidagi ahamiyati batafsil keltirilgan:

1. LMS (Learning Management System) – O‘qitish boshqaruvi tizimi. LMS – bu ta‘lim jarayonini boshqarish va monitoring qilish uchun mo‘ljallangan elektron tizimlar bo‘lib, o‘qituvchilar va o‘quvchilarga turli ta‘lim resurslarini taqdim etish, topshiriqlarni yuklash, testlar o‘tkazish va baholash imkonini beradi. LMS tizimlari yordamida ta‘lim jarayonining barcha bosqichlarini masofaviy ravishda boshqarish mumkin. LMS tizimlarining asosiy imkoniyatlari:

Materiallarni joylashtirish: O‘qituvchilar o‘z o‘quv materiallarini platformaga joylashtirishlari mumkin.

Baholash: Testlar va viktorinalar orqali o‘quvchilarni baholash.

Kommunikatsiya: O‘qituvchilar va o‘quvchilar o‘rtasida muloqot qilish imkoniyatlari (forumlar, xabarlar, chatlar).

Monitoring: O‘quvchilarning faoliyatini kuzatish va baholash. O‘qitish boshqaruvi tizimiga quydagilarni misollarni keltirish mumkin: Moodle, Google Classroom, Canvas, Blackboard.

2. MOOC (Massive Open Online Courses) – Kengaytirilgan ochiq onlayn kurslar. MOOC

platformalari ta'limni keng auditoriya uchun onlayn shaklda taqdim etadi. Bu tizimlar butun dunyo bo‘ylab foydalanuvchilarga bepul yoki pullik kurslarni o‘rganish imkoniyatini beradi. MOOC kurslari o‘quvchilarga o‘zlashtirish jarayonini boshqarish imkoniyatini yaratadi, turli mavzularda (ilmi, texnologiya, san'at, ijtimoiy fanlar va boshqalar) bepul yoki pullik kurslarni taqdim etadi. MOOC tizimlarining asosiy xususiyatlari:

Keng auditoriya: Kurslarga global miqyosda kirish imkoniyati.

Fakultativ kurslar: Talabalar o‘zlariga qiziqarli bo‘lgan kurslarni tanlashlari mumkin.

Kurs materiallari: Video darslar, testlar, o‘quv qo‘llanmalari va forumlar.

Sertifikatlar: Kursni muvaffaqiyatli tamomlaganlarga rasmiy sertifikatlar berish.

Kengaytirilgan ochiq onlayn kurslarga quydagilar misol bo‘la oladi: Coursera, edX, Udemy, Khan Academy.

3. Simulyatsiyalar va virtual laboratoriyalar. Simulyatsiyalar va virtual laboratoriyalar ta'limda nazariy bilimlarni amaliyotga tatbiq etishga yordam beradi. Ular o‘quvchilarga ilmiy tajribalarni xavfsiz va interaktiv tarzda o‘rganish imkoniyatini yaratadi. Simulyatsiya yordamida o‘quvchilar tajriba qilish, amaliy ko‘nikmalarni rivojlantirish va yangi bilimlarni sinash imkoniyatiga ega bo‘ladilar. Simulyatsiya va virtual laboratoriyalarning afzalliklari:

Realistik muhit: O‘quvchilar ilmiy tajribalarni virtual tarzda o‘rganishadi, xavfsiz va arzon. Praktik ko‘nikmalarni rivojlantirish: O‘quvchilar bilimni amalda qo‘llashadi. Masofaviy o‘rganish: Barcha laboratoriyalar masofadan o‘rganish imkoniyatini beradi. Bu kabi elektron ta'lim vositalari innovatsion ta'lim jarayonini yaratishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ular o‘quvchilarni faol o‘rganishga undaydi, nazariy bilimlarni amaliyot bilan bog‘lashga yordam beradi va fanlarga bo‘lgan qiziqishni oshiradi. Shu sababli, ta'lim jarayonida PhET, Labster va ChemCollective kabi platformalarni keng qo‘llash maqsadga muvofiq.

Литература

1. **Abduraxmonov, Q.** *Innovasion pedagogik texnologiyalar va ularni ta'lim jarayonida qo‘llash usullari. Toshkent: "Fan va texnologiya" nashriyoti.2020.*
2. **Xodjayev, A.** *MElektron ta'lim tizimini joriy etishda pedagogik innovatsiyalarning ahamiyati. Toshkent davlat pedagogika universiteti ilmiy axboroti, №2, 45–52-betlar.2021*
3. **Mirzayeva, D.** *Interaktiv o‘qitish usullari va elektron ta'lim muhitini rivojlantirishda ularning roli. "Pedagogika va psixologiya" jurnali, №4, 61–68-betlar. 2023*
4. **To‘xtayeva, N.** *Zamonaviy ta'limda raqamli texnologiyalar va masofaviy o‘qitish imkoniyatlari. Samarqand: SamDU nashriyoti.2022*
5. **Qodirov, B., Mirzayeva, D.** *Ta'limda elektron dasturiy ta'minotni takomillashtirish va uning pedagogik samaradorligi. "Ilmiy izlanishlar" jurnali, 7(1), 25–33.2024*
6. **Yunusova, S.** *Innovasion ta'lim texnologiyalari asosida o‘quv jarayonini tashkil etish masalalari. "Ta'limda innovatsiyalar" ilmiy jurnali, №1, 15–23. 2021*
7. **UNESCO.** *Education and Digital Transformation: Global Report. Paris: UNESCO Publishing.2023.*
8. **Anderson, T., Dron, J.** *Teaching Crowds: Learning and Social Media. Edmonton: Athabasca University Press 2020.*
9. **. Bates, A. W.** *Teaching in a Digital Age: Guidelines for Designing Teaching and Learning. Vancouver: Tony Bates Associates Ltd.2019.*
10. **Siemens, G.** *Connectivism: A Learning Theory for the Digital Age. International Journal of Instructional Technology and Distance Learning, 2(1), 3–10.2018.*

UDK 512.1

BA'ZI MURAKKAB SONLARNING BO'LINISH BELGILARI VA MAVJUD BO'LINISH BELGILARIGA YANGICHA YONDASHUV

Erdonov B.X.[1)], Xudoynazarova D.N.[2)], Ro'ziyeva N.T.[3)]
[1)]Termiz iqtisodiyot va servis universiteti, Axborot texnologiyalari va aniq fanlar kafedrasi katta o'qituvchisi;
[2),3)]Termiz iqtisodiyot va servis universiteti, Matematika yo'nalishi talabalari.
bekmurod.erdonov@mail.ru

Maktab o'quvchilariga fanlardan chuqur bilim berish bilan birgalikda berilayotgan bilimlarni hayotda qanday qo'llash mumkinligini o'rgatish hozirgi kunda muhim masalalardan biri hisoblanadi. Matematika fanida ta'rif, teorema va tushunchalarni o'quvchiga hayotiy va sodda qilib tushuntirish mushkul vazifalardan biridir. Surxondaryo viloyati maktablari matematika o'qituvchilaridan olingan so'rovnomalarda berilgan takliflardan biri bu – matematika kursida berilgan bo'linish belgilari mavzusidagi murakkab sonlarga yagona qoida asosida bo'linish belgisi hosil qilish masalasi bo'ldi. Biz ushbu masala yuzasidan ba'zi murakkab sonlarga yagona bo'linish qoidasini yaratishga e'tibor qaratdik.

Maktab 6-sinf matematika darsliklarida sonni tub sonlar ko'paytmasi shaklida keltirish mavzusi berilgan. Ushbu mavzu bo'yicha kattaroq sonlarni tub sonlar ko'paytmasi shaklida ifodalash masalalalarini hal qilishda sonlarning bo'linish belgilari muhim hisoblanadi. Bizga ma'lumki darsliklarda 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25 sonlariga bo'linish belgilari berilgan. Ba'zi adabiyotlarda 7, 13, 17, 19, 23 sonlariga bo'linish belgilari ham berilgan. [1] maqolada 10 soni bilan o'zaro tub bo'lgan barcha sonlar uchun bo'linish belgilari umumiy holda berilgan.

Odatda murakkab sonlarga bo'linish belgilari uni o'zaro tub ko'paytuvchilarga ajratib, hosil bo'lgan ko'paytuvchilarning bo'linish belgilari orqali hal qilinadi. Bunda ko'paytuvchilarning har biri uchun bo'linish belgilari alohida tekshiriladi. Endi haqli savol tug'iladi, umumiy holda bo'linish belgilari berilmagan murakkab sonlar ya'ni 6, 12, 14, 15, 18, ... sonlar uchun yagona bo'linish belgilari mavjudmi? A. Dusumbetov, R. Turgunbayev [2] maqolasida 10 bilan o'zaro tub bo'lmagan sonlarga yagona bo'linish qoidasi berilgan, ammo bu qoidani qo'llash bir necha bosqichni va katta sonlar bilan hisoblashlarni yuzaga keltiradi. Biz ushbu ishda [1] maqolada berilgan bo'linish belgilarini to'ldirgan va [2] maqolada berilgan hisoblashlardan soddaroq bo'lgan, 10 bilan o'zaro tub bo'lmagan ba'zi sonlar uchun bo'linish belgilariga to'xtalamiz.

1-teorema. $\overline{a_0a_1...a_{n-1}a_n}$. *soni 6 ga bo'linishi uchun uning birlar xonasidagi raqami va qolgan raqamlari yig'indisining to'rtlanganining yig'indisi 6 ga bo'lishi yetarli.*

Isboti: Sonlar nazariyasidan bizga ma'lumki $\overline{a_0a_1...a_{n-1}a_n}$ soni 6 ga bo'linishi uchun $\overline{a_0a_1...a_{n-1}a_n} \equiv 0(mod6)$ (1) bo'lishi yetarli. (1) taqqoslamaning chap tomonidagi sonni xona qo'shiluvchilari yig'indisi shaklida yozsak quyidagi ko'rinishga keladi [3] (36-38 betlarga qarang)

$$a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n \equiv 0(mod6). \qquad (1')$$

Shu o'rinda quyidagi lemmani keltiramiz:

Lemma. $10^n \equiv 4(\text{mod}6) \quad (n \in N)$ *bajariladi.*

Isboti. Matematik induksiya metodiga asosan isbotlaymiz. $n = 1$ bajarilishi tushunarli. $n = k$ da o'rinli deb $n = k + 1$ da o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. $n = k$ da $10^k \equiv 4(\text{mod}6)$ o'rinli deb hisoblaymiz. Oxirgi taqqoslamani ikkila qilsmini 10 ga ko'paytiramiz $10^{k+1} \equiv 40(\text{mod}6)$ yoki $10^{k+1} \equiv 4(\text{mod}6)$ natijani olamiz. Bu natija lemmani isbotlaydi.

(1') taqqoslamani $10^n \equiv 4(\text{mod}6) \quad (n \in N)$ ekanligidan foydalanib

$$a_0 \cdot 4 + a_1 \cdot 4 + ... + a_{n-1} \cdot 4 + a_n \equiv 0(mod6)$$

yoki

$$4 \cdot (a_0 + a_1 + ...a_{n-1}) + a_n \equiv 0(mod6)$$

ko‘rinishida yozishimiz mumkin. Bu 1-teoremani isbotlaydi.

Misol. 738 soni 6 ga bo‘linishini yuqoridagi 1-teorema yordamida tekshiramiz. $4 \cdot (7+3)+8 = 48$, 48 soni 6 ga qoldiqsiz bo‘linadi, demak 738 soni ham 6 ga qoldiqsiz bo‘linadi.

2-teorema. *$\overline{a_0a_1...a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ soni 12 ga bo‘linishi uchun, uning oxirgi ikki raqamidan tuzilgan son va qolgan raqamlari yig‘indisining to‘rtlanganining yig‘indisi 12 ga bo‘linishi yetarli.*

Isboti. $\overline{a_0a_1...a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ soni 12 ga bo‘linishi uchun

$$\overline{a_0a_1...a_{n-2}a_{n-1}a_n} \equiv 0(\text{mod}12) \tag{2}$$

bo‘lishi yetarli [4]. (2) taqqoslamaning chap tomonidagi sonni xona qo‘shiluvchilari yig‘indisi shaklida yozsak

$$a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot 100 + a_{n-1} \cdot 10 + a_n \equiv 0(mod12)$$

ko‘rinishga keladi. Oxirgi taqqoslamani $10^n \equiv 4(\text{mod}12) \quad (n \geq 2, \ n \in N)$ (yuqoridagi lemma o‘xshash matematik induksiya metodi asosida isbotlash mumkin) ekanligidan foydalanib

$$a_0 \cdot 4 + a_1 \cdot 4 + ... + a_{n-2} \cdot 4 + a_{n-1} \cdot 10 + a_n \equiv 0(mod12)$$

yoki

$$4 \cdot (a_0 + a_1 + ... + a_{n-2}) + \overline{a_{n-1}a_n} \equiv 0(mod12)$$

ko‘rinishida yozishimiz mumkin. Bu 2-teoremani isbotlaydi.

Misol. 5832 soni 12 ga bo‘linishini yuqoridagi 2-teorema yordamida tekshiramiz. $4 \cdot (5+8) + 32 = 84$, 84 soni 12 ga qoldiqsiz bo‘linadi, demak 5832 soni ham 12 ga qoldiqsiz bo‘linadi.

3-teorema. *$\overline{a_0a_1...a_{n-1}a_n}$ soni 15 ga bo‘linishi uchun, uning raqamlari yordamida tuzilgan $10 \cdot (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}) + a_n$ sonli ifoda 15 ga bo‘linishi yetarli.*

Isboti. $\overline{a_0a_1...a_{n-1}a_n}$ soni 15 ga bo‘linishi uchun

$$\overline{a_0a_1...a_{n-1}a_n} \equiv 0(\text{mod}15) \tag{3}$$

bo‘lishi yetarli. (3) taqqoslamaning chap tomonidagi sonni xona qo‘shiluvchilari yig‘indisi shaklida yozsak

$$a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n \equiv 0(mod15)$$

ko‘rinishga keladi. Oxirgi taqqoslamani $10^n \equiv 10(\ \text{mod}\ 15) \quad (n \in N)$ (yuqoridagi lemma o‘xshash matematik induksiya metodi asosida isbotlash mumkin) ekanligidan foydalanib

$$a_0 \cdot 10 + a_1 \cdot 10 + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n \equiv 0(mod15)$$

yoki

$$10 \cdot (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}) + a_n \equiv 0(mod15)$$

ko‘rinishida yozishimiz mumkin. Bu 3-teoremani isbotlaydi.

Izoh: 3-teoremadagi $10 \cdot (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}) + a_n$ ifoda o‘rniga $5 \cdot (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}) - a_n$ sonli ifodani tekshirish ham mumkin. Ammo $10 \cdot (a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}) + a_n$ sonli ifodani hisoblash qulay bo‘lganligi uchun ushbu ifodani oldik.

Misol. 51 861 945 soni 15 ga bo‘linishini yuqoridagi 3-teorema yordamida tekshiramiz. $10 \cdot (5+1+8+6+1+9+4)+5 = 345$, 345 uchun ham yuqoridagi teoremani qo‘llaymiz, $10 \cdot (3+4)+5 = 75$,

75 soni 15 ga qoldiqsiz bo‘linadi, demak 345 soni ham 15 ga qoldiqsiz bo‘linadi. Bu esa 51861945 soni 15 ga qoldiqsiz bo‘linishini ko‘rsatadi. (51 861 945:15=3 457 463)

Xulosa o‘rnida shu aytishimiz mumkinki, har qanday murakkab son uchun yagona bo‘linish qoidasi keltirish mumkin, ammo bu qoidani qo‘llash orqali o‘quvchi hisoblashlarda qulaylik olmasligi mumkin. Biz ushbu ishda hisoblashga va tekshirish qulay bo‘lgan ba’zi murakkab sonlarga bo‘linish belgilarini keltirdik.

Adabiyotlar ro‘yxati

1. **Ibragimov Q.T., Erdonov B.X.** *Sonlarning bo‘linish alomatlari va mavjud bo‘linish belgilariga yangicha yondashuv.* Fizika, matematika va informatika jurnali. 2020. №6, 14-18 b.
2. **Dusumbetov A., Turgunbayev R.** *Bo‘linish belgilari.* Fizika, matematika va informatika. 2003, №3, 25-33 b.
3. **Allakov I.** *Sonlar nazariyasidan misol va masalalar (yechimlari bilan).* Termiz. «Surxon-Nashr» nashriyoti 2020.
4. **Erdonov B.X.** *Ba’zi murakkab sonlarning bo‘linish belgilari va mavjud bo‘linish belgilariga yangicha yondashuv.* NamDU ilmiy axborotnomasi. 2023. №12, 509-513 b.

Ta‘limda integratsiya va uning mohiyati

Jumaniyozov Q. S.[1], Safoyeva K. Q.[2]
[1]Oriental universiteti, Matematika va axborot texnologiyalari kafedrasi, Toshkent, O‘zbekiston; e-mail: qudrat.j533@gmail.com
[2]Chirchiq davlat pedagogika universiteti, Maktabgacha va boshlang‘ich ta‘lim metodikasi kafedrasi, Chirchiq, O‘zbekiston; e-mail: Safoyevakamola@gmail.com

Matematikada integratsiya tiklash sifatida – ixtiyoriy buzilishlar, butunlik yoki birlikning parchalanishini ”yo‘q qilish” bo‘yicha harakat orqali emas, balki ongli ravishda o‘tkazilgan differensatsiyani tushurish sifatida xarakterlanadi. Bundan tashqari matematikada integratsiya qismlarni yig‘indisi sifatida ifodalanadi. Shuning uchun butunlik teginmaganlik kabi emas, tarkibiylik sifatida qabul qilinadi. Lotin so‘zining ma‘nosini shakl almashtirish jarayonining teskari tomoni sifatida – integratsiya biror butunlikni tiklash bo‘yicha faoliyat bo‘lmay, faqatgina fikrlash protsedurasi sifatida ko‘rsatiladi.

Matematik integratsiya – butunga tiklashning umumiy ob’ektiv jarayonini xususiy holi sifatida qayta anglash XIX asrda boshlanadi. Shunday ekan, sotsiologiyada Kontdan keyin har xil ijtimoiy guruhlarni garmonik bir butunga birlashishini integratsiya deb nomlasha boshlashdi.

Integratsiya tushunchasining keyingi rivojlanishi sistemali tasavvurlarning tez suratda rivojlanishi bilan uzluksiz bog‘liq. Yuqoridagilardan kelib chiqib integratsiya tushunchasining quyidagi ma’nolarni keltiramiz:

a) integratsiya – tizim tashkil etuvchi elementlarning birlashishini ta’minlovchi aloqa sifatida;

b) integratsiya – elementlarning boshqa tizimga sintezi sifatida;

c) integratsiya – rivojlanayotgan butun organik tizim doirasida differensiallangan qismlar birlashmasi sifatida.

Oxirgi holatda, integratsiya nafaqat qismlarning funksional birlashishi va ularning koordinatsion (uyg‘unlashtirilgan) sintezini, balki har bir qismning har tomonlama rivojlanishini ham anglatadi.

Umuman olganda integratsiya – bu olamning yaxlitligi va uni tashkil etuvchi tarkibiy qismlarining o‘zaro aloqadorligini anglatadi. "Integratsiya"tushunchasi integratsiyalanadigan

ob'ektlarning mohiyatiga koʻra turlicha ta'riflanadi. Biz integratsiya tushunchasiga berilgan turli xil izohlarni oʻrganib ularni quyidagicha umumlashtiramiz.

Integratsiya (lot. *integration – tiklash, toʻldirish* va *integer – butun, yaxlit*) –" tizimning, bir butun organizmning bir-biridan farq qiluvchi alohida bo'laklarining o'zaro bog'langanligini anglatuvchi, hamda xuddi shu holatni keltirib chiqaruvchi jarayon demakdir.

Integratsiya bilan bir xil deb qaraladigan tushunchalar nihoyatda koʻp, ulardan koʻproq qoʻllaniladiganlari: sinkretizm, sintez, qoʻshilish, komplekslilik va hokazo. Koʻrsatilgan tushunchalardan har biri integratsiya tabiatini ochib berishga yordam beradi, biroq uning mazmunini toʻla-toʻkis berishga yordam bermaydi.

"Integratsiya"termini (lotincha *integratio – toʻdirish, tiklash*, *integer – butun, toʻliq*) вЂњbiror qismlarni, elementlarni bir butunga birlashtirishniвЂќ anglatadi va fanlarni differensiatsiyalash bilan bir qatorda sodir boʻladigan, fanlarning aloqasi va yaqinlashish jarayonining xususiyatlarini tasvirlash uchun ham qoʻllaniladi.

Pedagogikada "integratsiya"toʻla huquqli ilmiy tushuncha sifatida jamiyatning iqtisodiy, siyosiy, axborotli, madaniy va boshqa sohalardagi rivojlanayotgan oʻzaro ta'sirdagi jarayonlar sharoitida XX asrning 80-yillari birinchi yarmida mulohaza qilina boshlandi. Integratsiya muammolarini pedagoglar, hali faylasuflar, siyosatchilar u bilan jiddiy qiziqmasdan oldin mulohaza qila boshladi. XX asr boshlarida pedagogik ongda ikkita qarama-qarshi didaktik yoʻnalish vujudga keldi: predmetlilik va komplekslilik. Kompleks ta'lim oʻzini eski, predmetli ta'lim sistemasini buzish orqali amalga oshirishga uringan.Ammo integratsiyaning ilk nihollari butunlay yoʻq boʻlib ketgani yoʻq: u predmetlilik ichiga kiradi va yerga tushgan don kabi, uning ichida oʻzining rivojlanishining yangi shaklini boshlaydi. 50-yillarda integratsiya gʻoyasi pedagogik ongda fanlararo aloqalar shaklida paydo boʻladi.

Haqiqatan ham texnikaviy gʻoya rivojlanishining butun tarixi davomida masalalarni yechishning geometrik metodi eng muhim ajralmas qismi boʻlib kelgan. Geometrik til nafaqat fan va texnikada, balki hayotimizda ham qoʻllaniladi. Amaliyotda, faqatgina asl nusxaning strukturasini aks ettiruvchi geometrik modellar eng murakkab territorial komplekslarni proeksiyalash bilan bogʻliq ravishda keng qoʻllaniladi. Geometrik oʻxshashlik asosida qurilgan ushbu modellar ob'ektlarni optimal joylashtirish bilan bogʻliq boʻlgan va hokazo masalalarni yechish imkonini beradi.

Shaxs rivojlanishida ham geometriyaning ahamiyati nihoyatda katta. Koʻrgazmali tasavvurlardan kelib chiquvchi geometrik usulning oʻziga xosligi oʻquvchilarda fazoviy tasavvur va mantiqiy fikrlash kabi ahamiyatli sifatlarni shakllantirish uchun imkoniyatlar yaratib beradi. Rivojlangan fazoviy tasavvur bu insonning umumiy madaniyatining muhim elementidir.

Geometriyaning roli mexanika va fizikaning rivojlanishida ham muhimdir. Bu yerda geometrik tasavvurlar fundamental rolni bajaradi, sababi harakat va jarayonlar fazoda roʻy beradi. Bunga kinematika va geometrik optika, kristallar tuzilishi, murakkab molekulalarning fazoviy modellari, tirik organizmlarning simmetriyasi va hokazolar misol boʻla oladi.Fazoviy tasavvurlar, matematik intuitsiya matematikaning oʻzida ham muhim rol oʻynaydi.

Zamonaviy fan rivojlanishining ob'ektiv tendensiyalari va shakllanayotgan axborotli jamiyatning talablari akademik litseylarda matematikani integratsiyalab oʻqitishni qat'iy talab etadi. Uning istiqbolli yoʻnalishlardan biri, algebradan geometriyaga qarab yoʻnalgan asosiy matematik fanlar integratsiyasi hisoblanadi. Matematik bilimlarni geometriyalashtirish zamonaviy matematika darsliklarida sezilarli. Shuni ta'kidlash kerakki, bilishning algebraik va geometrik usullar integratsiyasining zarurligi nafaqat fan rivojlanishining mantiqiga, balki zamonaviy mutaxassisning kasbiy sifatlarini shakllantirish talablariga ham bogʻliq.

Matematikani oʻqitish matematik faoliyat uchun xarakterli va jamiyatda ishlashi uchun insonga zarur fikrlash sifatlarini shakllantirib, oʻquvchilarning aqliy rivojlanishiga katta

hissa qo‘shishi kerak. Matematika haqida tasavvurni voqelikni bilish usuli va tasvirlash shakli sifatida, umuminsoniy madaniyatning qismi sifatida ochib berib, insonning gumanitar madaniyatini rivojlatirishiga yordam berishi kerak. Matematik ta’limda integratsion jarayonlar bo‘lgandagina bu maqsadga erishish mumkin. Jamiyatning o‘sishi uchun o‘quv jarayonini shunday tashkillashtirish zarurki, o‘quv rejasini bajaribgina qolmasdan va berilgan muddatlarda barcha o‘quvchilarni bitirganlik to‘g‘risidagi diplomlar bilan ta’minlabgina qolmasdan, balki maktab hayotining birinchi kunlaridanoq o‘quvchilarga jamiyat oldida turgan odatiy va yangi muammolarni yechishga yangi yondashuvlar, yangi imkoniyatlar, yangi yo‘llarni izlashni odatlantirmoq kerak.

Maktab vazifasi quyidagidan iborat: yosh avlodga fikrlashni, o‘qishni va harakat qilishni o‘rgatish; insonning harakatlariga, uning ishiga oliy ijtimoiy maqsadlarni qo‘yishga va erishishga intilish beruvchi yaxlit ilmiy dunyoqarashni egallashga yordam berish. Bu vazifani hal etishda matematik ta’lim integratsiyasining roli nihoyatda katta.

Foydalanilgan adabiyotlar ro’yhati

1. Jumaev E.M, Eshonqulova M. Boshlang‘ich ta’limda integratsiyaning maqsad va mohiyati to‘g‘risida // Pedagogika. 1988. №–7. S. 8–11.
2. Mamadazimov M. Ta’limda integratsiya – davr talabi. // T.N.Qori Niyoziy nomli o‘zPFITI. "Umumiy o‘rta ta’lim tizimini rivojlantirish istiqbollari"Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi. 2020.
3. Браже Т.Г.Интеграция предметов в современной школе // Литература в школе. 1996. №5. С. 15–19.
4. Раёмов М. Формирование прикладных умений учащихся VII–IX классов общеобразовательных школ. Дисс. УзНИИПИ им. Т.Н.Кори-Ниязова. 2018.

Kimyo fanini talabalarga fanlararo bog‘liqlikni qamrab olgan holda o‘rgatishda zamonaviy axborot texnologiyalari imkoniyatlaridan foydalanish

Mengliyev I. [1], Muhammadiyeva L. [2]
[1] Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston;
mengliyev1982@mail.ru
[2]Termiz pedagogika instituti, Termiz, O‘zbekiston;
lobarmuhammadiyeva@gmail.com

Boshqa fanlar sohasida bo‘lgani kabi kimyo fanini talabalarga fanlararo bog‘liqlikni qamrab olgan holda o‘rgatishda zamonaviy axborot texnologiyalari imkoniyatlaridan foydalanish keng imkoniyatlar eshigini ochib beradi. Hozirda ilmiy yangiliklar ikki yoki undan ortiq fanlar kesimi doirasida yaxshi natijalar bermoqda va innovatsion ahamiyat kasb etib, tegishli sohadagi ishlab chiqarish korxonalariga tadbiq etish imkoniyatlarini bermoqda.Bu borada O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 12 avgustdagi PQ-4805-son “Kimyo va biologiya yo‘nalishlarida uzluksiz ta’lim sifatini va ilm-fan natijadorligini oshirish chora-tadbirlari to‘g‘risida“gi qarorida [1] mamlakatimizda kimyo va biologiya fanlarini rivojlantirish, ushbu yo‘nalishlarda ta’lim sifati va ilm-fan natijadorligini oshirish “Ilm, ma’rifat va raqamli iqtisodiyot yili“ Davlat dasturining ustuvor vazifalari qatorida belgilangan. Mazkur qarorda “Umumta’lim maktablaridagi kimyo va biologiya fanlarini o‘qitish sifati bugungi davr talablariga javob bermasligi, o‘qitish metodologiyasi va laboratoriyalar ma’nan eskirganligi, o‘qituvchilarning mehnatini munosib rag‘batlantirish mexanizmlari joriy qilinmaganligi alohida qayd etib o‘tilgan.

Shuningdek, o‘rta maxsus, professional, oliy ta’lim, ilmiy-tadqiqot muassasalari hamda sohadagi ishlab chiqarish korxonalari o‘rtasida kadrlar tayyorlash va ilm-fan natijalaridan foydalanish borasida uzviy bog‘liqlik, samarali muloqot va hamkorlik yo‘lga qo‘yilmagan“ligi to‘g‘risidagi e’tirozli fikrlar bildirilgan.Ushbu qaror [1]da kimyo va biologiya fanlari bo‘yicha ta’lim sifatini tubdan oshirish,umumta’lim maktablarida ushbu fanlarni o‘qitishning mutlaqo yangi tizimini joriy etish, ta’lim muassasalarini zamonaviy laboratoriyalar, darsliklar va boshqa o‘quv jihozlari bilan ta’minlash, ushbu yo‘nalishlarga malakali o‘qituvchi-murabbiylarni jalb etish, kadrlar tayyorlash va ilm-fan natijalaridan foydalanishda ta’lim, ilm-fan va ishlab chiqarish sohalari o‘rtasida o‘zaro yaqin muloqot va hamkorlikni yo‘lga qo‘yish maqsadida bir qator vazifalar belgilangan.Ushbu vazifalar doirasida oliy ta’lim muassasalarining kimyo va biologiya ta’lim yo‘nalishlarida samarali o‘quv jarayonini tashkil etish, oliy ta’lim muassasalari kafedralariga biriktirilgan tayanch ixtisoslashtirilgan maktablarda o‘quv jarayonini samarali tashkil etish, professor-o‘qituvchilarni va iqtidorli talabalarni ta’lim jarayoniga jalb etish, mahorat darslari, to‘garaklar va yozgi maktablar tashkil etish, umumiy o‘rta ta’lim muassasalarida kimyo va biologiya fanlariga qiziqishi bo‘lgan o‘quvchilar uchun tajriba-sinov sifatida joriy etilayotgan tabiiy fanlar yo‘nalishidagi variativ o‘zgaruvchan o‘quv rejalarini bosqichma-bosqich o‘quv jarayonida foydalanishni yo‘lga qo‘yish, shuningdek, o‘quvchilarning amaliy ko‘nikmalarini shakllantirish maqsadida tabiiy fanlar o‘quv dasturlarida amaliy mashg‘ulotlarning ulushini ko‘paytirish choralarini ko‘rish, o‘quv jarayonida zamonaviy pedagogik texnologiyalarni joriy etish nazarda tutilgan.Oliy ta’lim muassasalarining tabiiy fanlar ta’lim yo‘nalishlarida tahsil olayotgan talabalarning fanlararo bog‘liqlikni o‘rganish bo‘yicha kasbiy kompetentligini shakllantirishda axborot texnologiyalarini qo‘llash ta’lim sifati va samaradorligini oshirishda muhim ahamiyatga ega.Shu maqsadda ushbu tadqiqot ishida kimyo fanida uglevodorod molekulalarining topologik xossalarini axborot texnologiyalarini qo‘llash asosida tadqiq etish orqali molekuladagi uglerodlar sonini, uglerod-uglerod aloqalari sonini hamda molekuladagi xalqalar sonini aniqlash metodikasi keltirilgan, bunda molekuladagi uglerod-vodorod bog‘liqliklari inobatga olinmaydi. Qo‘yilgan masalani hal etish quyidagi fanlar orasidagi fanlararo bog‘liqli o‘rganish bilan bevosita bog‘liq. Ushbu bog‘liqlik 1-rasmda keltirilgan.



Рис. 10: Kimyo ta’lim yo‘nalishida fanlararo bog‘liqlik sxemasi

Fanlararo bog‘liqlikni axborot texnologiyalari asosida o‘rganishda kimyo fani o‘qituvchisi keltirilgan barcha fanlar bo‘yicha kasbiy ko‘nikmalarga ega bo‘lishlari talab etilmaydi, ular faqat qaralayotgan jarayonni xarakterlovchi parametrlarning kompyuter dasturiga kiritiladigan dastlabki qiymatlari haqida hamda dasturning amalga oshirilishi natijasida olinadigan

parametrlarning qiymatlari va ularning mohiyati to‘g‘risida to‘liq tushunchalarda ega bo‘lishlari kifoya qilinadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 12 avgustdagi PQ-4805-son “Kimyo va biologiya yo‘nalishlarida uzluksiz ta’lim sifatini va ilm-fan natijadorligini oshirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori**

2. **Mengliyev I.A.** *Uglerod molekulalarining topologik xossalarini fanlararo bog‘liqlik va axborot texnologiyalarini qo‘llash asosida tadqiq etish metodikasi.*Pedagogik mahorat – Buxoro 2021, №6, 192-196 c.

3. **Endryus Dj., Mak-Loun R.** *Matematicheskoye modelirovaniye.* M.: Mir, 1979.-280 s. *УДК 515.55*

Topologik fazolarning zichligi va lokal zichligini o‘qitishda ilmiy izlanishlar metodidan foydalanish

Muxamedkulova A. A.[1], Mamatov J. X.[2]
[1]Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, Uzbekistan;
asiyadilzara@gmail.com
[2]Jizzax Politexnika instituti, Jizzax, Uzbekistan;
johansson_world@mail.ru

Ushbu ishda topologiik fazolarning zichligi va lokal zichligini o‘qitishda ilmiy izlanishlar metodidan foydalanish bo‘yicha to‘liq tavsiyalar hamda xulosalar haqida so‘z yuritiladi. Natijada esa bu metodlar talabalarni faol ishtirokchi qilish, mavjud bo‘lgan mavzuga doir ilmiy natijalardan samarali foydalana olish, mavzuni chuqurroq tushunishga undash va mustaqil fikrlash ko‘nikmalarini rivojlantirishga yordam beradi.

Topologiik fazolarning zichligi va lokal zichligini o‘qitishda ilmiy izlanishlar metodidan foydalanish oliy ta’lim tizimida samarali metodlardan biri hisoblanadi, chunki bu metod orqali nazariy tushunchalarni mavjud ilmiy natijalar yordamida nafaqat qayta bayon qilish, balki yangi natijalar kashf etish ham mumkin.

Endi biz quyidagi ketma-ketlikda to‘liq tavsiyalarni bosqichma-bosqich keltiramiz:

1. Maqsadni aniqlash - tadqiqot savollarini shakllantirish.

Maqsadni aniqlash: Zichlik va lokal zichlik kabi tushunchalarga turli xil yondashuvlar yordamida ta’rif berish . Ya’ni fazoda zich yoki lokal zich joylashgan eng kichik quvvatli to‘plamlarni aniqlash, to‘plamlarning zich va lokal zich bo‘lishlik shartlari, maxsus fazolarda (metrik, Tikhonov, Stone-Chech kompaktifikatsiyasi) zichlik va lokal zichlikni hisoblash. Metodni qo‘llashni qaysi tushunchani o‘rgatishga qaratishni aniq belgilab olish tavsiya etidali.

2. Fundamental nazariy bilim - ta’riflar va asosiy xossalar

Topologik fazolarning zichligi va lokal zichligiga aniq ta’riflar berilib, misollar yordamida tushuntiriladi va ularning muhim bo‘lgan asosiy xossalari isbotlari bilan keltiriladi. Bundan maqsad mavzuga doir mashq va masalalarning turli xil yechimlarini oldin mavjud bo‘lgan ilmiy natijalar yordamida bayon qilishdan iborat.

3. Metodologik usullar - isbotlash texnikalari va konstruktsiyalar

1. Konstruktsiya orqali misollar va qarshi misollar qurish;
2. Kardinal invariantlar yordamida taqqoslashlar tekshiruvi;
3. Funksional usul va akslantirishlar yordamidagi tasvirlar;
4. Topologik o‘yinlar va seleksiyon prinsiplar;
5. Algebraik va o‘lchovli usullar.

Adabiyotlar

1. **Diego Vizcaнno, Victor Vargas, Adriana Huertas** *Teaching of Topology and its Applications in Learning: A Bibliometric Meta-Analysis of the Last Years from the Scopus Database* Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2006, 117.

2. **Tyflopoulos E., Haskins C., Steinert M.** T *opology-Optimization-Based Learning: A Powerful Teaching and Learning Framework under the Prism of the CDIO Approach.* Educ. Sci. 2021, 11, 348. https://doi.org/10.3390/educsci11070348

УДК 515.55

Topologik fazolarning salmog‘i va to‘rli salmog‘ini o‘qitishda algebraik metodlardan foydalanish

Muxamedkulova G. A.[1], Mamatov J. X.[2]
[1]Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, Uzbekistan;
asiyadilzara@gmail.com
[2]Jizzax Politexnika instituti, Jizzax, Uzbekistan;
johansson_world@mail.ru

Ushbu ishda topologiik fazolarning salmog‘i va to‘rli salmog‘ini o‘qitishda algebraik metodlardan foydalanish bo‘yicha to‘liq tavsiyalar hamda xulosalar haqida so‘z yuritiladi. Topologiik fazolarning turli salmoqlarini, xususan salmoq, to‘rli salmoq kabilarni o‘qitishda algebraik metodlardan foydalanish talabalarni faol ishtirokchi qilish, mavjud bo‘lgan mavzuga doir ilmiy natijalardan samarali foydalana olish, mavzuni chuqurroq tushunishga undash va mustaqil fikrlash ko‘nikmalarini rivojlantirishga yordam beradi.

Topologik fazolarning salmog‘i va to‘rli salmog‘i kabi kardinal invariantlarini o‘rganishda ilmiy algebraik metodlardan foydalanish bo‘yicha aniq faktlar va to‘liq tavsiyalarni keltirib o‘tamiz.

1. Asosiy tushunchalar.

1. Salmoq (weight) - bu fazoning eng kichik bazasining quvvati.

$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ - Xda baza$\}$.

2. To‘rli salmoq (network weight) - bu fazodagi eng kichik to‘rining (network) quvvati:

$nw(X) = \min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N}$ - Xda to‘r$\}$.

Ixtiyoriy topologik fazoning salmog‘i va to‘rli salmog‘i orasida har doim quyidagi munosabat o‘rinli: $nw(X) \leq w(X)$.

2. Algebraik metodlarning qo‘llanishi.

Topologik fazolarda salmoq va to‘rli salmoq kabi invariantlarni o‘rganishda quyidagi algebraik usullar samarali hisoblanadi:

1) Kardinal funksiyalarni algebraik tavsiflash.

$w(X)$ va $nw(X)$ ko‘pincha funktorlar va ob’ektlar orasidagi izomorfizmlar orqali o‘rganiladi. Masalan, agar $f : X \to Y$ uzluksiz sur’yektiv bo‘lsa, u holda quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi: $nw(Y) \leq nw(X), \quad w(Y) \leq w(X)$.

2) Bo‘linmalar va qoplamalar nazariyasi.

Har qanday baza yoki to‘rni algebraik kombinatsiya sifatida ko‘rish mumkin: to‘g‘ri yig‘indi orqali fazoni turli komponentalarga ajratish.

Qoplamalar algebrasi - qoplamalarni kombinatorik struktura sifatida ko‘rib chiqish va ulardan minimal baza yoki to‘rning quvvatini hisoblash.

3) Filtrlar va ultrafiltrlar apparati.

Topologiyani filtrlar bilan tavsiflab, ularning ochiq, yopiq to‘plamlari sonini hisoblash orqali $w(X)$ va $nw(X)$ga baho beriladi.

Ultrafiltrlarning mavjudligi (Zorn lemmasi yordamida) ko‘pincha minimal quvvatni isbotlashga xizmat qiladi.

4) Algebraik topologiya bilan bog‘lash.

Ba’zi hollarda fundamental gruppa, fazolarning ko‘paytmasi yoki ko‘rsatkichli funktorlar orqali kardinal invariantlar yuqoridan yoki pastdan baholanadi. Masalan:

$$w(X \times Y) = \max\{w(X), w(Y)\}, \quad nw(X \times Y) = \max\{nw(X), nw(Y)\}.$$

5) Kombinator algebra va to‘plamlar nazariyasi.

$\triangle$-sistemalar, Morita tipidagi kombinator algebralar, hosil qiluvchi to‘plamlari yordamida minimal baza yoki to‘rning quvvatlari hisoblanadi.

Ayniqsa, CH (Continuum Hypothesis) yoki Martin aksiyasi kabi to‘plamlar nazariyasidagi qo‘shimcha gipotezalar ostida $w(X)$ va $nw(X)$ kabi invariantlarning nozik farqlarini o‘rganish mumkin.

Adabiyotlar

1. **Diego Vizcaнno, Victor Vargas, Adriana Huertas** *Teaching of Topology and its Applications in Learning: A Bibliometric Meta-Analysis of the Last Years from the Scopus Database* Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2006, 117.

2. **Tyflopoulos E., Haskins C., Steinert M.** T *opology-Optimization-Based Learning: A Powerful Teaching and Learning Framework under the Prism of the CDIO Approach.* Educ. Sci. 2021, 11, 348. https://doi.org/10.3390/educsci11070348

KVADRAT FUNKSIYANINING ENG KATTA VA ENG KICHIK QIYMATLARIGA BO‘GLIQ BA’ZI MASALALARNI YECHISH USULLARI.

Qurbonov N.X.[1]

[1]Ter.DPI,v.b.dotsent.(PhD)., Termiz, O‘zbekiston; normurodqurbonov1958@gmail.com

Anotatsiya. Mazkur maqolada kvadrat funksiyani eng katta va eng kichik qiymatiga olib keladigan parametrik misollarni yechish usullari keltirilgan.

Kalit so‘zlar: kvadrat funksiya, maksimum, minimum, absissa, ordinata, tenglama, parametr, grafik.

Kvadrat funksiya umumiy o‘ta maktab darsliklarida uchraydigan asosiy funksiyalardan biridir. $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ funksiya kvadrat funksiya deyiladi. Kvadrat funksiyani grafigi paraboladan iborat bo‘lib, $a > 0$ bo‘lsa, parabola tarmoqlari yuqoriga yo‘nalgan bo‘ladi, $a < 0$ bo‘lsa, parabola tarmoqlari pastga yo‘nalgan bo‘adi. Parabola uchini koordinatalari:

Absissasi: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{(x_1+x_2)}{2}$, bunda x_1 va x_2 kvadrat funksiyani nollari.

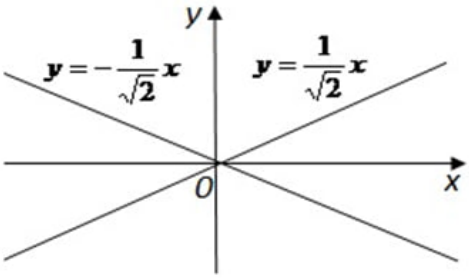
Ordinatasi: $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = \frac{(4ac-b^2)}{4a}$.

Agar $a > 0$ bo‘lsa, $\min f(x) = f(x_0) = \frac{(4ac-b^2)}{4a}$ bo‘ladi.

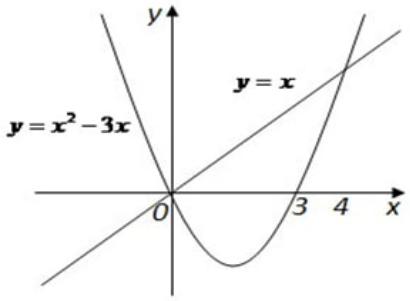
Agar $a < 0$ bo‘lsa, $\max f(x) = f(x_0) = \frac{(4ac-b^2)}{4a}$ bo‘ladi.

Biz quyida ikki o‘zgaruvchili funksiyani qaraymiz, birinchi holda birinchi o‘zgaruvchini qiymatlarida bu fuksiyani eng kata va eng kichik qiymatlarini topamiz, ikkinchi o‘zgaruvchini parametr sifatida qaraymiz. Keyin, asl maqsadga o‘tgandan so‘ng paramerni asosiy o‘zgaruvchi sifatida qarab masalani yechimi tomon boramiz. Misollarga murojaat qilaylik.

1-misol. $\max\limits_{b} \min\limits_{a} (4a^2 - 12ab - 4ax + 5b^2 + 22x - x^2) = 56$ tenglikdan x ning qiymatini toping.



1-rasm



2-rasm

Yechish. 1)

$$y_1(a) = 4a^2 - 12ab - 4ax + 5b^2 + 22x - x^2 =$$
$$= 4(a - 1/2(3b + x))^2 - 4b^2 + 16bx - 2x^2.$$

Bu funksiya $a = 1/2(3b+x)$ bo‘lsa, eng kichik qiymati $\min\limits_a y_1(a) = -4b^2+16bx-2x^2$ ga erishadi.

2)

$$y_2(b) = -4b^2 + 16bx - 2x^2 = -4(b - 2x)^2 + 14x^2$$

dan ko‘rinadiki: $\max\limits_b y_2(b) = 14x^2$. U holda: $14x^2 = 56$ tenglama hosil bo‘ladi.Bundan: $x_{1,2} = \pm 2$.

2-misol. Quyidagi

$$\min_x(4x^2 + 4xy - y^2) = \max_y(-2x^2 - 4xy - 4y^2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladigan barcha $(x; y)$ nuqtalar to‘plamini tekislikda tasvirlang.

Yechish. 1)

$$y_1(x) = 4x^2 + 4xy - y^2 = 4(x + 1/2y)^2 - 2y^2$$

tenglik o‘rinli. $y_1(x)$ funksiya $x = -1/2y$ bo‘lsa, eng kichik qiymati $-2y^2$ ga erishadi, ya’ni $\min\limits_x y_1(x) = -2y^2$.

2)

$$y_2(y) = -2x^2 - 4xy - 4y^2 = -4(y + 1/2x)^2 - x^2$$

tenglik o‘rinli. $y_2(y)$ funksiya $y = -1/2x$ bo‘lsa, eng katta qiymati $-x^2$ ga erishadi, ya’ni $\max\limits_y y_2(y) = -x^2$ tenglik o‘rinli. U holda: $-2y^2 = -x^2$ tenglik kelib chiqadi. Bundan: $y = \pm 1/\sqrt{2}x$. (1-rasm).

3-misol. $y = \min\limits_a(a^2 - 2ax + 2x^2 - 3x)$ va $y = \max\limits_b(-b^2 + 2bx - x^2 + x)$ chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini toping.

Yechish. 1)

$$y = \min_a(a^2 - 2ax + 2x^2 - 3x)$$

chiziqni tenglamasi aniqlaymiz. $y = \min\limits_a(a^2-2ax+2x^2-3x) = \min\limits_a((a-x)^2+x^2-3x) = x^2-3x$. Demak, $y = x^2-3x$ kvadrat funksiyani grafigi tarmoqlari yuqorida yo‘nalgan paraboladan iborat.

2) $y = \max\limits_b(-b^2 + 2bx - x^2 + x) = \max\limits_b((-(b - x)^2 + x) = x$. $y = x$ ni grafigi koordinata boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqdan iborat. $y = x^2 - 3x$ parabola va y=x to‘g‘ri chiziqni kesishish

nuqtalari absisalarini aniqlaymiz. $x^2 - 3x = x$ tenglikdan $x^2 - 4x = 0$ tenglama hosil qilamiz. Bundan: $x_1 = 0, x_2 = 4$ larni topamiz.(2-rasm). U holda bu chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzi:

$$S = \int_0^4 (x - (x^2 - 3x))dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = 10\frac{2}{3}.$$

Javob: $S = 10\frac{2}{3}$(kv.bir.).

Mazkur maqolada berilgan ma'lumotlardan o'quvchilar fanlar olimpiadasida tayyorlanishda foydalanishlari uchun tavsiya etamiz. O'quvchilarni bunday masalalarni yecha olishi matematikani chuqurroq o'rganishga undaydi.

Adabiyotlar

1. **Шарыгин И.Ф.** *Факультативный курс по математике. Решение задач Учебное пособие для 10 класса средней школы.* Москва. Просвещение-1989г.
2. **АзларовТ., Мансуров Х.** *Математик анализ.кисм 1.* Т.: ук.,1986.-408.б.
3. **Qurbonov N.X.** *Maxsus yo'l bilan yechiladigan algebraik masalalar.* Termiz. Surxon -nashr. 2021. 240.-b.
4. **Mirzaaxmedov M.A., Sotiboldiyev.** *O'quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash.* T.: Mumtoz so'z. - 2010.

UDC 378.091.3:514

Lecture Plan for the "Surfaces of the Second Order"Module

Safarov T. N.[1], Ashurmamatova Sh. I.[2], Ismoilov A. I.[3]
[1),2),3)]Termiz State University, Termiz, Uzbekistan;
[1)]tolqin.1986@mail.ru, [2)]s98973400@gmail.com, [3)]aslbeki477@gmail.com

In explaining "surfaces of the second order,"the role of pedagogical technologies is significant, as the teacher can achieve the objective with the help of applicable pedagogical technologies.

The objective of this lecture plan for the "Surfaces of the Second Order"module within the subject of "Geometry"is to introduce students to the topics included in this module and to develop their knowledge in this field.

Topic: General Equation of Second-Order Surfaces

Among the important surfaces related to second-order surfaces are hyperboloids [1], [2].

In teaching the subject of the general equation of second-order surfaces, it is necessary to form students' knowledge, skills, and competencies regarding the topic.

Assignments for the script of a review-and-summation lecture session on the topic of "The General Equation of Second-Order Surfaces."

Roll call is conducted in the group, and the topic and objective of the session are announced:

Topic: The General Equation of Second-Order Surfaces.

The objective of teaching this topic is to enable students to learn about subjects related to second-order surfaces, compare them with other surfaces, and develop their base of geometric knowledge.

To select the assignments to be given to students during the session, to check and evaluate the completed assignments, and to determine which student's opinion to listen to during discussions, an expert group consisting of 3 students is selected based on the proposals of the group's students.

During the session, the experts are given a number of freedoms:

* they call students to order;
* they motivate passive participants;
* they determine the examples to be given to the groups;
* they check and evaluate the written assignments completed by the students.

In this context, a precise and academic translation would be:

The teacher observes the students' work with the experts and provides feedback when needed.

The experts divide the group of students into three sub-groups. The maximum score for each correct and complete assignment is set at 1 point.

Assignment 1: The Method of Invariants for Simplifying the General Equation of Second-Order Surfaces.

The experts distribute the required assignment sheets to each student. Once the sheets have been distributed to everyone, permission is given to start the assignment. Three minutes are allocated for this task. A student signals that they have completed the assignment by raising their hand. The first two students who correctly complete the assignment before the deadline may receive various bonus points, up to 0.5 points, from the experts.

Every two students who have completed the assignment exchange their sheets with each other and check their partner's answers. The checking is to be done with red ink. The time limit for checking is 2 minutes. The answer sheets that have been checked are handed over to the experts. The answer sheets of students who fail to complete the task within the time limit are also collected.

Until the experts have checked the answers and corrections, the teacher offers the students an example to solve.

Based on the results of the evaluation, the experts select one student who performed well and one who performed poorly and invite them to a discussion. The student with the low score writes their answer on the board, while the student with the high score points out and corrects their mistakes.

Students evaluate the presenter based on the accuracy of the corrections, the clarity and fluency of the student's speech, and the logical structure of their response. Those who are in favor of adding 1 bonus point raise their hands; those who are neutral or against it do not. If more than 10 students raise their hands, the bonus point is awarded. We believe that setting a high value for this bonus point is necessary to cultivate the qualities of future educators from an early stage.

The points each student earns for Assignment 1 are recorded in a special table.

Assignment 2: Comparative Analysis of the Classification of Second-Order Surfaces (Convex, Saddle-Shaped, and Developable Surfaces)

The experts distribute assignment sheets for drawing a cluster that reflects the relationships between geometric concepts in the classification of second-order surfaces. Ten minutes are allocated for this assignment. The experts note the time spent on the answer sheets of those who complete the task before the deadline.

After the specified time has elapsed, the experts collect the answers and check them while the students complete the next assignment. The experts grade the clusters out of 1 point based on the number of correctly included concepts and the time of completion. The relationships established within the clusters will be thoroughly reviewed by the experts and the teacher and will be analyzed with the students in the next lesson, earning them an additional 3 points.

Assignment 3: Analysis of Second-Order Curves Formed by Conic Sections

The teacher provides feedback on the students' in-class performance and their comments on the topic, then proposes a 10-minute test. The test questions are prepared on individual cards for each student. The test results are checked and the students are graded. The teacher then assigns the homework for the next session.

Literature

1. **Yunusova D.I.** *Modern technologies for teaching mathematics.* Darslik.: Modern technologies for teaching mathematics.
2. **Safarov T.N.** *" Improving the methodology of the discipline"fundamentals of geometry".* Scientific-theoretical and methodological "Bulletin of the Urgench State Pedagogical Institute"magazine. 1. 2025. Urganch. 286-292pp.

O‘ZGARUVCHILAR O‘RTASIDAGI MUNOSABATLARNI O‘RGANISHDA KORRELYATSION-REGRESSION TAHLIL USULIDAN FOYDALANISH.

Sakiyeva O. B., Xushvaqtova D. R..
Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston; ozodasakieva@gmail.com;

Fanda o‘zgaruvchi (belgi)lar o‘rtasidagi bog‘lanishlar xarakteriga ko‘ra quyidagi turlarga bo‘linadi:

- funksional bog‘lanish;
- korrelyatsion bog‘lanish.

Bazi holatlarda esa ikkala bog‘lanish aralash holatda ham kelishi mumkin. Funksional bog‘lanishda bir o‘zgaruvchi belgining har qaysi qiymatiga boshqa o‘zgaruvchi belgining aniq bitta qiymati mos keladi. Bunday bog‘lanishning muhim xususiyati shundaki, bunda hamma omillarning to‘liq ro‘yxatini va ularning natijaviy belgi bilan bog‘lanishini to‘la ifodalovchi tenglamani yozish mumkin.

Funksional bog‘lanishlarni to‘liq bog‘lanishlar deb ham atashadi. Korrelyatsion (yoki noto‘liq) bog‘lanishda omil belgining har bir qiymatiga natijaviy belgining aniq qiymati emas, balki har xil qiymatlar mos keladi. o‘zaro bog‘lanishlarni o‘rganishda eng keng qo‘llaniladigan metodlardan biri korrelyatsion-regression tahlildir.

Regression tahlilning asosiy sharti shundaki, faqat natijaviy o‘zgaruvchi normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi, ta’sir etuvchi omillar esa ixtiyoriy taqsimot qonuniga bo‘ysunishi mumkin. Bu tahlilda natija (Y) va omillar (X_i) o‘rtasida sabab-natijaviy bog‘lanish mavjudligi nazarda tutiladi. Regressiya tenglamasi Y va X o‘rtasidagi munosabatni ifodalaydi. Oddiy eng kichik kvadratlar bu maqsadga quyidagi ifodani minimallashtiruvchi chiziqni topish orqali erishadi:

$$\min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{Y}_i)^2$$

bu yerda Y_i вЂ” i-kuzatish uchun natijaviy o‘zgaruvchining haqiqiy qiymati, $\widehat{Y}_i$ вЂ” i-kuzatish uchun taxmin qilingan qiymat..

Regression tahlilning asosiy bosqichlari

Ilmiy masalani qo‘yish;
Ma’lumotlarni yig‘ish va dastlabki qayta ishlash;
Regressiya tenglamasini tuzish va uning dastlabki baholanishi;
Regressiya tenglamasini yechish, regressiya koeffitsientlarini hisoblash, omillar o‘rtasidagi bog‘lanish zichligini baholash va tenglamani tekshirish;
Umumiy, faktorli va qoldiq dispersiyalarni aniqlash hamda ularni solishtirma tahlil qilish;
Regressiya modelini kiritilgan omillar o‘rtasidagi korrelyatsiya zichligini baholash;
Regressiya tenglamasi parametrlarining ishonchliligini statistik baholash, nazariy kutilgan qiymatlar uchun ishonch intervallarini aniqlash;
Tadqiq etilayotgan hodisaning kelgusi ko‘rsatkichlarini regressiya tenglamasi yordamida prognoz qilish.

Regression modellari

Regression modellari matematik tenglamalar bo‘lib, ular mustaqil o‘zgaruvchilar yordamida bog‘liq o‘zgaruvchi bilan munosabatni ifodalaydi. Tenglamaning shakli ishlatiladigan regressiya tahlilining turiga bog‘liq. Chiziqli regressiyada model quyidagi shakldagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

bu yerda Y –” bog‘liq o‘zgaruvchi, x –” erkli o‘zgaruvchi, β_0 –” boshlang‘ich qiymat, β_1 –” o‘zgarish koeffitsienti, ε –” xato atamasi.

Bir nechta mustaqil o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga olgan ko‘pchiziqli regressiya quyidagicha yoziladi:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon$$

Regression tahlilining asosiy turlari

- **Chiziqli regressiya** – bog‘liq o‘zgaruvchi va mustaqil o‘zgaruvchilar orasidagi chiziqli munosabatni o‘rganadi.
- **Ko‘ chiziqli regressiya** –bir nechta mustaqil o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga oladi.
- **Nochiziqli regressiya** – murakkab, chiziqli bo‘lmagan munosabatlarni modellashtiradi.
- **Logistik regressiya** – kategorik natijalarni bashorat qilish uchun ishlatiladi.

Kuchli va zaif tomonlari

Kuchli tomonlari:

- Interpretatsiya qulayligi – regressiya koeffitsientlari o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi munosabatlarni tushuntirish imkonini beradi.
- Prognozlash – regressiya modellari mustaqil o‘zgaruvchilar qiymatlariga asoslanib natijani taxmin qiladi.

Zaif tomonlari:

- Taxminlarga sezuvchanlik –chiziqlilik, homosedastiklik va mustaqillik buzilganda natija noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin.
- Sabab-natija munosabatini to‘liq aniqlay olmaydi, faqat bog‘lanishni ko‘rsatadi.

Xatolar va ularni bartaraf etish

Multikollinearlik: mustaqil o‘zgaruvchilar o‘rtasida yuqori korrelyatsiya mavjud bo‘lsa, regressiya koeffitsientlari beqaror bo‘ladi.

Geterokedastiklik: xato atamalari dispersiyasi barqaror bo‘lmaganda yuzaga keladi.

o‘tkazib yuborilgan o‘zgaruvchi: muhim o‘zgaruvchi modelga kiritilmagan bo‘lsa, natijalar buziladi.

Yechimlar:

- Ma’lumotlarni transformatsiya qilish.
- o‘zgaruvchilarni ehtiyotkorlik bilan tanlash.
- Mustahkam regressiya usullaridan foydalanish.

Xulosa

Regression tahlili o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi munosabatlarni modellashtirish va tahlil qilishda muhim rol o‘ynaydi. U ilmiy izlanishlarda, iqtisodiy tahlillarda va prognozlashda keng qo‘llaniladi.

Adabiyotlar

1. **Кремер Н.Ш.** *Теория вероятностей и математическая статистика.* Москва, 2004. 573 с.
2. **Гмурман В.Е.** *Теория вероятностей и математическая статистика.* Москва, 2003. 479 с.
3. **Бородич, С. А.** *Вводный курс эконометрики: Учебное пособие* - Мн.: БГУ, 2000. - 354 с.
4. **Новиков, А. И.** *Эконометрика: Учебное пособие.* - М.: ИНФРАМ, 2003. - 106 с.
5. **Shodmonov Sh.Sh., G‘afurov U.U.** *Iqtisodiyot nazariyasi.* T.: Fan va texnologiya, 2005.

MASOFAVIY TA'LIMNI O'QITISHDA INNOVATSION TEXNOLOGIYALAR

"Turdimuratov B.K.[1], Qurbonov A.B.[2]"

[1]Toshkent davlat tibbiyot universiteti, Termiz sh., O'zbekiston;
e-mail1baxtiyorturdimuratov6691@gmail.com
[2]Toshkent davlat tibbiyot universiteti, Termiz sh., O'zbekiston;
e-mai2labdullaqurbonov@mail.ru

Hozirgi zamon ta'limining bosh va asosiy vazifasi-talabaning intelektual darajasini, yaratuvchanligini, izlanuvchanligini takomillashtirish orqali yangi bilimlarni olish, yaratishga, ruhlantirishga qaratilmog'i zarur. Mamlakatimizda ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish davlat siyosatining ustuvor yo'nalishi sifatida e'tirof etilmoqda.

Bu maqsadni amalga oshirishda ta'limning yangi-yangi modellari yaratilmoqdaki, uning nazariy-metodik asoslari yetakchi mutaxassis-olimlar tomonidan ilmiy-amaliy tarzda isbotlab berilmoqda.

Zamonaviy axborot texnologiyalari taraqqiyoti ta'lim tizimiga ham o'z ta'sirini ko'rsatmoqda. Ayniqsa, so'nggi yillarda, dunyo bo'ylab ro'y bergan pandemiya davrida masofaviy ta'lim keng ommalashdi va an'anaviy ta'lim shakliga muqobil sifatida ko'rilmoqda. Bu ta'lim shakli o'quvchi va o'qituvchi bir joyda bo'lmagan holatda, internet yoki boshqa aloqa vositalari orqali ta'lim olishni anglatadi.

Masofaviy ta'lim - bu o'quv jarayonining elektron aloqa, internet platformalari, video darslar va boshqa raqamli vositalar orqali olib boriladigan shaklidir. Bu turdagi ta'lim odatda Moodle, Zoom, Google Classroom, Microsoft Teams kabi platformalarda tashkil etiladi.

Moslashuvchanlik va qulaylik. Talabalar o'zlariga qulay vaqtda va joyda ta'lim olishlari mumkin. Ayniqsa, ishlayotgan yoki boshqa sabablarga ko'ra to'liq kunlik ta'limda qatnasha olmaydiganlar uchun bu juda foydalidir.

Xarajatlarning kamayishi. Yo'l, yotoqxona, ovqatlanish kabi qo'shimcha xarajatlar yo'qoladi. Bu esa iqtisodiy jihatdan tejamkorlikni ta'minlaydi.

Resurslarning ko'pligi. O'quvchilar ko'plab elektron kitoblar, videodarslar, vebinarlar, testlar orqali bilimlarini mustahkamlash imkoniyatiga ega.

Shaxsiylashtirilgan o'qish. Har bir talaba o'z tezligida darslarni o'zlashtira oladi, murakkab mavzularni qayta ko'rib chiqish imkoniyati mavjud.

Jonli muloqot yetishmasligi. O'qituvchi va o'quvchi o'rtasida to'g'ridan-to'g'ri muloqot cheklangan. Bu esa savollarga tezkor javob olishni qiyinlashtiradi.

O'z-o'zini nazorat qilish zarurati. Masofaviy ta'limda talabalar mustaqil ishlashga majbur bo'ladilar. Bu esa o'zini boshqara olmaydiganlar uchun muammo tug'diradi.

Texnik muammolar. Internet tezligi pastligi, kompyuter yoki mobil qurilmalar yo'qligi ta'lim jarayonini to'xtatib qo'yishi mumkin.

Amaliy mashg'ulotlarning yetishmasligi. Tibbiyot, muhandislik, kimyo kabi fanlarda laboratoriya ishlari va tajriba asosidagi o'quvlar muhim. Masofaviy shaklda bunday mashg'ulotlarni to'liq amalga oshirish qiyin.

Masofaviy ta'limning texnologiya'lari va unda qatnashuvchilari. Masofaviy ta'limning asosiy texnologiyalariga quyidagilarni kiritish mumkin:

INTERAKTIV texnologiyalar:

Internet masofaviy ta'lim portali.

Video va audio konferentsiyalar.

Elektron pochta orqali ta'lim.

Internet orqali mustaqil ta'lim olish.

Uzoqdan boshqarish sistemalar.

Onlayn simulyator va o'quv dasturlar.

Test topshirish sistemalari.

Internet orqali mustaqil ta'lim olish - bu Internetda joylashgan ko'pgina saytlarda joylashgan katta hajmdagi ma'lumotlar ustidan mustaqil ravishda ishlash va yangi bilimlar olish yo'li. Elektron pochta orqali ta'lim esa eng ommaviy Internet xizmatlaridan foydalanib, o'quvchi va o'qituvchi o'rtasida xatlar orqali muloqot o'rnatib ta'lim olish yo'li. U yordamida har xil test, vazifa, savol-javob va ko'rsatmalarni (matn, grafika, multimediya, dasturlar va boshqa ko'rinishida) jo'natib qabul qilishimiz mumkin.

Uzoqdan boshqarish sistemalar - murakkab dastur, sistema va uskunalarni real holatda boshqarish va ularda ishlash imkoniyatlarini yaratuvchi maxsus sistemalar yordamida bilim olish yo'li. Uzoqdan boshqarish sistemalarning asosiy vazifasi o'quvchiga faqatgina amaliy bilimlarni berish.

Simulyator, elektron darsliklar va o'quv dasturlar - bu asosan nazariy va amaliy bilimlarni kompyuter dasturlari orqali o'quvchilarga off-layn holatida olish yo'li. Simulyator va elektron dasrliklar hozirgi kunda ta'lim sohasida juda keng qullanilyapti.

Test topshirish sistemalar - bu maxsus dasturlar yordamida o'quvchilarning amaliy va nazariy bilimlarni tekshirish uning asosiy vazifasi bu talabalar bilimlarini tekshirib ularni baholash.

Internetning masofaviy ta'lim portali bu maxsus Internet saytlar (onlayn resurslar). Ushbu saytlarning asosiy vazifasi - ta'lim jarayonini tashkil qilish, yoki boshqa so'zlar bilan o'quvchi va o'qituvchi o'rtasida elektron on-layn muloqotni o'rnatish, o'qituvchilarga o'quv materiallarni joylashtirish va o'quvchilarga shu ma'lumotlar bilan ishlashga hamda boshqa masofaviy ta'lim servislardan foydalanishga imkoniyat yaratish.

Masofaviy ta'lim zamonaviy texnologiyalar asosida shakllanayotgan muhim ta'lim shaklidir. Uning ko'plab qulayliklari mavjud bo'lsa-da, kamchiliklari ham inkor etib bo'lmaydi. Samarali masofaviy ta'lim uchun texnik infratuzilmani rivojlantirish, o'quvchilarni mustaqil ishlashga o'rgatish va interaktiv usullarni ko'paytirish zarur. Kelajakda masofaviy ta'lim an'anaviy ta'limga munosib qo'shimcha bo'lib, ta'lim sifatini oshirishda muhim rol o'ynashi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Mirziyoev Sh.M.** *Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent.: «O'zbekiston», 2017. 488 b.* T.: Mumtoz so'z. - 2010. - 356 c.
2. **Tolipov O'., Usmonboeva M.** *Pedagogik texnologiya:nazariya va amaliyot.* T.: «Fan», 2005
3. **Karimova D.** *Masofaviy ta'limning pedagogik asoslari.*Toshkent, 2022.
4. **Pedagogy of the Twenty-First Century: Innovative Teaching Methods http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.72341 Mynbayeva, Zukhra Sadvakassova and Bakhytkul Akshalova. New Pedagogical Challenges in the 21st Century - Contributions of Research in Education.**

UDK 378:147

BIRINCHI KURS TALABALARIDA MATEMATIK ANALIZ FANI AMALIY MASHG'ULOTLARDA MATEMATIK AXBOROT BILAN ISHLASH METODLARI SAMARADORLIGI

Umaraliyeva D.U.[1]
[1]Nizomiy nomidagi O'zMPU, Toshkent, O'zbekiston; khaldibekova96@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada matematik analiz fanining dastlabki bosqichida o'tkaziladigan amaliy mashg'ulotlarning mohiyati, vazifalari va metodik asoslari yoritilgan. Birinchi kurs

talabalari uchun amaliy mashg‘ulotlarda matematik axborot bilan ishlash ko‘nikmalarini shakllantirishda kognitiv, interaktiv va ijodiy metodlardan foydalanish masalalari ko‘rib chiqilgan. Talabalarda matematik matnni o‘qish, asosiy g‘oyani ajratish, teorema va isbotlarni tahlil qilish,natijalarni vizual ko‘rinishda ifodalash hamda ularni yangi vaziyatlarga tatbiq etish topshiriqlari ishlab chiqilgan.

Kalit so‘zlar: matematik analiz, amaliy mashg‘ulot, ta’lim metodlari, matn bilan ishlash, oliy ta’lim.

Zamonaviy oliy ta’limning bosh vazifalaridan biri вЂ” talabalarda nazariy bilimlarni amaliyotda qo‘llash, yangi bilimlarni mustaqil izlab topish va ulardan ijodiy foydalanish qobiliyatini shakllan tirishdir. Birinchi kurs talabalarida bu jarayon ko‘incha qiyinchilik bilan kechadi, chunki ular oliy ta’lim muhitida kitob va matematik matn bilan ishlash, isbotlarni tahlil qilish, ta’riflarni umumlashtirish ko‘nikmalariga yetarlicha ega emas. Shu sababli dastlabki amaliy mashg‘ulotlarda ularni mustaqil o‘quv faoliyatiga tayyorlash muhim o‘rin tutadi. Quyidagi vazifalar amaliy mashg‘ulotlarda talabalarni matematik axborot bilan mustaqil ishlashda oliy ta’limdagi mustaqil ishlash metodlari bilan tanishtirish,talabalar darslik, qo‘llanma va ilmiy maqolalar bilan mustaqil ishlashning asosiy usullarini o‘rganadilar, konspekt tuzish, savol-javob asosida matnni o‘zlashtirish, asosiy tushunchalarni ajratib ko‘rsatish metodlari shakllantiriladi, mustaqil ishlash jarayonida vaqtni boshqarish, reja asosida o‘qish va natijalarni yozib borish ko‘nikmalari rivojlantiriladi.

Ilmiy-pedagogik asoslar sifatida quyidagi A. Schoenfeld (1985), D. Jonassen, o‘zbekiston olimlari (Yoqubov R., Qodirova G.X., g‘ulomov Z.A., Ortiqxo‘jayev A.) pedagog olimlar va ularning takliflari inobatga olingan. [1;2;3;4;5].

Matematik axborot (matn, ta’rif, teorema, isbot) bilan ishlash ko‘nikmalarini shakllantirish jarayonida talabalarga matematik matndan asosiy g‘oya va ikkinchi darajali tafsilotlarni ajratib olishni o‘rgatish, matematik ta’riflarni o‘qib, ularning zaruriy va yetarli shartlarini tushunish, teorema va isbot matnlarini tahlil qilish, isbot bosqichlarini reja shaklida qayta tiklash, o‘quv materialini turli ko‘rinishlarda (jadval, sxema, chizma) qayta ifodalash orqali chuqurroq tushunishga erishish chuqurroq tushunishga erishish va natijada talabalarda mustaqil fikrlash, tanqidiy yondashuv hamda o‘zlashtirilgan bilimlarni amaliy vaziyatlarda qo‘llash kompetensiyalarini shakllantirish imkonini beradi.

Dastlabki amaliy mashg‘ulotlarda matematik axborot bilan ishlash maqsadida quyidagi qo‘llaniladigan metodlar darslarimizda tajribamizga asosan tanlab faol qo‘TMllanildi va quyidagi turlarga tavsiflandi:kognitiv, interaktiv, ijodiy va visual metodlar. Kognitiv metodlardan: Talabaga matematik matndan muayyan qism (masalan, limit yoki hosila ta’rifi) o‘qitiladi va u mazkur matnni o‘z so‘zlari bilan qayta izohlab beradi. Bu metod matnni yuzaki emas, balki ongli ravishda o‘zlashtirish, asosiy mazmun va ikkilamchi tafsilotlarni ajrata olishni ta’minlaydi. Tahlil va sintez metodi ham amaliy ahamiyatga ega bo‘TMlgan mavzularda qo‘TMllanilib kelmoqda. Matematik ob’ektlarni (ta’rif, teorema, isbot) tarkibiy qismlarga ajratish, shart va xulosalarni tahlil qilish hamda ular asosida umumlashtirilgan bilim hosil qilishdan iborat. Bu metod orqali talabalarda mantiqiy tafakkur, qiyoslash va umumlashtirish ko‘nikmalari rivojlanadi. Mantiqiy strukturaviy tahlil metodi deb o‘quv materialini jadval, sxema yoki diagramma shaklida qayta ifodalash orqali talabalarda matematik tushunchalar va ular o‘rtasidagi bog‘lanishlarni yaxshiroq anglash imkoniyati yaratiladi. Interaktiv metodlardan quyidagi metodlar mavzuning mazmunni chuqur anglashga qo‘TMllanildi. Masalan, Issiq stul metodi вЂ“ Talabani markazga olib chiqib, unga savollar berish orqali muhokama qilish. Ijodiy metodlardan; Yana bir metod, tadqiqot usuli metodi вЂ“ o‘qituvchi misollar beradi, talabalar umumiy qoida yoki teoremani chiqaradi. Bu usul tahliliy fikrlashni kuchaytiradi. Matematik analiz talabalar tomonidan o‘rganishda axborot bilan ishlashda vizual metodlardan foydalanish o‘quv materialining chiziqli matnli taqdimotiga

nisbatan bir qator afzalliklarga ega.

Xususan, yangi bilim va harakat usullarini tezroq va yaxshiroq egallash, o‘quv materiali bilan ishlashning yanada oqilona usullarini o‘zlashtirish, javob berishda materialni malakali va aniq taqdim etish; munozaralarda asosli gapirish; xulosalarni shakllantirish, o‘rganayotgan materialni eslab qolishni osonlashtirish, olingan bilim va harakat usullarini tizimlashtirish, individual psixologik xususiyatlariga mos keladigan sur’atda ishlashga imkon beradi. Tajriba davomida matematik analizga oid o‘quv axborotlarini o‘rganish jarayonini vizuallash qilish vositasi sifatida biz o‘quv matematik ma’lumotlarini ifodalash uchun vizual modellardan ham foydalandik: Freyer modeli, freymlar, aqliy xaritalar, blok-sxemalari, klasterlar va boshqalar. o‘quv matematik axborotni taqdim etishning vizual modellaridan foydalanish uchun majburiy talablar quyidagilardan iborat: belgili tilning uchta tilidan (visual obraz, matn, formula) foydalanish va axborotni siqish. Bu talabalarda belgi-ramziy harakatlar va bilimlarni strukturlash ko‘nikmalarini, shuningdek, analiz va sintezning mantiqiy harakatlari rivojlanishiga yordam beradi. Amaliy mashg‘ulot darslarida matematik analiz fanidan biror mavzuni olib unga oid matnni yaxlit o‘rganish uchun quyidagi o‘quv topshiriqlar tizimiga murojaat qilamiz.

Birinchi kurs talabalarida matematik analiz bo‘yicha dastlabki amaliy mashg‘ulotlarni turli kognitiv,interaktiv va ijodiy metodlar asosida tashkil etish talabalarni matn bilan ishlashga o‘rgatib, mustaqil fikrlash, tahlil va ijodiy yondashuvni rivojlantirib, o‘qituvchi va talabalar o‘rtasida faol muloqotni ta’minlab, oliy matematikaning keyingi bosqichlarini samarali o‘zlashtirish uchun poydevor yaratadi.Amaliy mashg‘ulotlarda metodlarning integratsiyalashgan qo‘llanilishi talabalarda mustaqil fikrlash, tanqidiy yondashuv va ijodiy tafakkurni rivojlantirishda yuqori samaradorlik ko‘rsatadi.

Adabiyotlar

1. **Schoenfeld, A. H.** *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press, 1985.
2. **Jonassen, D.** *Learning to Solve Problems with Technology: A Constructivist Perspective.* New Jersey: Pearson, 2010.
3. **Yoqubov R., Qodirova G. X., Eshmamatov I.** *Oliy ta’limda raqamli savodxonlik va axborot madaniyatini rivojlantirish masalalari.* o‘zbekiston Pedagogika Jurnali, 2020.
4. **G‘ulomov Z. A.** *Matematik tushunchalarni o‘zlashtirishda tanqidiy fikrlashning roli.* Ta’lim va Innovatsiyalar, 2019.
5. **Ortiqxo‘jayev A.** *Talabalarda matematik fikrlashni axborot-kommunikatsiya vositalari orqali shakllantirish.* Pedagogika va Psixologiya, 2021.

Метод вычисления интеграла тригонометрических функций

Базаргельды Сапаргельдыев
Туркменский государственный архитектурно-строительный институт, Ашхабад, Туркменистан;

Для преподавания математики недостаточно обладать только математическими знаниями, но и педагогическими знаниями и навыками их правильного применения. Ведь изучение математики требует логического мышления, большого труда и внимания. Развитие этих качеств у изучаеших математики – задача педагогики. Поэтому педагогика играет важную роль в обучении математике. Интегральная часть математического анализа тесно связана с такими её разделами, как функция и её непрерывность, предел функций, производный и

дифференциал функций. Вычисление неопределённых интегралов — один из самых увлекательных и интересных её разделов. В зависимости от интегрируемой функции неопределённые интегралы бывают разных видов, и методы их вычисления также различны. Методика является главное осново вычисления неопределённых интегралов.

Как известно, метод вычисления с помощью универсальной подстановки при вычислении интегралов тригонометрических функций позволяет вычислить любой интеграл этого типа. Однако нельзя сказать, что, применяя этот метод при вычислении интегралов всех тригонометрических функций, можно получить искомое решение за один шаг. Покажем это на следующем примере вычисления интеграла. Пример. Вычислить интеграл [2, стр. 194]

$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$$

Решение: Сначала давайте рассмотрим, как вычислить следующий интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(a-b)\,dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin((x+a)-(x+b))\,dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{(\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b))\,dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \left[\int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b)\,dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} - \int \frac{\cos(x+a)\sin(x+b)\,dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \left[\int \frac{\cos(x+b)\,dx}{\sin(x+b)} - \int \frac{\cos(x+a)\,dx}{\sin(x+a)} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \left[\int \frac{d(\sin(x+b))}{\sin(x+b)} - \int \frac{d(\sin(x+a))}{\sin(x+a)} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \left[\ln|\sin(x+b)| - \ln|\sin(x+a)| \right] + C =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \left[\ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| \right] + C \tag{1}$$

Для интегрируемой функции сначала $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$, а затем используем уравнение (1):

$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}} = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x+a}{2}\right)} =$$

$$= -\int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)} =$$

$$= -\frac{1}{\sin\left(-\frac{a}{2}-\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)} \left[\ln \left| \frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2}\right)} \right| \right] + C =$$

$$= -\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}\left[\ln\left|\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right|\right]+C=\frac{1}{\cos a}\left[\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|\right]+C;$$

Как видим, выбранный метод оказался эффективным для получения искомого решения интегрального исчисления. Его также можно получить, используя универсальную подстановку. Однако для получения искомого решения необходимы дополнительные вычисления. Данный метод, касающийся интегрального исчисления тригонометрических функций, представляет собой педагогическую методику, связывающую знания, полученные в школьной программе по математике, со знаниями, полученными в вузе, и поэтому может быть использован на подготовительных и практических занятиях к олимпиаде по математике.

Литература

1. **Каплан И.А.** *Практические занятия по высшей математике. Часть 3, 1965 г.*
2. **Демидович Б.П.** *Сборник задач и упражнений по математическому анализу, 1995 г.*

Критерии обучения учеников логическому мышлению.

Папышев А. А.
Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан;
darap57@mail.ru

Процесс формирования гармонично развитой личности включает важную роль эстетическое воспитание школьников. Математика как учебный предмет имеет большой потенциал в воспитании учащихся. Математика богата красивыми формулами, доказательствами, рисунками и схемами. Формирование ценностных ориентаций личности через её стремления, освоение материала, развитие и формирование творческих способностей учащихся. Теория и методика математики, воспитание учащихся на уроках математики были исследованы рядом зарубежных ученых, таких как В.Г.Болтянский, В.Л.Минковский, Г.И.Саранцев, Н.И.Фирсова, В.И.Крупич и другие [1-5]. Анализ ранее проведенных научных работ показывает, что проблемы эстетического воспитания учащихся рассматривались в аспекте: - основные требования к содержанию, задачи, направленные на формирование эстетического вкуса учащихся, методические рекомендации, связанные с решением планиметрических задач и эстетическим вкусом учащихся; эстетическое развитие и формирование разделяются на три основных уровня, в ходе решения планиметрических задач вкус учащихся; система задач, направленных на формирование и развитие эстетического воспитания, проверена на практике в процессе преподавания геометрии в основной школе, формирует и развивает эстетический вкус учащихся (Г.И.Саранцев, В.И.Крупич); - эстетическая привлекательность математики (факты, теоремы, задачи, способы обсуждения); автор разработал методику формирования математических понятий и обучения, приводя список теорем и эстетически привлекательных задач в контексте развития эстетического воспитания учащихся. Проблема использования эстетического потенциала математики в обучении и воспитании учащихся является темой нескольких исследований. Мнения авторов этих исследований весьма разнообразны. Применение эстетического потенциала математики как эмоционального фона учебного процесса и необходимость использования красоты как начального понятия учебного процесса поддерживаются.

Однако многие работы связаны с методикой воспитания учащихся в процессе обучения математике.Некоторые исследователи показывают уровень эстетического становления. Это приводит к следующей иерархии обобщений уровней: 1) чувственный, яркий опыт; 2) избирательное рассмотрение изучаемого математического содержания, самостоятельное и

осознанное выделение элементов, отличающихся своей выразительностью; 3) стремление учащегося к самому простому, упорядоченному, естественному, выразительному и одновременно неожиданному виду представления материала и соответствующих математических методов деятельности. Это сочетание эстетических характеристик авторы ставят в основу методической работы по эстетическому воспитанию учащихся: 1) целенаправленное включение эстетического критериального аппарата в выбор элементов работы учащихся; 2) представление математических идей в наглядной форме, выбор контрастных сравнений, которые делают эти идеи запоминающимися; 3) создание особых случаев известных методов и их комбинаций, выделение системы отношений, ведущих к невидимым выводам и неожиданным сходствам. Возникает ряд вопросов: какие геометрические фигуры имеют привлекательность? Какова природа этой привлекательности? Необходимо ли изучать математические законы в кратких формулировках и их аналитических записях? Как осуществляется переход с одного уровня эстетического становления на другой, более высокий? Как связаны направления формирования эстетической культуры учащихся? Какие формы представления учебного материала особенно характерны для учащегося? и так далее. Механизмы воздействия эстетических причин на учебную деятельность учащихся, отсутствие четкой характеристики эстетического потенциала в процессе формирования понятий теорем и решения задач оставляют эти вопросы без ответа в традиционной педагогической практике преподавания математики. Однако стоит отметить, что разъяснение понятия красоты, разработанное в первом параграфе этой главы, полноценно отвечает на вышеуказанные вопросы и помогает понять эстетическое становление в образовании учащихся. Вопросы эстетического воспитания в математическом образовании также обсуждаются в ряде работ, направленных на гуманизацию математического образования (А.И.Азевич, Т.А.Иванова и другие). Например, Т.А.Иванова считает, что эстетическая направленность математического образования может быть представлена как явно, так и неявно. Особенно это касается содержания, когда эстетическая сторона обнаруживается в математических доказательствах, формулах и т.д., а эстетическая направленность обучения математике связывается с процессом получения новых математических знаний для ученика. Это утверждение не приносит новых взглядов на решение методических проблем в области эстетики. А.И. Азевич видит сущность эстетической направленности математического образования в широком демонстрировании возможностей математики.

Таким образом, эксурс в методические исследования показал, что проблема эстетики в обучении математике остаётся неразрешённой: отсутствует разъяснение понятия красоты математического объекта, нет чёткой иерархии уровней эстетического становления, не определена роль эстетических побуждений в освоении учебного материала и т.д. Итак, красота математического объекта связана с взаимодействием образа этого объекта, который создан нашим психическим восприятием, и его оригинальности, которая выделяет его среди других объектов. Источники эстетической привлекательности математических объектов (понятий, теорем, задач, способов обсуждения) могут быть связаны с гармонией частей, симметрией их логической строгости и противоречием между сложностью задачи и простотой методов её решения, неожиданно открывающейся простотой. Эстетическое раскрытие потенциала математики возможно только в творческой деятельности учащихся. Восприятие красоты математики характеризуется несколькими уровнями. Иерархия этих уровней включает в себя эстетическую привлекательность математического объекта от соответствия его образа и представления до стремления учащегося осознанно разгадать закономерности и построить новый, оригинальный вывод, найти новые задачи и т.д. На этом уровне красота проявляется в неожиданных, оригинальных решениях, строгих доказательствах и поиске различных приложений. Желание устранить несоответствия между объектами, создать симметрич-

ные объекты, дополнить части, рассматривать отдельные случаи, постепенно приводит к активной исследовательской деятельности, где ведущую роль играет задача.

Литература

1. **Болтянский В.Г.** *Методическое пособие к углубленному курсу развивающего математического образования.* М: Иститут учебника «Пайдейя», 2008.
2. **Минковский В.Л.** *Ошики в математических рассуждениях.* Наука, 2018. – 329с.
3. **Саранцев Г.И.** *Методика обучения математике в средней школею* Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. М: Просвещение, 2007.
4. **Фирстова Н.И.** *Введение элементов эстетического воспитания в контекст школьных учебников по математике.* Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика: Материалы Всероссийской научной конференции. Саранск, 18-20 сентября 2002 г.

Teaching students to solve mathematical problems using the vector method.

Ханжарова Б. С.
Казахский национальный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан;
darap57@mail.ru

Mathematical education is the main element of secondary education. The reform of mathematical education, which began in the Sixties, and is still changing annually, is accompanied by the introduction of the of modern and rational methods of problem solving into the geometry school course. A new quality of teaching non-traditional geometry for the school course by the method of solving problems requires the development of appropriate methodological support for the educational process. The analytical method of solving a geometric problem is usually understood as a method of solving it, in which analytical relations act as a formal mathematical model. We will confine ourselves to considering the method of teaching an unconventional vector method of solving problems for the school course in the context of the activity approach. The vector method of solving problems meets all the criteria of leading knowledge, but the practice of their application in the study of planimetry in existing textbooks and manuals does not correspond to their methodological significance. We proceed from the need to harmonize the methodological significance of the vector method of solving planimetric problems with the practice of teaching the latter. The vector method enriched algebra with geometric clarity, made it possible to present the course of various processes in visual geometric images. The same problem receives a different vector representation depending on a particular way to solve it. The vector method is effective in: a) proving the parallelism of lines and segments; b) substantiation of the statement about the division of the segment by this point in this respect; c) finding out the ownership of three points of the same line; d) proving the perpendicularity of lines and segments; e) Finding the value of the angle. In P.Y. Galperin's theory, the assimilation of knowledge is considered as a process carried out based on assimilation of actions to apply the acquired knowledge. The formation of new thought processes begins with the development of the instructions developed by the teacher, presented in the form of detailed external actions. The detail of the action to solve the problem of elementary actions or operations makes the process of learning new methods of solving problems meaningful, conscious, as it reveals the objective logic of the solution process. Inclusion in the process of solving a geometric problem by an analytical method of actions on geometric illustration of the condition and interpretation of

the obtained analytical result provides the basis for new ideas of thinking activity contributing to the formation of the research structure of thinking. At the same time, during the transition of actions, the mental plan, the student's activity to create a geometric image of an adequate analytical model includes activities in collapsed forms of reasoning. The geometric image becomes a "support signal"and a necessary link in the activity to solve the problem by an analytical method. The use of the modeling method in the development of teaching methods for solving geometry problems is presented for several reasons. First of all, these methods themselves are a means of mathematical modeling by which students receive a sign model adequate to the condition of problems: the transformation of this model according to the relevant laws and its analysis allow you to fulfill the requirement of the problem and move from a formal model to its geometric interpretation. The activities that students perform include all the stages of which mathematical modeling consists. At the same time, the requirement of the task is fulfilled and the skills of mathematical modeling are formed, i.e. the goals of the activity of mastering a new method of solving the problem and a new way of reasoning are realized. Let's consider a system of tasks that contribute to the formation of the ability to draw conclusions, to obtain a variety of consequences from their conditions. The significance of the developed system is that it allows students to identify not only the level of assimilation of theoretical material on the topic "Vector method but also, most importantly, contributes to teaching students the techniques of recognition of geometric images at the first stage. . The use of the vector method in specific situations causes certain mental activity. To determine the content of tasks that form the ability to apply vectors, it is necessary to identify actions adequate to this activity. The analysis shows that the use of the vector method in situations a) ˘ e) involves the possession of the following skills: 1) translate geometric language into vector and vice versa; 2) perform operations on vectors; 3) represent a vector as a sum of vectors, the difference of vectors; 4) represent a vector as a product of a vector by a number; 5) transform vector equalities; 6) move from the ratio between vectors to the ratio between their lengths and vice versa; 7) express the length of a vector through its scalar square; 8) express the magnitude of the angle between vectors in terms of their scalar product. Due to the possibility of using a common logical scheme for finding a solution to a problem, analytical methods allow us to develop prescriptions for solving classes of problems that are models of activity samples in which the ways of finding a solution and implementing the requirements of a geometric problem by analytical means are verbally described. The main idea of the activity approach in the interpretation of G.I. Sarantsev is the expediency of describing and designing the activities of students as a system of problem solving processes. We consider this approaches to teaching the analytical method of solving planimetric problems by developing and applying a methodologically expedient system of problems. Learning through problems in this case is the only way in which students can master new methods of solving, assess their advantages, learn the specifics of applying numerical methods to the study of the properties of geometric objects. The success of the vector method in various situations is largely due to the possession of a special dictionary used to translate from geometric language into vector language and back.

This dictionary also includes a few reference problems that are the key to solving many more complex problems using vectors. These include the conditions that determine the belonging of a point to a straight line, the division of a segment in this respect, the belonging of four points of the plane. The analysis of the activity of using vectors in various specific situations made it possible to identify actions in its structure that determine the type of tasks corresponding to it, namely tasks: - to translate from geometric to vector language and vice versa; - to perform vector operations. - to represent a vector as a sum (difference) of vectors; - to represent a vector as a product of a vector by a number; - on the transition from the ratio between vectors to the ratio between lengths and vice versa; - on transformations of vector equalities. - to find

the length of the vector and the magnitude of the angle between them All types of problems include the basic properties of vectors, most problems - involves the possession of the ability to represent vectors in the form of a sum (difference), to translate the geometric language into a vector and vice versa, the possession of some actions with vectors at the mental stage. The experiment showed the feasibility of the following combinations of levels of formation of skills to perform operations on vectors and represent the vector in the form of the sum (difference) of vectors, the product of a vector by a number: 1) the formation of mutually inverse skills is carried out at a materialized level; 2) the solution of problems for the representation of a vector in the form of a combination of other vectors is carried out mentally, and the verification of the correctness of the execution of this action is carried out at the material level; 3) the formation of mutually inverse skills is carried out only in the mental plane. Thus, the solution of mathematical problems by the vector method contributes to teaching students not only to find the optimal vector solution to the problem, but also to form in their minds the techniques and ways of knowing geometric images.

List of sources used

1. **Papyshev A.A.** *Theoretical and methodological foundations of training students solving mathematical problems in the context activity approach: // Monograph.* Saransk: Referent, 2007. 327 p.

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

ALGEBRA VA ANALIZNING DOLZARB MASALALARI

mavzusidagi Xalqaro ilmiy-amaliy anjumani

MATERIALLARI TO‘PLAMI

Termiz, 2025-yil, 20-21- oktabr

****

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Международной научно-практической конференция по

АКТУАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

Термез, 20–21 октября 2025 года

Muharrirlar: Safarov A.Sh., Bozorov J.T., Choriyeva S.T.
Musahhihlar: Imamov O.Sh., Amonov B.B., Xo‘jaqulov J.R.

Bosishga ruxsat etildi: 15.10.2025 yil.
Ofset bosma qog‘ozi. Qog‘oz bichimi 60×84 $^{1}/_{16}$.
“Times New Roman” garniturasi. Ofset bosma usuli.
Shartli b.t. 20,75. Adadi 100 nusxa. Buyurtma № 131.

Termiz davlat universiteti NMM bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Termiz shahri, “A.Navoiy” ko‘chasi, 42-uy.