MATEMATIK ANALIZ VA MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARINING ZAMONAVIY MASALALARI

XALQARO ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA
MATERIALLARI TO‘PLAMI

СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

MODERN PROBLEMS OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE

I



Termiz, 21-22 sentabr 2026-yil

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

MATEMATIK ANALIZ VA MATEMATIK FIZIKA

TENGLAMALARINING ZAMONAVIY MASALALARI

mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya

MATERIALLARI TO‘PLAMI. I qism

Termiz, 2026-yil, 21-22-sentyabr

* *

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ. Часть I

Международной научно-практической конференция по

СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Термез, 21–22 сентября 2026 года

* *

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION, SCIENCE AND INNOVATIONS OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

TERMEZ STATE UNIVERSITY

V. I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

MODERN PROBLEMS OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND

EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

International Scientific and Practical Conference

CONFERENCE PROCEEDINGS. Part I

Termez, September 21–22, 2026

Современные задачи математического анализа и уравнений математической физики: сборник материалов Международной научно-практической конференции (21–22 сентября 2026 года, г.Термез, Узбекистан). – Термез, 2026. 364-с.

Данный сборник включает материалы Международной научной-практической конференции на тему «Современные проблемы математического анализа и уравнений математической физики», проведенной в Термезском государственном университете с целью расширения сотрудничества ученых, работающих в системе высших учебных заведений и научно-исследовательских институтах нашей республики, обсуждения новых результатов в области математики и методов ее преподавания, а также определения перспективных направлений. В частности, в него вошли доклады с пленарных заседаний, а также тезисы математиков, исследователей и магистрантов, ведущих научные исследований в области алгебры, анализа и смежных направлений на секционных заседаниях.

Конференция запланирована на основании приказа Министерства высшего образования, науки и инноваций.(пр № 11 от 16 января 2026 года.)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатели:
Тошкулов А.Х. — ректор Термезского государственного университета, профессор
Сопредседатели:
Аюпов Ш.А. – президент Академии наук Узбекистана, академик
Алимов Ш.А. – академик, профессор Национального университета Узбекистана.
Заместители председателя:
Ашуров Р.Р. – Академия наук Узбекистана, Институт математики имени В. И. Романовского, профессор
Шайдуллаев А.Ш. – проректор Термезского государственного университета по научной работе и инновациям, д. ф.и.н., доцент

СОСТАВ КОМИТЕТА

Ахмедов У.Ч. – проректор ТерГУ по учебной работе, доцент
Холмухамедов О.Р. – профессор (Узбекистан)
Садибеков М.А. – Академик (Казахстан)
Псху А.В. – профессор (Казахстан)
Хаётов А.Р. – профессор (Узбекистан)
Худойбердиев А.Х. – профессор (Узбекистан)
Исломов Б.И. – профессор (Узбекистан)
Рузиев М. – профессор (Узбекистан)
Адашев Ж.К. – профессор (Узбекистан)
Аллаков И. – профессор (Узбекистан)
Мирсабуров М. – профессор (Узбекистан)
Тураев Р.Н. – профессор (Узбекистан)
Нормуродов Ч.Б. – профессор (Узбекистан)
Сафаров А.Ш. – доцент (Узбекистан)
Чориева С.Т. – (ответственный секретарь) доцент (Узбекистан)
Бозоров Ж. – (ответственный секретарь) д.ф.ф.-м.н. (Узбекистан)

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Сопредседатели:
Алимов Ш.А. – академик (Узбекистан)
Аъзамов А.А. – академик (Узбекистан)
Члены комитета:
Хожиев Ж.Х. – академик (Узбекистан)
Фарманов Ш.К. – академик (Узбекистан)
Лакаев С. – академик (Узбекистан)
Фатанах б.Д. – профессор (Малайзия)
Бердишев А. – профессор (Казахстан)
Рахманов З.Х. – академик (Таджикистан)
Худойберганов Г. – профессор (Узбекистан)
Арипов М. – профессор (Узбекистан)
Шоимкулов Б.А. – профессор (Узбекистан)
Омиров Б.А. – профессор (Узбекистан)
Хасанов А.Б. – профессор (Узбекистан)
Хужаяров Б. – профессор (Узбекистан)
Хасанов А. профессор (Узбекистан)
Солеев А. – профессор (Узбекистан)
Шодиметов Х.М. – профессор (Узбекистан)
Зикиров О.С. – профессор (Узбекистан)
Нарманов А.Я. – профессор (Узбекистан)
Дурдиев Д. – профессор (Узбекистан)
Кудайбергенов К.К. – профессор (Узбекистан)
Имомов А.А. – профессор (Узбекистан)
Артикбоев А. – профессор (Узбекистан)
Заитов А.А. – профессор (Узбекистан)
Эшматова Д.Б. – профессор (Узбекистан)

Секретариат:
Бегалиев О.Х. – ТерГУ
Имамов О.Ш. – ТерГУ
Турсунова Б.А. – ТерГУ
Хужакулов Ж.Р – ТерГУ
Амонов Б.Б. – ТерГУ
Жураев Б.Б. – ТерГУ
Эшкобилова Д.Т. – ТерГУ
Маматмуминов Д.Т. – ТерГУ
Мирзаев Ф.С. – ТерГУ
Култураев Д.Ж. – ТерГУ

Ответственные за выпуск:
д.ф.-м.н., профессор **И. Аллаков**,
д.ф.-м.н., профессор **М. Мирсабуров**.

Данный сборник рекомендован к публикации на основании решения Совета Термезского государственного университета №2 от 15 сентября 2026 года.

Авторы несут ответственность за достоверность сведений, включенных в сборник.

MUNDARIJA
СОДЕРЖАНИЕ

Termiz davlat universiteti "Matematik analiz" kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori, M. Mirsaburovning ilmiy faoliyati haqida 13

1 – SHO'BA. BUZILUVCHAN, ARALASH VA KASR TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI TENGLAMALAR
СЕКЦИЯ 1. ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ, СМЕШАННЫЕ И ДРОБНО-ПОРЯДКОВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Abdullaev O. Kh., Duysenbaev R. S. *An Initial-Boundary Value Problem for a Degenerate Fractional-Order Equation with Dzhrbashyan–Nersesyan Operators and Involution Perturbation* 16
Abdullaev O. Kh., Duysenbaev R. S., Oripov M. M. *Inverse problem of determining the value of the unknown function on the characteristic of a hyperbolic domain* 17
Abdullaev O.Kh., Sobirjonov A. K. *An Inverse Problem for a Loaded Fractional-Order Diffusion Equation with Involution Perturbation* 18
Arziqulov Z. O. *Uchta buzulish chizig'iga ega parabolik tenglamaning avtomodel yechimlari* . 21
Ashurov R.R. *A Novel Approach to the Inverse Problem of Identifying Fractional Derivative Orders in Partial Differential Equations* 24
Baltayeva U., Jumanazarov O.I., Nurmetova A.A. *Kasr tartibli yuklangan diffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich chegaraviy masala yechimining mavjudligi va yagonaligi* 24
Begaliyev B. N., Yo'ldoshev B. B. *Kasr tartibli operatorlarning bir tadbiqi haqida* 25
Dzhamalov S.Z., Shokirov A.A. *On the unique solvability of a weak generalized solution of the nonlinear Tricomi equation with semi-nonlocal boundary conditions in a parallelepiped* ... 27
Dzhamalov S. Z., Khalkhadzhaev B. B. *Linear inverse problems with nonlocal boundary conditions for a three-dimensional mixed-type equation of the second kind of the fourth order in a parallelepiped* 29
Dzhamalov S. Z., Yusupov Sh. B. *Linear inverse problems with nonlocal boundary conditions for a three-dimensional Tricomi equation of the fourth order in a parallelepiped* 31
Ergashev V.E., Buriev T.E. *Singular points of planar systems of differential equations with polynomial right-hand sides* 34
Fayziyev Yu. E., Abdimurodova Sh. A. *Nonlocal problem for mixed-type equations of fractional Barenblatt-Zheltov-Kochina and Boussinesq types* 36
Fayziev Yu. E., Bobokhonova M. B. *Control problem for partial differential equation with Caputo fractional derivatives* 38
Fayziev Yu. E., Khabibullaeva N., Sayfullaeva S. *A boundary − initial value problem for fractional differential equations with sequential Caputo and Riemann − Liouville derivatives* . 39
Kadirkulov B. J., Begimqulov F. Kh. *Existence and uniqueness of solutions to a boundary value problem for a second-order hyperbolic partial differential equation with involution* 40
Kadirkulov B. J., Uzaqbaeva D. E. *Direct and Inverse Problems for a Fourth-Order Three-Dimensional Equation of Mixed Type with Power-Law Degeneracy and Involution* 41
Karimov E.T. *On a new type of inverse problems for mixed parabolic-hyperbolic type equations* 42
Karimov Sh. T., Mo'ydinov I. M. *Bessel operatori qatnashgan yuqori tartibli giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi* 43

Khasanov Sh. M. *A Direct Problem for a Sub-Diffusion Equation Involving the ψ-Prabhakar-Caputo Operator* 45
Kurbanov O. T. *On a boundary value problem for the Airy equation with a fractional time derivative* 46
Khujakulov J. R., Kenjaboyeva M. H. , Usmonov Sh. *An inverse source problem for Two-Term Regularized Prabhakar Fractional Diffusion Equation on a Metric Graph* 47
Mamajonova R.A *An Initial-Boundary Value Problem for a Time-Fractional Equation with a Bessel-Type Differential Operator* 48
Mamatov T.Yu. *Fractional Oscillator Differential Equations in Single-DOF Mechanical Systems* 49
Meliqo'ziyeva D. M. *To'rtinchi tartibli karrali xarakteristikali buziluvchi tenglama uchun chegaraviy masala yechimining yagonaligi haqida* 51
Mirzaeva M. *A nonlocal problem for a sub-diffusion equation with a periodic-type boundary condition and the regularized Prabhakar fractional derivative* 53
Mukhiddinova O. *On Systems of Fractional Nonlinear Partial Differential Equations* 55
Nematjonov F.F. *The inverse problem for a generalized (fractional) hyperbolic-type equation with Caputo derivatives of different orders* 57
Ruziev M. Kh., Kazakbaeva K. B. *Nonlocal boundary problem for a class of mixed type equation in a domain whose elliptic part is a half-plane* 58
Ruziev M. Kh., Sarsenbaeva G. O. *Boundary value problem for an elliptic equation degenerating inside a domain* 59
Shakarova M. *Space-dependent source identification problem for the subdiffusion equation with a non-local in time condition* 61
Shamuratov D.S. *Uniqueness for an Inverse Problem of Determining Orders and Coefficients for Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equation* 63
Sobirov Z. A., Norkulova R. B. *Inverse problem for determining an unknown spatial source function in a time-fractional Kuramoto-Sivashinsky equation* 66
Sobirov Z. A., Turemuratova A. A., Aminov H. *Inverse source problem for the fractional heat equation on metric graphs* 67
Sobirov Z.A., Turapova Sh.H. *Fractional wave equation on compact metric graphs* 68
Sobirjonov A.K., Turmetov B.Kh *A problem with a nonlocal condition in time for a parabolic equation with involution* 69
Sulaymonov I. A., Rayimberdiyev S. I. *On the Solvability of the Cauchy Problem for the Diffusion Equation with Weyl Fractional Derivative* 72
Tolipov N. I. *An initial-boundary value problem for a strongly degenerate higher-order even equation* 73
Tolipov N. *An initial-boundary value problem with paired nonlocal boundary conditions for a degenerate high even-order PDE* 76
Tulasheva Y.I. *On the cauchy problem for the fourth-order degenerate partial differential equation and some properties of the associated hypergeometric function* 77
Tosheva M. Ch., Xudoynazarov S.S., Yo'ldoshev B. B. *Umumlashgan Gellerstedt tenglamasi uchun Bitsadze-Samarskiy tipidagi masala yechimining yagonaligi haqida* 79
Tursunova E. G. *A Boundary Value Problem for a one-dimensional Space-Time Fractional Convection-Diffusion Equation involving the Generalized Caputo-Prabhakar fractional derivative* 81
Usmonov D. A. *The fundamental solution to a wave equation with a fractional derivative involving a Bessel function in the kernel* 83
Usmonov D. A. , Nematjonov F.F. *The Goursat problem for a generalized (fractional)*

hyperbolic-type equation with Caputo derivatives of different orders 84
Usmonov D. A., Turdiev Kh. N. *Initial-inverse problem for a generalized hyperbolic-type equation with the Prabhakar fractional derivative* 85
Usmonov B. Z. *Uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglamaning bir sinfi uchun chegaraviy masalalar* 86
Xalilov Q. S., Xolmatova R. X. *Ikkinchi tartibli singulyar koeffitsiyent qatnashgan parabologiperbolik tipdagi tenglama uchun 3-tur integral shartli masala haqida* 88
Xudoynazarov S.S., Xo'jayeva H. F., Begaliyev B.N. *Aralash tipdagi tenglama uchun nolokal shartli masala yechimining yagonaligi haqida.* 89
Zunnunov R.T., Matmuratov M.N. *Fundamental solution and uniqueness of solution to the Cauchy problem for a third-order fractional derivative equation* 92
Аббасова М.О., Джураев Н., Эргашев Т.Г. *Формулы приведения для гипергеометрических функций и их применения к исследованию свойств решений сингулярных эллиптических уравнений* 93
Абдуллаев А.А., Саттаров У.У. *Краевая задача с конормальной производной для уравнения смешанного типа второго рода с условием сопряжения типа Франкля* 95
Акбарова С. Х., Хамрокулова Н. П. *Нелокальная краевая задача для линейного параболического уравнения смешанного типа в ограниченной области* 99
Апаков Ю. П., Абдунабиев С. И. *Задачи Трикоми с параллельными плоскостями вырождения с разрывными условиями склеивания в R^3* 100
Апаков Ю. П., Иброхимов Х. К. *Об одном краевой задаче для вырождающегося уравнения третьего порядка с кратной характеристикой* 102
Ахмадов И. А., Караматов Б.Т. *О существовании собственных значений краевой задачи для смешанного типа с оператором Герасимова–Капуто* 104
Ахметов К. Н. *Краевая задача для вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа второго рода дробного порядка в смысле Капуто* 106
Бекиев П.А. *Разрешимость начально-граничной задачи для уравнения четвертого порядка с характеристическим вырождением* 108
Бектошева Ш. А., Нишонов Н. Н. *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода с дробной производной* 109
Джамалов С.З.,Сипатдинова Б.К. *Об одной линейной обратной задачи для уравнения смешанного типа второго рода с дополнительным интегральным условием* 110
Жураев Ф. М. *Краевые задачи для нагруженного уравнения смешанного типа, вырождающегося внутри области* 112
Жўраева Д.У. *Задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа с сингулярным коэффициентом* 114
Зуннунов Р. Т., Паровик Р. И., Худаёров А. А. *Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода с дробной производной и с младшей производной в гиперболической части* 116
Исломов Б. И., Абсоатова Х. Г. *Краевая задача с граничным условием второго рода для уравнения смешанного типа дробного порядка со спектральным параметром* 117
Исмоилов А. И., Хайдаров И. У. *Обратная задача определения функции источника для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу* 119
Исхоков С.А., Рахмонов Б.А. *Исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле с комплексным параметром* 122
Каримов К. Т., Азимова Т. Э. *Задача Келдыша для нагруженного уравнения смешанного типа с тремя операторами Бесселя в параллелепипеде* 124
Каримов О.Х., Набиев Дж.И. *Коэрцитивные оценки и разделимость для оператора*

шестого порядка 127
Karimov Sh. T., Ismoilov M. X. *Задача Коши для уравнения, распадающегося на волновые множители, с оператором Бесселя* 128
Косимова М. Ш. *О периодических решениях неоднородного уравнения субдиффузии* 131
Каримов К. Т., Олимова Д. С. *Двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения, вырождающегося внутри области* 134
Мадрахимова З.С., Хамракулова Д.А. *Краевая задача с разрывными условиями склеивания для уравнения второго порядка гиперболо-гиперболического типа* 135
Маманазарова Ф.Ф. *О задаче Коши для уравнения с двумя линиями вырождения второго рода* 137
Маматмуминов Д. Т., Мирсабурова У. М., *Задача в неограниченной области с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом* 139
Мирсабуров М., Махмудов А. К. *Комбинированная задача с локальными и нелокальными условиями для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с различными порядками вырождения* 142
Мирсабурова Г. М. , Мирсабурова У. М. Турдиев Х.Х. *Принцип экстремума и аналог принципа Заремба–Жиро для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом* 144
Мирсабурова Д.М. *Задача с данными на параллельных характеристиках в неограниченной области для уравнения смешанного типа* 146
Мирсабуров М., Рузиева З.Ф. Гаффоров Х.А. *Задача с непольным условием Бицадзе-Самарского и дополненьм аналогом условия Франкля для одного класса уравнений смешанного типа с различными порядками вырождения* 149
Мирсабуров М., Сафарова А.Р. *Обобщенная задача Геллерстедта с аналогом условия Франкля.* 151
Мирсабуров М., Тураев Р.Н., Мирзаев Ф.С. *Нелокальная краевая задача для уравнения Геллерстедта с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках* 153
Муродова М.Р. *Единственность решения одной краевой задачи для уравнения с сингулярным коэффициентом в бесконечной области, ограниченной двумя параллельными плоскостями* 155
Насирова Д.А. *Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболо - гиперболического типа второго рода, вырождающегося внутри области* 157
Нишонова Ш.Т. *Задача с нелокальными условиями Франкля для трехмерного уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом* 159
Орипов Д. Д. *Об одной начально-краевой задаче для уравнения высокого четного порядка с одной линией вырождающегося* 160
Очилова Н.К. *Об одной задаче для нагруженного уравнения с дробной производной Джрбашяна-Нерсесяна.* 162
Окбоев А. Б. *Обратная задача об определении источника для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром при видоизмененных условиях Коши* 163
Рузиев М. Х., Юлдашева Н. Т. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом* 164
Сабитов К. Б. *О корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа с характеристическим вырождением* 165
Сафаров Ж. Ш., Акылбаев М. И., Джамиева Б. А., Файзуллаев Ш. М. *Об одной начально-краевой задаче для одномерного уравнения Буссинеска четвертого порядка* .. 167

Терсенов А. С., Сафаров Р. Ч. *О радиально симметричных решениях для эллиптического уравнения с сингулярным $p(|x|)$-Лапласианом.* 168
Убайдуллаев У. Ш. *Первая начально-граничная задача для неоднородного уравнения смешанного типа дробного порядка со спектральным параметром в прямоугольной области* 171
Хасанов А. *Биортогональные системы и их применение к решению краевой задачи для одного класса вырождающегося уравнения третьего порядка составного типа* 174
Чориева С.Т., Амонов Б.Б., Норкувватова А.Б. *О задаче с тремя вариантами смещений для уравнения смешанного типа* 176
Чориева С.Т., Мухтарова М.У. *Задача с условиями смещения на внутренней характеристике для уравнений Геллерстедта.* 178
Shokirov A.M. *Спектральные свойства задачи Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами* 180
Эргашева С. Б., Сахатмуродова И. Э. *Задача в неограниченной области с неполным условием Геллерстедта для уравнения смешанного типа с особым коэффициентом* ... 182

2 – SHO‘BA. MATEMATIK FIZIKANING NOKLASSIK MASALALARI СЕКЦИЯ 2. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Abdukodirov A. T., Tulqinboyev T. A. *Oltinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun to‘g‘ri va teskari masalalar haqida* 184
Abdullaev B. R., Haydarov B. H. *An inverse problem for reconstructing the kernel in a third-order integro-differential pseudoparabolic equation with nonclassical boundary conditions* 185
Abdukhakimov S., Khasanov A. *Two-fermion lattice Schrodinger operators with first- and second-nearest-neighbor interactions* 186
Abdullayev J.I., Xamdamova Ch.A. *Panjaradagi uch zarrachali sistema Shredinger operatorining diskret spektri haqida* 188
Abduvayitov S. S. *Discrete spectrum of a two-boson lattice Hamiltonian* 189
Abduvayitov S. S. *Threshold states for a two-boson lattice Hamiltonian* 191
Aliqulov Y. Q. *Uch o’lchovli fazoda uchinchi tartibli aralash tipdagi yuklangan tenglama uchun Gellerstedt masalasiga o’xshash masala* 193
Atajanova R.B., Rajapov X.O. *Integration of the Loaded mKdV–Sine-Gordon Equation with a Source* 195
Baymuratov D., Mannonov G‘., Khayrullaev M. *On the nmKdV–coshG equation in the class of periodic functions* 197
Bayzakov M. B. *Eigenvalue asymptotics for a one-dimensional lattice two-fermion schrödinger operator* 198
Begmatov A.K., Ismoilov A.S., Bozorov A.A. *On the investigation of an integral geometry problem for paraboloidal surfaces* 200
Begmatov A. Kh., Kushatov J. M., Yakubov G. T. *Uniqueness and an inversion formula for a weighted integral geometry problem with incomplete data over a family of parabolas* ... 202
Boltaev A. T. *The discrete spectrum of a two-boson lattice Hamiltonian with a structureless molecular channel on z^2* 204
Choriyeva G., H. *Langevin tipidagi kasr tartibli differensial tenglama uchun Neumann chegaraviy shartli boshlang’ich chegaraviy masala* 206
Eshbekov R.Kh., Makhmudov B.E. *The Initial Value Problem for the Hirota-type equation with a finite density and integral self–consistent source* 208

Hamroqulova Sh. Sh. *Inverse problem for nonlinear heat equation* 210
Hoitmetov U. A., Sobirov Sh. K. *Solving the Cauchy problem for the extended and loaded fifth-order KortewegєЂ“de Vries equation with a self-consistent source.* 211
Ibrogimov U.B. *Lower-threshold asymptotics of discrete eigenvalues for a two-particle Schrödinger operator on a one-dimensional lattice* 212
Irgashev B. Yu. *Dirichlet-type problem for an odd-order equation with a discontinuous coefficient* 215
Iskandarov A.U., Rajapov X.O. *On the Variable-Coefficient KdV Equation* 217
Khashimov A. R. *On the uniqueness classes of solutions of the first boundary value problem for a non-stationary third-order equation of composite type* 219
Khashimov A. R., Kurbanov O. T. *Fundamental solution of a third-order linear equation with multiple characteristics* 219
Khasanov A. B., Juraeva U. Y. *Growing polyharmonic functions and the Cauchy problem for some domains in R^2* 220
Khasanov A. B., Abdivokhidov A.A., Eshbekov R.Kh. *Inverse Spectral Integration of nmKdV–L equation* 222
Khalmukhamedov A. R., Kuchkorov E. I., Bobokhujayeva N. Sh. *On an inverse problem for a Boussinesq-Type differential equation* 223
Mamanazarov A.O. *Blow-up and global existence results for Semilinear Damped Wave Equations with Forcing Terms in Exterior Domains* 226
Meliqo‘ziyeva D. M. *To‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali buziluvchi tenglama uchun chegaraviy masala yechimining yagonaligi haqida* 229
Muminov M. I., Jumayeva G. A. *Uch o’lchamli uchburchakli panjaradagi diskret Shredinger operatori xos qiymatlari haqida* 230
Odinaev R.R. *Solvability of the initial-boundary value problem for a fourth-order differential equation* 232
Oripov Sh. A., Abdullayeva Kh. A. *A Cauchy problem for a fourth-order equation involving the D’alambert operator* 234
Pirmatov Sh.T. *On eigenfunction expansions of continuous functions associated with B-elliptic operators* 234
Rajabova M. O. *Coefficient inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a non-characteristic line of type change* 236
Rasulov M. S., Khabibullayev M. M. *Biological invasion in a competition model with a free boundary* 237
Sattorov E. N., Ermamatova Z. E., Axmadova M. T. *The Cauchy problem for the vector Helmholtz equation in the bounded domain* 238
Takhirov J. O., Rasulov M. S., Samandarov T. N. *A Nonlocal Free Boundary Problem for an Age-Structured Invasive Plant Model* 240
Ulashov S. S., Khamidov Sh. I. *Discrete spectrum of a fermion–boson pair on the one-dimensional lattice* 241
Азимов Д.Б. *Смешанная задача для объединенного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза и Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы* 243
Аликулов Т.Н., Эргашева Д.А. *Об областях определения комплексных степеней эллиптического оператора Шрёдингера с сингулярным коэффициентом в банаховом пространстве* 245
Аликулов Т.Н., Норкобилова Ф. Э. *Применение дробных степеней бигармонического оператора с сингулярным коэффициентом к исследованию*

дифференциального уравнения гиперболического типа в банаховом пространстве 247
Ашурова З. Р., Жураева У. Ю., Маллаева Ф. У *Функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка.* 248
Бахтиерова М. Э. *Нелокальная краевая задача для уравнения гиперболического типа* 251
Бозорова Д. А. *Разрешимость нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения* 252
Зикиров О. С., Холиков Д. К. *О разрешимости смешанных краевых задач для неклассических уравнений третьего порядка* 252
Имомназаров Х. Х., Эркинова Д. А. *Исследование задача Коши для системы типа Хопфа* 253
Исломов Б.И., Кылышбаева Г.К. *Краевая задача с условиями периодичности для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в прямоугольной области* ... 255
Исмоилов О. Б., Салиев И. Б., Азимов Д. Б., Машарипов Ф. М. *Смешанная задача для обьединенного нелинейного модифицированного уравнения Кортевега-де фриза и модифицированного уравнения Кортевега-де фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы* 257
Фаязов К.С., Хажиев И.О. *Условная корректность задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения третьего порядка* 258
Каримов К. Т., Фармонов Ш. Р *Нелокальная задача на собственные значения для уравнения смешанного типа второго рода с двумя линиями вырождения* 260
Каримов Ш. Т. Толибжонов Б.Б. *Фундаментальные решения дифференциально–разностного бипараболического уравнения и их свойства* 263
Каримов Ш. Т. Рахимова Ш. У. *Начально-краевая задача для бикалорического уравнения с оператором Бесселя и со спектральным параметром.* 266
Касимов Ш. Г., Тажимуратова А. К. *Об однозначной разрешимости смешанной задачи колебаний пластин, с неклассическим краевым условием, в классах Соболева в многомерноми случае с оператором Миллера–Росса* 268
Касимов Ш. Г., Абутова А. Б. *Об однозначной разрешимости смешанной задачи колебаний пластин, с различными нелокальными краевыми условиями, в классах Соболева в многомерном случае с оператором Миллера–Росса* 271
Касимов О.Ю., Турсунов Б.А. *О геометрии сингулярных слоений, порожденных семейством векторных полей* 273
Кучкоров Э. И. *О суммировании спектральных разложений кусочно-гладких функций по собственным функциям оператора Шрёдингера* 275
Мамажонов С. М. *Решение второй краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами в полуполосе* 277
Маманазаров Д. С. *Исследование нелокальных краевых задач для параболических уравнений четвёртого порядка.* 279
Сагдуллаева М. М. *Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных третьего порядка с интегральным условием* 280
Сатторов Э. Н., Актамов Х. С., Индаминов М. Ш. *О продолжении решений уравнений магнитного поля в бесконечной области* 281
Солеев А. С., Шодиев Д. С., Турсунов Ф. Р. *Регуляризация задача Коши для бигармонического уравнения в трёхмерной неограниченной области* 282
Сраждинов И. Ф. *Разрешимость смешанной задачи для одной системы составного типа* 284
Тураев Р. Н., Хуррамов А. Т., Эшкораев К. А. *Неклассичиская задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения* 286

Турсунов Ф. Р., Маликов З., Шамсиева А. С. *Решение задачи коши для систем эллиптического типа первого порядка в неограниченной области* 288
Тураев Х. *Функциональные уравнения с разделяющимся переменными* 290
Уразбоев Г. У., Хасанов М. М. *Смешанная задача для нелинейного модифицированного уравнения Кортевега-де фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы* 291
Уразбоев Г. У., Хасанов М. М.Исмоилов О. Б. *Смешанная задача для нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка с интегральным источником в классе периодических функций* 292
Хамитов А. А., Эрматов Ж. С. *О единственности решения краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка в R^3* 294
Хамроева З. К. *Динамика вязкоупругой тороидальной оболочки с протекающей жидкостью* 296
Хасанов А. Б., Нормуродов Х. Н., Эрмаматова Ф. Э., Хасанов Г. А. *Смешанная задача для уравнения, составленного из комбинаций нелинейных уравнений КдФ(+1) и КдФ(-1) с самосогласованным источником в классе периодических бесконечнозонных функций* 297
Хасанов М.М., Азимов Д.Б., Машарипов Ф.М. *Смешанная задача для нелинейного уравнения Кортевега-Де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником.* 299
Холбеков Ж.А. *Исследование нелокальной краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа* 301
Хабибуллаев М. М., Курбанова М. Т. *Краевая задача со свободными границами для реакционно-диффузионного уравнения* 303
Хасанов А. Б., Худаеров У. О. *О модифицированном уравнения Кортевега-де Фриза -Лиувилля* 304
Хоитметов У. А., Хасанов Т. Г., Зокиров И. П. *Интегрирование нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега – де фриза(кмкдф) в классе периодических функций* 306
Эрмаматова Ф. Э., Эрмаматова Б. Э. *Смешанная задача для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза – sinh-Гордона с дополнительными членами в классе периодических бесконечнозонных функций* 307
Эшматов Б. Э., Джураев Н. *Об одной задачи с наклонной производной для смешанного параболо-гиперболического уравнения* 309

3 – SHO‘BA. DINAMIK SISTEMALAR VA OPTIMAL BOSHQARISH СЕКЦИЯ 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Absalamov A. T. *Dynamical Systems of one of the family of Evolution Operators* 313
Akhmatov A. A. *Vector Lyapunov-Based Stability Analysis and Controller Synthesis for a Two-Link Horizontal Manipulator* 314
Amirov I. N. *Kubik nochiziqli elastik elementli dinamik so’ndirgichga ega sharnirli tayangan balkaning majburiy tebranishlari* 315
Elgondiev K. K., Kamalova O. X. *Existence of periodic solutions to second-order linear differential equation systems with impulsive effects* 317
Eshmetova S. D.*Non-homogeneous Markov chains generated by quadratic b-bistochastic operators* 320
Ibaydullayev T.T., Tursunboyev H. T. *Yuqori tartibli tenglamalar bilan berilgan quvish va qochish masalasini yechishning bir usuli haqida* 321

Jamilov U. U., Khamdamkulova S. I. *Discrete dynamics of a sdc model for diabetes* . . 322
Jamilov U. U., Khamdamkulova S. I. *Regularity analysis of a mathematical model for diabetes* 324
Jamilov U. U., Baratov B. S. *On dynamics of a separable cubic stochastic operator in* S^2 326
Jamilov U. U., Kholikova F. Q. *Discrete dynamics of an SIR epidemic model on complex networks* 327
Nazarov Z. A., Ismoilova M. O. *Monte Carlo simulation for branching processes* 329
Norbutaev Sh. G. *Eight-electron second singlet state in the Hubbard model. two-and three-dimensional case* 331
Nurboev I. A. *Saddle-Node Bifurcations and Hysteresis in the Spruce Budworm Outbreak Model* 333
Rahmatullaev M. M., Abdukaxorova Z. T. *On fixed points of a rational mapping related to the p-adic Potts model on (2, 3)-ary tree* 335
Rozikov U. A., Aliev E. T. *p-adic dynamical systems on invariant spheres of a Möbius transformation* 337
Ruzimuradova D. Kh., Abdullayev A. Kh. *The simple motion pursuit differential game with rigid segments* 338
Sattarov I. A., Aliev E. T. *Ergodicity of p-adic (1,2)-rational dynamical systems on invariant spheres* 340
Soyibboev U. B., Nuriddinova F. T. *On the attainability domain of players with exponential geometric constraints on controls* 341
Yusupbaeva Kh. E. *On dynamics and periodic structure of (2,2)-rational mappings over* Q_2 344
Zoyidov A. N. *On the complete dynamics of a two-parameter system of rational mappings with* $0 < a < 1, b > 1$ 346
Бегалиев А. О., Маматова Х. Н.,Рамазанов У. А. *Теорема единственности для уравнений Пфаффа удовлетворяющими условию Нагумо* 347
Кунгиров М. Н. *Бифуркация циклов в двумерных системах с комбинированными однородными нелинейностями* 348
Мамадалиев Н. А., Васиева Х. Г. *К решению задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания* 349
Маматов А. Э. *О функции рассеяния системы дифференциальных уравнений Дирака на полуоси* 351
Мустапокулов Х. Я. *Задача преследования в дифференциальных играх с интегральными и импульсными ограничениями* 353
Мухтаров Я. *Исследование одного класса дифференциальных уравнений при особом типе в бесконечности* 355
Расулов Х. Р. *Об аналитическом решении одного непрерывного аналога F-квадратично-стохастического оператора* 357
Суванов Ш., Тилавов А. *Численное исследование новой бифуркационной структуры предельного цикла в двумерной динамической системе* 358
Эшмаматова Д. Б., Файзуллаева Ш. А. *Неподвижные точки дискретной модели хищник–жертва с рациональным ростом популяции жертвы* 361
Янгиева О.У. *Состояние модели экономического равновесия в смысле Нэша, основанные на играх n лиц на конечном временном интервале* 362



Termiz davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori, M. Mirsaburovning ilmiy faoliyati haqida

Mirsaburov Miraxmat 1951-yil 30 iyunda Surxondaryo viloyati Termiz tumanida tug‘ilgan.

M.Mirsaburov 1968-yilda Termiz shaxridagi 10-sonli umumiy o‘rta ta’lim maktabini muvaffaqiyatli tamomlab, shu yili Toshkent davlat universitetining(xozirgi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti) mexanika-matematika fakultetiga o‘qishga kirdi va 1973-yilda universitetni matematik analiz ixtisosligi bo‘yicha tugatib, Termiz davlat pedagogika institutining Matematika kafedrasida o‘z pedagogik faoliyatini boshladi.

1978-yilda O‘zbekiston Fanlar Akademiyasi V.I.Romanovskiy nomli matematika instituti aspiranturasiga o‘qishga kirdi va 1981-yilda O‘zbekiston Fanlar Akademiyasining akademigi M. S. Salohiddinov rahbarligida “Краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами” mavzusida nomzodlik dissertatsiyasini muvaffaqiyatli himoya qildi.

1981-yildan boshlab 1995-yilga qadar Termiz davlat universiteti matematik tahlil kafedrasida katta o‘qituvchi, kafedra mudiri lavozimlarida ishladi.

1995-1998 yillarda O‘zbekiston Fanlar Akademiyasi V. I. Romanovskiy nomli matematika institutida doktoranturada tahsil oldi va 2000- yilda “К теории вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами” mavzusidagi doktorlik dissertatsiyasini himoya qildi.

2000-2001 yillarda Termiz davlat universiteti differensial tenglamalar va geometriya kafedrasi mudiri lavozimida faoliyat yuritdi.

2001-2005 yillarda Termiz iqtisodiyot kolleji direktori bo‘lib ishladi. U respublikamizda o‘tkazilgan siyosiy tadbirlarda faol ishtirok etib kelmoqda. 2004-yil 27- dekabr kuni o‘tkazilgan O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi Qonunchilik palatasiga saylov o‘tkazuvchi 65-Termiz okrugi komissiyasi raisi vazifasida muvaffaqiyatli ish olib bordi.

2006-yilda M. Mirsaburovga Uzbekiston Respublikasi OAK tomonidan differensial tenglamalar va geometriya kafedrasi professori ilmiy unvoni berildi.

M.Mirsaburov tomonidan ko‘p yillar o‘z yechimini kutib yotgan xususiy hosilali tenglamalar sohasidagi muammolar muvaffaqiyatli hal etilgan. Xususiy hosilali differensial tenglamalar sohasida ishlayotgan mutaxassislarga yaxshi ma’lumki, 1923-yilda italiyalik olim F.Trikomi

birinchi bo‘lib aralash turdagi tenglama uchun korrekt (to‘g‘ri) masala qo‘yadi, bu ishdan so‘ng aralash turdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarga olimlar tomonidan katta e’tibor beriladi, uning natijalari aerodinamika sohasidagi ko‘p masalalarni yechishda qo‘llanilib kelinmoqda.

F.Trikomi masalasi butun dunyo olimlari tomonidan asosan uch yo‘nalishda rivojlantirilmoqda. Bular:

1. F.Trikomi masalasi umumiyroq tenglamalar uchun o‘rganiladi.
2. F.Trikomi masalasi chegaraviy shartlar shakli o‘zgargan holda tadqiq yetiladi.
3. Trikomi tenglamasi uchun spektral masalalar o‘rganiladi.

Bu yo‘nalishlarda o‘nlab doktorlik, yuzlab nomzodlik dissertatsiya ishlari bajarilgan.

70-yillarga kelib, olimlar orasida aralash turdagi tenglamalar uchun barcha masalalar deyarli o‘z yechimini topgandek tasavvur paydo bo‘ladi. Aralash turdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning keyingi rivojida yangi g‘oya zaruriyati tug‘ildi hamda A.V.Bitsadze va A.A.Samarskiylarning elliptik turdagi tenglamalar uchun yangi nolokal masalasi bu borada turtki , impuls vazifasini o‘tadi.

Elliptik tipdagi tenglama uchun tariflangan Bitsadze-Samarskiy masalasi keyinchalik turli shakllarda aralash turdagi tenglamalar, yuqori tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar uchun qo‘yildi va bu masalalarning korrekt ekanligi isbotlandi. Faqat bir turdagi, ya’ni giperbolik turdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy masalasini o‘rganish ko‘p yillar, ya’ni 30 yil davomida o‘z yechimini kutib yotdi.

✓ M. Mirsaburov 1998 yilda singulyar koeffitsiyentli buziluvchan giperbolik turdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy masalasini ta’rifladi va bu masalani korrekt ekanligini isbotladi. Olingan natija **“Доклады РАН 1999, №1, с 10-12” ва “Дифференциальные уравнения” 2002, т.38 №2, с. 271-276** jurnallarida chop etildi. (M.S.Salaxitdinov bilan hamkorlikda).

✓ M. Mirsaburov tomonidan Trikomi masalasi yangi ko‘rinishda ta’riflandi, ya’ni butun chegaraviy xarakteristika ixtiyoriy ravishda ikkiga bo‘linib, birinchi bo‘lakda F.Trikomi sharti, ikkinchi bo‘lakda va soha ichida yotuvchi xarakteristikada Bitsadze-Samarskiy sharti berildi. Bu masala aralash turdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan masalalar tarixida o‘zida aralash sohaning giperbolik qismida lokal va nolokal shartlarni birlashtirgan birinchi masala bo‘ldi.

Mazkur masalani o‘rganish jarayoni ko‘pgina nostandart holatlarni yuzaga keltirdi, jumladan:

F.Trikomining siljishli singulyar integral tenglamasiga duch kelindi va uning yechimi S. G. Mixlin tomonidan takomillashtirilgan Karleman usulida amalga oshiriladi;

aralash turdagi tenglamalar uchun barcha chegaraviy masalalar o‘ng tomoni regulyar operatordan iborat singulyar integral tenglamaga olib kelinar va standart usulda regulyarizatsiyalanar edi. M.Mirsaburov tomonidan o‘rganilayotgan masala o‘ng tomoni regulyar bo‘lmagan (bir nuqtada singulyar maxsuslikka ega bo‘lgan) tenglamalarga olib kelindi va u dastlab siljishli singulyar integral tenglama sifatida regulyarizatsiyalandi, ikkinchi martada Viner-Xopf integral tenglamasiga olib kelindi va unga Fredgolm integral tenglamalar nazariyasini qo‘llash mumkin ekanligi isbotlandi.

Bu natija Rossiya Fanlar Akademiyasining **“Дифференциальные уравнения”. 2001, т.37, №9, с.1281-1284** jurnalida chop etildi.

M. Mirsaburov bajarilishi 2012-2016 yillarga mo‘ljallangan fundamental tadqiqotlar davlat ilmiy texnika dasturi doirasida bajariladigan loyiha ilmiy rahbaridir. (грант Ф-4-32) Loyiha mavzusi: “Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun Trikomi, siljishli masalalar va Bitsadze-Samarskiy shartlarini bir ta’rifda birlashtirgan masalalarning korrektligini o‘rganish”.

Shuningdek, bajarilishi 2022-2026 yillarga mo‘ljallangan (grant FZ-202009211) “Aralash turdagi tenglamalar uchun xarakteristika va buzilish chizig‘ida Frankl va Bitsadze Samarskiy

shartlari berilgan masalalar korrektligini noklassik singulyar integral tenglamalarga olib kelib o‘rganish” nomli ilmiy loyiha rahbaridir.

M. Mirsaburov Termiz davlat universitetida “Matematikaning dolzarb masalalari” deb nomlangan ilmiy-uslubiy seminar rahbari hisoblanadi va bu seminarda yosh tadqiqotchilarning ilmiy ishlari muntazam ravishda muhokama qilinib kelinmoqda. Prof M. Mirsaburovning butun pedagogik, ilmiy-ijodiy faoliyati Termiz davlat universiteti bilan uzluksiz bog‘liq.

1973-2011 yillar mobaynida o‘z faoliyatini matematika kafedrasi o‘qituvchisi lavozimidan boshlab, Termiz davlat universiteti ilmiy ishlar prorektori, fizika-matematika fakulteti dekani, “Ishlab chiqarish asoslari”, “Matematik tahlil”, “Differensial tenglamalar va geometriya” kafedralari mudiri vazifalarida ishladi. M. Mirsaburov 2008-2017 yillarda Surxondaryo viloyati pedagogik kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish instituti “Tabiiy va aniq fanlar ta’limi” kafedrasi mudiri lavozimida ishladi.

Prof. M. Mirsaburovning jami 100 dan ortiq maqolasi davriy ilmiy jurnallarda chop etilgan, shulardan 50 dan ortiq maqolalari Scopous tizimidagi jurnallarda e’lon qilinib , bu jurnallar ingliz tilida Yevropa va AQShda qayta nashr qilingan.

M. Mirsaburov matematiklarning umumjaxon III kongressida (Novosibirsk-1998) o‘z ma’ruzasi bilan ishtirok etgan. U Moskva, Nalchik, Ashxabat, Chimkent shaharlarida bo‘lib o‘tgan xalqaro konferensiyalar ishtirokchisidir.

M. Mirsaburov O‘zbekiston Fanlar Akademiyasining akademigi M. S. Saloxiddinov bilan hammualliflikda **“Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами”** nomli monografiya hamda magistrlar uchun “Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun Trikomi masalasi”, “Ikkinchi tartibli singulyar koeffitsiyentli noklassik tenglamalar uchun korrekt qo‘yilgan masalalar” (B. Islomov, N. B. Islomov vilan xamkorlikda) nomli o‘quv qo‘llanmalar va bir qancha uslubiy qo‘llanmalar yozgan.

M. Mirsaburov 2017- 2024 yillarda Termiz davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi mudiri lavozimida ishladi.

M. Mirsaburov 2024- yildan buyon Termiz davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi professori lavozimida ishlab kelmoqda.

Professor M. Mirsaburov raxbarligida 10 nafardan ortiq yoshlar fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) ilmiy darajasini olish uchun dissertatsiyalarini muvaffaqiyatli himoya qilishgan.

Professor M. Mirsaburov singulyar koeffitsiyentli buziluvchan giperbolik, elliptik va aralash turdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal masalalar nazariyasi sohasida o‘z ilmiy yo‘nalishi va maktabiga ega bo‘lgan, salohiyatli mutaxassislardan biri hisoblanadi.

Uning 53 yildan oshiq davrdagi samarali mehnatlari munosib taqdirlangan va 2011-yilda “Mustaqillikning 20 yilligi”, 2025-yilda Oliy ta‘lim a‘lochisi ko‘krak nishonlari bilan taqdirlangan.

Fizika matematika fanlari doktori, professor Miraxmat Mirsaburovni qutlug‘ 75 yoshi bilan tabriklab, USTOZ ga sihat-salomatlik va ilmiy- pedagogik ishlariga ulkan muvaffaqiyatlar tilaymiz.

Konferensiya tashkiliy qo‘mitasi

1 – SHO‘BA. BUZILUVCHAN, ARALASH VA KASR TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI TENGLAMALAR

СЕКЦИЯ 1. ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ, СМЕШАННЫЕ И ДРОБНО-ПОРЯДКОВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

UDK 517.954

An Initial-Boundary Value Problem for a Degenerate Fractional-Order Equation with Dzhrbashyan–Nersesyan Operators and Involution Perturbation

Abdullaev O. Kh., Duysenbaev R. S.
Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan;
obidjon.mth@gmail.com., ruslanduysenbaev.0299@gmail.com

Let,

$$\{\gamma_k\}_0^n = \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$$

be an arbitrary set of real numbers satisfying the condition $0 < \gamma_k \leq 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$

Define $\alpha_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1$, and throughout the thesis assume that $\alpha = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j - 1 > 0$.

The fractional differentiation operator of order α associated with the sequence $\{\gamma\}_n$ is called the Dzhrbashyan–Nersesyan operator and is defined by

$$D_{0t}^{\alpha} u(t) = D_{0t}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}} u(t) = D_{0t}^{\gamma_n - 1} D_{0t}^{\gamma_{n-1}} \cdots D_{0t}^{\gamma_1} D_{0t}^{\gamma_0} u(x),$$

where D_{0t}^{γ} denotes the fractional integral-differential operator of order γ in the sense of Riemann–Liouville [2].

Consider the following equation:

$$D_{0t}^{\alpha} u(x,t) - a_1 t^{\beta} u_{xx}(x,t) + a_2 t^{\beta} u(1-x,t) = t^{\beta} f(x), \tag{1}$$

in the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, where a_1 ($a_1 > 0$), a_2 and β are given real constants.

In this work, using Fourier series and the theory of Volterra-type integral equations we investigate the unique solvability of the first boundary-value problem for equation (1) in domain Ω.

References

1. **Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B.** *Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka,*. Izv. AN ArmSSR. Matem., 3:1 (1968), pp.3-28 (in Russian)

2. **A.A.Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J.Trujillo,** *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. MR2218073(2007a:34002).Zbl 1092.45003.

УДК 517.956

Inverse problem of determining the value of the unknown function on the characteristic of a hyperbolic domain

Abdullaev O. Kh.[1], Duysenbaev R. S.[1], Oripov M. M.[2]
[1]Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan;
[2]University of Exact and Social Sciences;
obidjon.mth@gmail.com, ruslanduysenbaev.0299@gmail.com,
maruf19911204@gmail.com

In this paper, we consider an inverse problem of the unknown function on the characteristic of a hyperbolic domain. The closely related inverse problem to this problem was investigated by Ashurov R.R., Zunnunov R.T. [1] for the following equation

$$0 = \begin{cases} \partial_t^\alpha u - u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{tt} - u_{xx}, & (x,t) \in G^-, \end{cases}$$

where ∂_t^α is Riemann–Liouville derivative, G^- is the domain located in the lower half-plane $(t < 0)$ and bounded by characteristics $AC : x + t = 0$, $BC : x - t = 1$, and the segment $[0, 1]$ of the straight line $t = 0$.

This research differs from the previous study by investigating a non-homogeneous degenerate equation with involution perturbation which has a form

$$f(x,t) = \begin{cases} t^{-\beta} {}_C D_{0t}^\alpha u(x,t) - a_1 u_{xx}(x,t) + a_2 u_{xx}(1-x,t), & 0 < t \le T, \\ u_{tt} - u_{xx}, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

where, ${}_C D_{0t}^\alpha$ is Caputo derivative,

$${}_C D_{0t}^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{h(s) - h(0)}{(t-s)^\alpha} ds, \ \ 0 < \alpha < 1,$$

α, β, a_i, $(i = 1, 2)$ are nonzero real numbers such that, $0 < \alpha < 1$, $\beta \ge 0$, $a_1 > 0$, $|a_2| < a_1$ and $f(x,t)$ is a given sufficiently smooth function.

Let $\Omega = \Omega^+ \cup J \cup \Omega^-$, where $\Omega^+ = \{(x,t) : 0 < x < 1, \ 0 < t \le T\}$, $J = \{(x,t) : 0 < x < 1, \ t = 0\}$ and Ω^- is a characteristic triangle bounded by the characteristics $AC : x + t = 0$, $BC : x - t = 1$ of equation (1) at $t < 0$, and the segment $[0, 1]$ on the straight line $t = 0$. Our aim is to find a regular solution to the following inverse problem:

Problem IP**.** Find a pair of functions $u(x,t)$ and $\varphi(x)$ in the domain Ω satisfying equation (1), with the following properties:

1. $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $u_{xx}(x,t) \in C(\Omega^+)$, $t^{-\beta} {}_C D_{0t}^\alpha u(x,t) \in C(\Omega^+ \cup J)$, $u(x,t) \in C^2(\Omega^-)$,
2. $\varphi(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$,
3. $u(x,t)$ satisfies the following boundary conditions

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x/2, -x/2) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

and the gluing condition

$$\gamma(x) \lim_{t \to +0} t^{-\beta} {}_C D_{0t}^\alpha u(x,t) = \lim_{t \to -0} u_t(x,t), \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

where $\psi(x)$ and $\gamma(x)$ are given functions.

Under certain conditions on the given data, we prove the unique solvability of the formulated problem by using Fourier series, the solution to the Cauchy problem, and integral equations. To find unknown function $u(x,t)$ as a solution of the first boundary-value problem for equation (1) in the parabolic domain Ω^+, we use Fourier method and the solution of the following initial value problem [2]:

$$t^{-\beta}{}_C D^{\alpha}_{0t} y(t) + \lambda y(t) = f(t),\ y(0) = y_0,\ 0 < \alpha < 1,\ \beta \geq 0,\ \lambda \neq 0,\ t > 0.$$

Further, using additional condition (4), from the solution of the first boudary-value problem, we find unknown function $\varphi(x)$.

References

1. **Ashurov R.R., Zunnunov R.T.** *An Analog of the Tricomi Problem for a Mixed-Type Equation with Fractional Derivative. Inverse Problems.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol 44, Issue 8, pp. 3225-3240.

2. **Fatma Al-Musalhi, Nasser Al-Salti and Erkinjon Karimov** *Exact Solution of a Non-Homogeneous Fractional Differential Equation with a Variable Coefficient and Its Applications.* AppliedMath, 2026, Vol 6, Issue 98.

UDK 517.954

An Inverse Problem for a Loaded Fractional-Order Diffusion Equation with Involution Perturbation

Abdullaev O. Kh., Sobirjonov A. K.
Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan;
obidjon.mth@gmail.com., avazbeksobirjonov1998@gmail.com

In this work, an inverse problem for a loaded fractional-order diffusion equation with involution perturbation is studied. The problem under consideration differs from others in that the equation contains a loaded term depending on the variable x.

Definition. *The fractional derivatives* ${}_C D^{\alpha}_{at}$ *of order* $0 < \alpha < 1$ *on* $[a,b]$ *defined as*

$${}_C D^{\alpha}_{at} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t \frac{u(s) - u(a)}{(t-s)^{\alpha}} ds$$

is called the left-sided Caputo fractional derivatives of order α *[1].*

In this domain $\Omega = \{0 < x < \pi,\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation

$${}_C D^{\alpha}_{0t} u(x,t) - a_1 u_{xx}(x,t) + a_2 u_{xx}(\pi - x, t) + \sum_{k=1}^{m} b_k(t) u(x_k, t) = f(x) g(t),\ (x,t) \in \Omega. \qquad (1)$$

Here, a_1, a_2 are nonzero real numbers, with $0 < \alpha \leq 1$ and $a_1 > 0$, $x_k \in (0,\pi)$ are arbitrary fixed numbers. The functions $b_k(t)$, $(k = \overline{1,m})$ and $f(x)$ are assumed to be given and sufficiently smooth.

Problem IP**.** Find a pair of functions $\{u(x,t), g(t)\}$ in the domain Ω such that $u(x,t)$ is a regular solution of equation (1) and satisfies the following conditions:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,\pi] \qquad (2)$$

$$u(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$u(x_0,t)=h(t), \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

where $x_0\in(0,\pi)$ is a fixed number, while $\varphi(x)$ and $h(t)$ are given sufficiently smooth functions.

We would like to note that if one of the x_k coincides with x_0, then, by condition (4), the corresponding loaded term is known.

By a regular solution of problem (1)–(3) we mean a function $u(x,t)$ of the class

$$W=\{u:\ u(x,t)\in C(\overline{\Omega});\ \ u_{xx}(x,t),\ {}_CD^{\alpha}_{0t}u\in C(\Omega)\}.$$

Direct and inverse problems for equation (1) with time-dependent loaded terms have been investigated by B.Turmetov, O.Abdullayev in works [2], [3]. It should be noted that, for equation (1) with loaded terms depending on the variable x, boundary value problems have not been previously studied.

Investigation of the problem.

We introduce the following notations: $u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t)$,

$$v(x,t)=\frac{1}{2}(u(x,t)+u(\pi-x,t)), \quad \omega(x,t)=\frac{1}{2}(u(x,t)-u(\pi-x,t)) \tag{5}.$$

Taking into account the notation (5), we split the problem (1)–(3) into the following two problems:

$$\begin{cases} {}_CD^{\alpha}_{0t}v(x,t)-(a_1-a_2)v_{xx}(x,t)+\sum\limits_{k=1}^{m}b_k(t)v(x_k,t)+\sum\limits_{k=1}^{m}b_k(t)\omega(x_k,t)=f_s(x)g(t)\\ v(x,0)=\varphi_s(x), \quad x\in[0,\pi];\\ v(0,t)=0, \quad v(\pi,t)=0, \quad t\in[0,T];\\ v(x_0,t)=h(t)-\omega(x_0,t) \quad t\in[0,T] \end{cases} \tag{6}$$

and

$$\begin{cases} {}_CD^{\alpha}_{0t}\omega(x,t)-(a_1+a_2)\omega_{xx}(x,t)=f_a(x)g(t)\\ \omega(x,0)=\varphi_a(x), \quad x\in[0,\pi]\\ \omega(0,t)=0, \quad \omega(\pi,t)=0, \quad t\in[0,T] \end{cases} \tag{7}$$

where,

$$f_s(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(\pi-x)), \quad f_a(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(\pi-x))$$

$$\varphi_s(x)=\frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(\pi-x)), \quad \varphi_a(x)=\frac{1}{2}(\varphi(x)-\varphi(\pi-x)).$$

Using the Green's function (see[4]) for the first boundary value problem, we obtain a formal solution to problems (6) and (7), which involves the loaded term $v(x_0,t)$ in (6). The uniqueness and existence of a solution to problem (7) can be found in [4].

Notice that a solution to problem (6) has the form:

$$v(x,t)=\int_0^1 G_0(x-\xi,t)\varphi_s(\xi)\,d\xi-\int_0^t\sum_{k=1}^{m}b_k(\eta)v(x_k,\eta)\,d\eta\int_0^1 G(x,t,\xi,\eta)\,d\xi-$$

$$-\int_0^t\sum_{k=1}^{m}b_k(\eta)\omega(x_k,\eta)\,d\eta\int_0^1 G(x,t,\xi,\eta)\,d\xi+\int_0^t g(\eta)d\eta\int_0^1 G(x,t,\xi,\eta)f_s(\xi)\,d\xi,$$

where

$$G_0(x-\xi,y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\sqrt{a_1-a_2}}\int_0^y \eta^{-\alpha}G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta,$$

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\alpha/2-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{\sqrt{a_1-a_2}(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{\sqrt{a_1-a_2}(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)\right].$$

Evaluating this formal solution at the points $x=x_k$, we derive a Volterra-type integral equation of the second kind for $v(x_k,t)$:

$$v(x_k,t)=\int_0^1 G_0(x_k-\xi,t)\varphi_s(\xi)\,d\xi-\int_0^t\sum_{j=1}^m b_j(\eta)v(x_j,\eta)\,d\eta\int_0^1 G(x_k,t,\xi,\eta)\,d\xi-$$

$$-\int_0^t\sum_{j=1}^m b_j(\eta)\omega(x_j,\eta)\,d\eta\int_0^1 G(x_k,t,\xi,\eta)\,d\xi+$$

$$+\int_0^t g(\eta)d\eta\int_0^1 G(x_k,t,\xi,\eta)f_s(\xi)\,d\xi,\quad k=\overline{1,m}. \tag{8}$$

Further, from the system of equations (8), we obtain

$$\sum_{k=1}^m b_k(t)v(x_k,t)=\sum_{k=1}^m b_k(t)F_{1k}(t)-\int_0^t\sum_{j=1}^m b_j(\eta)v(x_j,\eta)K_{1m}(t,\eta)\,d\eta,$$

where

$$K_{1m}(t,\eta)=\sum_{k=1}^m b_k(t)\int_0^1 G(x_k,t,\xi,\eta)\,d\xi,$$

$$F_{1k}(t)=\int_0^t G_0(x_k-\xi,t)\varphi_s(\xi)\,d\xi+\int_0^t g(\eta)d\eta\int_0^1 G(x_k,t,\xi,\eta)f_s(\xi)\,d\xi-$$

$$-\int_0^t\sum_{j=1}^m b_j(\eta)\omega(x_j,\eta)\,d\eta\int_0^1 G(x_k,t,\xi,\eta)\,d\xi.$$

Further, entering the designations

$$V_m(t)=\sum_{k=1}^m b_k(t)v(x_k,t),\quad \overline{F_{1m}}(t)=\sum_{k=1}^m b_k(t)F_{1k}(t)$$

we get the second kind Volterra integral equation on the form:

$$V_m(t)=\overline{F_{1m}}(t)-\int_0^t V_m(\eta)K_{1m}(t,\eta)d\eta, \tag{9}$$

where

$$|K_{1m}(t,\eta)|\le(t-\eta)^{\alpha/2-1},\quad |\overline{F_{1m}}(t)|\le const<\infty.$$

Notice that, if $\omega(x,t)$ is a known function, then the unique solvability of this Volterra integral equation ensures that

$$V_m(t) \equiv \sum_{k=1}^{m} b_k(t) v(x_k, t)$$

is uniquely determined. Hence, we can conclude that problem (6) is uniquely solvable.

Therefore, we first need to prove the solvability of problem (7), which can be established by the Fourier series method.

Theorem. Let $a_1 > 0$, $a_1 \pm a_2 > 0$, $b_k(t) \in C[0,T]$, $h(t) \in C[0,T] \cap C^1(0,T)$ and $\varphi(x), f(x) \in C[0,\pi]$. If $f(x_0) \neq 0$, then the Problem IP has a unique solution.

References

1. **A.A.Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J.Trujillo,** *Theory and applications of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. MR2218073(2007a:34002).Zbl 1092.45003.

2. **O.Abdullaev, A. Sobirjonov, B.Turmetov.** *On a class of inverse problems for a loaded diffusion equation fractional order with involution perturbation*. Bulletin of the Institute of Mathematics, 2025, Vol. 8, No 1 61

3. **O.Abdullaev, A. Sobirjonov, B.Turmetov.** *Boundary value problems for a loaded fractional order diffusion equation with involution perturbation.* J Math Sci (2025). https://doi.org/10.1007/s10958-025-07938-3.

4. **A. V. Pskhu.** *Partial Differential Equations Fractional Order*. Nauka, Moscow, 2005. [in Russian].

MSC 58A17, 34A12

UCHTA BIZILISH CHIZIG'IGA EGA PARABOLIK TENGLAMANING AVTOMODEL YECHIMLARI

Arziqulov Z. O.,
Farg'ona davlat texnika universiteti, Farg'ona, O'zbekistan;
zafarbekarzikulov1984@gmail.com

$\Omega = (x,y,z,t) : x > 0, ; y > 0, ; z > 0$ sohada quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$L(u) = u_t - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} - \frac{2\alpha}{x}u_x - \frac{2\beta}{y}u_y - \frac{2\gamma}{z}u_z = 0,\ \alpha,\beta,\gamma = const, \tag{1}$$

(1) tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$u = P \cdot \omega(\xi,\eta,\zeta), \tag{2}$$

bu yerda

$$\xi = -\frac{x^2}{12t}, \quad \eta = -\frac{y^2}{12t},\ \zeta = -\frac{z^2}{12t},\ P = t^{-\frac{1}{2}},$$

$\omega(\xi,\eta,\zeta)$ – noma'lum funksiya.

(2) funksiyaning kerakli hosilalarini hisoblab, ularni (1) tenglamaga qo'yish natijasida quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$A_1\omega_{\xi\xi}(\xi,\eta,\zeta)+A_2\omega_{\xi\eta}(\xi,\eta,\zeta)+A_3\omega_{\xi\zeta}(\xi,\eta,\zeta)+A_4\omega_{\eta\eta}(\xi,\eta,\zeta)+A_5\omega_{\eta\xi}(\xi,\eta,\zeta)+A_6\omega_{\eta\zeta}(\xi,\eta,\zeta)$$
$$+A_7\omega_{\zeta\zeta}(\xi,\eta,\zeta)+A_8\omega_{\zeta\xi}(\xi,\eta,\zeta)+A_9\omega_{\zeta\eta}(\xi,\eta,\zeta)+A_{10}\omega_{\xi}(\xi,\eta,\zeta)+A_{11}\omega_{\eta}(\xi,\eta,\zeta)+A_{12}\omega_{\zeta}(\xi,\eta,\zeta)$$
$$+A_{13}\omega(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

bu yerda

$$A_1=P\left(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2\right)=\xi,\ A_2=2P(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y+\xi_z\eta_z)=0,$$
$$A_3=2P(\xi_x\zeta_x+\xi_y\zeta_y+\xi_z\zeta_z)=0, A_4=P\left(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2\right)=\eta,$$
$$A_5=2P(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y+\xi_z\eta_z)=0,\ A_6=2P(\eta_x\zeta_x+\eta_y\zeta_y+\eta_z\zeta_z)=0,$$
$$A_7=P\left(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2\right)=\zeta,\ A_8=2P(\xi_x\zeta_x+\xi_y\zeta_y+\xi_z\zeta_z)=0,$$
$$A_9=2P(\eta_x\zeta_x+\eta_y\zeta_y+\eta_z\zeta_z)=0,$$

$$A_{10}=\frac{2\alpha}{x}P\xi_x+\frac{2\beta}{y}P\xi_y+\frac{2\gamma}{z}P\xi_z-P\xi_t+2P_x\xi_x+P\xi_{xx}+2P_y\xi_y+P\xi_{yy}+2P_z\xi_z+P\xi_{zz}=\frac{1+2\alpha}{2}-3\xi$$

$$A_{11}=\frac{2\alpha}{x}P\eta_x+\frac{2\beta}{y}P\eta_y+\frac{2\gamma}{z}P\eta_z-P\eta_t+2P_x\eta_x+P\eta_{xx}+2P_y\eta_y+P\eta_{yy}+2P_z\eta_z+P\eta_{zz}=\frac{1+2\beta}{2}-3\eta$$

$$A_{12}=\frac{2\alpha}{x}P\zeta_x+\frac{2\beta}{y}P\zeta_y+\frac{2\gamma}{z}P\zeta_z-P\zeta_t+2P_x\zeta_x+P\zeta_{xx}+2P_y\zeta_y+P\zeta_{yy}+2P_z\zeta_z+P\zeta_{zz}=\frac{1+2\gamma}{2}-3\zeta$$

$$A_{13}=-P_t+P_{xx}+P_{yy}+P_{zz}+\frac{2\alpha}{x}P_x+\frac{2\beta}{y}P_y+\frac{2\gamma}{z}P_{z.}=-\frac{3}{2}.$$

Bu yerda koeffitsiyentlarni hisoblash orqali quyidagi xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases}\xi\cdot\omega_{\xi\xi}(\xi,\eta,\zeta)+\left(\frac{1+2\alpha}{2}-\xi\right)\omega_{\xi}(\xi,\eta,\zeta)-\eta\cdot\omega_{\eta}(\xi,\eta,\zeta)-\zeta\omega_{\zeta}(\xi,\eta,\zeta)-\frac{1}{2}\omega=0\\ \eta\cdot\omega_{\eta\eta}(\xi,\eta,\zeta)+\left(\frac{1+2\beta}{2}-\eta\right)\omega_{\eta}(\xi,\eta,\zeta)-\xi\cdot\omega_{\xi}(\xi,\eta,\zeta)-\zeta\cdot\omega_{\zeta}(\xi,\eta,\zeta)-\frac{1}{2}\omega=0\\ \zeta\cdot\omega_{\zeta\zeta}(\xi,\eta,\zeta)+\left(\frac{1+2\gamma}{2}-\zeta\right)\omega_{\zeta}(\xi,\eta,\zeta)-\xi\cdot\omega_{\xi}(\xi,\eta,\zeta)-\eta\cdot\omega_{\eta}(\xi,\eta,\zeta)-\frac{1}{2}\omega=0\end{cases}\tag{3}$$

(3) xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi bilan quyidagi xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasini taqqoslab[1]:

$$\begin{cases}xu_{xx}+(c_1-x)\,u_x-yu_y-zu_z-au=0\\ yu_{yy}-xu_x+(c_2-y)\,u_y-zu_z-au=0\\ zu_{zz}-xu_x-yu_y+(c_3-z)\,u_z-au=0\end{cases}\tag{4}$$

(4) sistema uchun Kummerning konfluent funksiyalari orqali ifodalangan sakkizta chiziqli erkli yechim olinadi va bu yechimlar quyidagicha yoziladi:

$$\omega_1=\lambda_1\Psi_2\left(a;c_1,c_2,c_3;x,y,z\right)\tag{5}$$

$$\omega_2=\lambda_2x^{1-c_1}\Psi_2\left(1-c_1+a;2-c_1,c_2,c_3;x,y,z\right)\tag{6}$$

$$\omega_3=\lambda_3y^{1-c_2}\Psi_2\left(1-c_2+a;c_1,2-c_2,c_3;x,y,z\right)\tag{7}$$

$$\omega_4=\lambda_4z^{1-c_3}\Psi_2\left(1-c_3+a;c_1,c_2,2-c_3;x,y,z\right)\tag{8}$$

$$\omega_5=\lambda_5x^{1-c_1}y^{1-c_2}\Psi_2\left(2-c_1-c_2+a;2-c_1,2-c_2,c_3;x,y,z\right)\tag{9}$$

$$\omega_6 = \lambda_6 y^{1-c_2} z^{1-c_3} \Psi_2 \left(2 - c_2 - c_3 + a; c_1, 2 - c_2, 2 - c_3; x, y, z\right) \tag{10}$$

$$\omega_7 = \lambda_7 x^{1-c_1} z^{1-c_3} \Psi_2 \left(2 - c_1 - c_3 + a; 2 - c_1, c_2, 2 - c_3; x, y, z\right) \tag{11}$$

$$\omega_8 = \lambda_8 x^{1-c_1} y^{1-c_2} z^{1-c_3} \Psi_2 \left(3 - c_1 - c_2 - c_3 + a; 2 - c_1, 2 - c_2, 2 - c_3; x, y, z\right) \tag{12}$$

bu yerda $\lambda_i = const$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ va quyidagi qator bilan aniqlanuvchi maxsus funksiya:

$$\Psi_2(a; c_1, c_2, c_3; x, y, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p}}{(c_1)_m (c_2)_n (c_3)_p m! n! p!} x^m y^n z^p$$

(5)-(12) funksiyalarini (2) formulaga qo'yib, (1) tenglamaning quyidagi avtomodel yechimlari olinadi:

$$u_1(x, y, z, t) = \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{t}} \Psi_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{1+2\alpha}{2}, \frac{1+2\beta}{2}, \frac{1+2\gamma}{2}; -\frac{x^2}{8t}, -\frac{y^2}{8t}, -\frac{z^2}{8t}\right),$$

$$u_2 = \lambda_2 \frac{x^{1-2\alpha}}{t^{1-\alpha}} \Psi_2 \left(1 - \alpha; \frac{3-2\alpha}{2}, \frac{1+2\beta}{2}, \frac{1+2\gamma}{2}; -\frac{x^2}{8t}, -\frac{y^2}{8t}, -\frac{z^2}{8t}\right)$$

$$u_3 = \lambda_3 \frac{y^{1-2\beta}}{t^{1-\beta}} \Psi_2 \left(1 - \beta; \frac{1+2\alpha}{2}, \frac{3-2\beta}{2}, \frac{1+2\gamma}{2}; -\frac{x^2}{8t}, -\frac{y^2}{8t}, -\frac{z^2}{8t}\right)$$

$$u_4 = \lambda_4 \frac{z^{1-2\gamma}}{t^{1-\gamma}} \Psi_2 \left(1 - \gamma; \frac{1+2\alpha}{2}, \frac{1+2\beta}{2}, \frac{3-2\gamma}{2}; -\frac{x^2}{8t}, -\frac{y^2}{8t}, -\frac{z^2}{8t}\right)$$

$$u_5 = \lambda_5 \frac{x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta}}{t^{2-\alpha-\beta}} \Psi_2 \left(\frac{3-2\alpha-2\beta}{2}; \frac{3-2\alpha}{2}, \frac{3-2\beta}{2}, \frac{1+2\gamma}{2}; -\frac{x^2}{8t}, -\frac{y^2}{8t}, -\frac{z^2}{8t}\right)$$

$$u_6 = \lambda_6 \frac{y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma}}{t^{2-\beta-\gamma}} \Psi_2 \left(\frac{3-2\beta-2\gamma}{2}; \frac{1+2\alpha}{2}, \frac{3-2\beta}{2}, \frac{3-2\gamma}{2}; -\frac{x^2}{8t}, -\frac{y^2}{8t}, -\frac{z^2}{8t}\right)$$

$$u_7 = \lambda_7 \frac{x^{1-2\alpha} z^{1-2\gamma}}{t^{2-\alpha-\gamma}} \Psi_2 \left(\frac{3-2\alpha-2\gamma}{2}; \frac{3-2\alpha}{2}, \frac{1+2\beta}{2}, \frac{3-2\gamma}{2}; -\frac{x^2}{8t}, -\frac{y^2}{8t}, -\frac{z^2}{8t}\right)$$

$$u_8 = \lambda_8 \frac{x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma}}{t^{3-\alpha-\beta-\gamma}} \Psi_2 \left(\frac{5-2\alpha-2\beta-2\gamma}{2}; \frac{3-2\alpha}{2}, \frac{3-2\beta}{2}, \frac{3-2\gamma}{2}; -\frac{x^2}{8t}, -\frac{y^2}{8t}, -\frac{z^2}{8t}\right)$$

bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$-o'zgarmaslar.

(1) tenglama uchun n=2 bo'lgan holda [2] maqolada avtomodel yechimlar topilgan.

References

1. **Эргашев Т.Г.** *Конфлюэнтные гипергеометрические функции от трех переменных и соответствующие им системы дифференциальных уравнений с частными производными.* Бюллетень Института Математики. 2024. Том.7, № 4, с. 121–215.

2. **Hasanov A., Ruzhansky M.** *Hypergeometric expansions of solutions of the degenerating model parabolic equations of the third order.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol.41, Issue 1, pp. 27–31.

UDK 517.95

A Novel Approach to the Inverse Problem of Identifying Fractional Derivative Orders in Partial Differential Equations

Ashurov R.R.[1]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, Tashent, Uzbekistan; ashurovr@gmail.com

In this talk, we will consider a relatively new inverse problem: determining the order of the fractional derivative in differential equations. This problem is very important: first, there is no instrument for measuring this parameter, and second, both the form and properties of the solution to the forward problem depend on the precise value of this parameter.

This problem has attracted considerable attention over the past decade. Many interesting results have already been obtained (see the review article [1]).

First, we will briefly review some of these results. Then, we will present a new formulation of the problem and methods for its solution. The new formulation and its solution provide an answer to the open problem posed in [1]. Moreover, the new formulation of the inverse problem covers virtually all previously unconsidered issues and eliminates all the shortcomings of the classical formulation of this inverse problem.

References

1. **Li Z., Liu Y., Yamamoto M.** *Inverse Problems of Determining Parameters of the Fractional Partial Differential Equations.* Handbook of Fractional Calculus with Applications, Vol. 2, DeGruyter (2019).

УДК 517.956

KASR TARTIBLI YUKLANGAN DIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG‘ICH CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING MAVJUDLIGI VA YAGONALIGI

Baltayeva U.[1,2], Jumanazarov O.I.[1,3], Nurmetova A.A.[1]
[1]Xorazm Ma’mun akademiyasi, Aniq fanlar bo‘limi, Xiva, O‘zbekiston;
[2]Urganch davlat universiteti, Amaliy matematika va matematik fizika kafedrasi, Urganch, O‘zbekiston;
[3]Urganch davlat pedagogika instituti, Urganch, O‘zbekiston;
e-mail: umida_baltayeva@mail.ru; otabek1347070@gmail.com; azizanurmetova1@gmail.com

Kalit so‘zlar: kasr tartibli hosila, Riman–Liuvill hosilasi, yuklangan tenglama, Grin funksiyasi, Volterra–Fredgolm integral tenglamasi.

$D = \{(x, y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ sohada quyidagi integral yuklangan kasr tartibli diffuziya tenglamasini qaraymiz:

$$u_{xx}(x, y) - D^{\alpha}_{0y}u(x, y) = f(x, y) + \lambda(y) \int_0^a K(x, s)u(s, y)\, ds, \qquad 0 < \alpha \leq 1. \tag{1}$$

Bu yerda D^{α}_{0y} — y bo‘yicha Riman–Liuvill ma’nosidagi kasr tartibli hosila bo‘lib, $0 < \alpha < 1$ da

$$D^{\alpha}_{0y}u(x, y) = \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, \eta)}{(y-\eta)^{\alpha}}\, d\eta\right]$$

ko‘rinishda aniqlanadi, $\alpha = 1$ bo‘lganda esa y bo‘yicha birinchi tartibli hosilani bildiradi. $K(x,s)$, $\lambda(y)$ va $f(x,y)$ — berilgan yetarlicha silliq funksiyalar, $u(x,y)$ esa noma’lum funksiyadir.

Boshlang‘ich chegaraviy masala. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,\alpha}_{x,y}(D)$;

2) $u(x,y)$ funksiya D sohada (1) tenglamaning regular yechimi bo‘lsin;

3) $u(x,y)$ quyidagi chegaraviy va boshlang‘ich shartlarni qanoatlantirsin:

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \qquad u(a,y) = \varphi_1(y), \qquad 0 < y < b, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y} u(x,y) = \tau(x), \qquad 0 < x < a. \tag{3}$$

Bu yerda $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$ va $\tau(x)$ lar berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Teorema. Agar $0 < \alpha \le 1$,

$$y^{1-\alpha} f(x,y) \in C(D), \qquad y^{1-\alpha}\varphi_0(y) \in C[0,b], \qquad y^{1-\alpha}\varphi_1(y) \in C[0,b],$$

$$\tau(x) \in C[0,a], \qquad \lambda(y) \in C[0,b], \qquad K(x,s) \in C([0,a]\times[0,a]),$$

bo‘lib, $f(x,y)$ funksiya x bo‘yicha Gyolder shartini qanoatlantirsa va

$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y}\varphi_0(y) = \tau(0), \qquad \lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y}\varphi_1(y) = \tau(a) \tag{7}$$

moslik shartlari bajarilsa, u holda boshlang‘ich chegaraviy masalaning yagona yechimi mavjud.

Grin funksiyasi yordamida yuklangan kasr tartibli diffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich chegaraviy masala Volterra–Fredgolm tipidagi integral tenglamaga keltiriladi. Takroriy yadrolar va ketma-ket yaqinlashish usuli yechimning aniq integral tasvirini beradi. Shu asosda teorema shartlari bajarilganda qaralayotgan birinchi chegaraviy masalaning regular yechimi mavjud va yagona ekanligi kelib chiqadi.

Adabiyotlar

1. **Pskhu A.V.** *Partial Differential Equations of Fractional Order.* Moscow: Nauka, 2005.

2. **Nakhushev A.M.** *Loaded Equations and Their Applications.* Moscow: Nauka, 2012.

3. **Baltayeva U.I., Jumanazarov O.I.** *Existence and Uniqueness of Solutions to a First Boundary Value Problem for a Loaded Fractional Diffusion Equation.* Electronic Journal of Actual Problems of Modern Science, Education and Training, 2026, Issue 6, pp. 89–93. ISSN 2181-9750.

УДК 517.956

Kasr tartibli operatorlarning bir tadbiqi haqida

Begaliyev B. N.[1], Yo‘ldoshev B. B.[2]

[1,2]Termiz iqtisodiyot va servis universiteti, Termiz, O‘zbekiston;

b49751318@gmail.com

Kasr tartibli integro-differentsial operatorlarning asosiy ta’riflari, jumladan Riman-Liuvill va Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosilalar o’rganilgan [1, 2]. Shuningdek, aralash tipdagi tenglamalar uchun xarakteristikada kasr tartibli hosila qatnashgan Naxushev nolokal masalasi tahlil qilinib [3], operatorlarning amaliy tadbiqlari yoritilgan.

1. Asosiy tushunchalar. Matematik analizning fundamental tushunchalaridan bo'lgan hosila va integralni ixtiyoriy kasr tartibga umumlashtirish g'oyasi 1695-yilda Leybnits va Lopital yozishmalarida paydo bo'lgan. Bugungi kunda bu soha murakkab, xotiraga ega bo'lgan jarayonlarni modellashtirishda kuchli vositadir [1].Kasr tartibli hisobda eng ko'p qo'llaniladigan operatorlar Riman-Liuvill va Kaputo operatorlaridir. $f(x)$ funksiya uchun $\alpha > 0$ tartibli Riman-Liuvill integrali va hosilasi $(n = [\alpha] + 1)$ quyidagicha ta'riflanadi [1, 2]:

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt$$

Amaliyotda, xususan, boshlang'ich shartlari berilgan Koshi masalalarini (Laplas almashtirishi orqali) yechishda qulay bo'lishi uchun Kaputo hosilasidan foydalaniladi [1]:

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt$$

Chiziqli kasr tartibli differensial tenglamalarning analitik yechimlari odatda eksponensial funksiyaning umumlashtirilgan ko'rinishi bo'lmish Mittag-Leffler funksiyasi orqali ifodalanadi [2]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

2. Aralash tipdagi tenglamalarda kasr tartibli operatorlarning tadbiqi. Kasr tartibli operatorlar nafaqat vaqtga bog'liq evolutsion jarayonlarda (viskoelastiklik, anomal diffuziya) [2], balki matematik fizikaning aralash tipdagi tenglamalari uchun qo'yilgan nolokal masalalarda ham fundamental rol o'ynaydi [3]. Bunga yaqqol misol sifatida Gellerstedt tenglamasi uchun Naxushev masalasini keltirish mumkin.Qismiy chegaralangan Ω sohaning $y > 0$ (elliptik) qismi silliq σ chiziq bilan, $y < 0$ (giperbolik) qismi esa $A(0,0)$ va $B(1,0)$ dan chiquvchi AC va BC xarakteristikalar bilan chegaralangan bo'lsin. Quyidagi Gellerstedt tenglamasini qaraymiz:

$$\operatorname{sgn}(y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0$$

Naxushev nolokal masalasi: Tenglamaning Ω sohada regulyar bo'lgan shunday $u(x,y)$ yechimi topilsinki, u elliptik qism chegarasida $u(x,y)\big|_{\sigma} = \varphi(x,y)$ shartni, giperbolik qismda esa xarakteristikadagi iz va parabolik buzilish chizig'idagi izni bog'lovchi quyidagi kasr tartibli nolokal shartni qanoatlantirsin [3]:

$$a(x)D_{0x}^{1-2\beta} u[\Theta_0(x)] + b(x)u(x,0) = \gamma(x), \quad 0 < x < 1$$

Bu yerda $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$, $\Theta_0(x)$ esa xarakteristikalar kesishish nuqtasi.

Ushbu nolokal shartda $D_{0x}^{1-2\beta}$ (Riman-Liuvill hosilasi) qatnashishi bejiz emas. Tenglamaning giperbolik qismidagi yechimi Darbu formulasi orqali yozilganda, $u[\Theta_0(x)]$ qiymati $y = 0$ chiziqdagi $u(x,0) = \tau(x)$ va $u_y(x,0) = \nu(x)$ funksiyalarning kasr tartibli integrallari ($D_{0x}^{-\beta}$ va $D_{0x}^{\beta-1}$) orqali ifodalanadi [3]. Nolokal shartdagi kasr tartibli hosila Darbu formulasidagi kasr tartibli integrallar bilan o'zaro ta'sirlashib, operatorlar yarim gruppasi xossasiga ko'ra darajalarni qisqartiradi. Natijada masala $y = 0$ chiziqda $\tau(x)$ va $\nu(x)$ ga nisbatan singulyar integral tenglamaga keltiriladi va muvaffaqiyatli yechiladi.

Kasr tartibli integro-differentsial operatorlar uzluksiz muhitlar mexanikasi va anomal diffuziya jarayonlarini o'rganishda xotira effektini hisobga olish imkonini beradi. Shuningdek, aralash

tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida (Naxushev tipidagi masalalarda) Darbu formulasi va kasr tartibli operatorlarning uyg'unligi, murakkab nolokal masalalarni qat'iy analitik yechish uchun beqiyos matematik poydevor yaratadi.

Adabiyotlar

1. **Podlubny I.** *Fractional Differential Equations.* San Diego: Academic Press, 1999. - 340 p.
2. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam: Elsevier, 2006. - 540 p.
3. **Нахушев А.М.** *Дробное исчисление и его применение.* Москва: Физматлит, 2003. - 272 с.

UDK 517.956.6

On the unique solvability of a weak generalized solution of the nonlinear Tricomi equation with semi-nonlocal boundary conditions in a parallelepiped

S.Z. Dzhamalov[1], A.A. Shokirov[2,3]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; siroj63@mail.ru
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
[3]Branch of Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University) in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan
shokirov.abduvosiq96@gmail.com

In the domain

$$G = (-1,1) \times (0,\ell) \times (0,T) = \left\{(x,y,t) \in R^3 : -1 < x < 1,\ 0 < y < \ell,\ 0 < t < T\right\}$$

we consider a nonlinear Tricomi equation

$$Lu = xu_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) + \alpha(x,y,t)u_t + c(x,y,t)u + |u|^\rho u = g(x,y,t,u) + f(x,y,t), \quad (1)$$

where $\alpha(x,y,t)$, $c(x,y,t)$, $g(x,y,t,u)$, $f(x,y,t)$ are sufficiently smooth functions, $\rho > 0$.

By $L_p(G)$, $1 \le p < \infty$, we denote the Banach space consisting of all measurable (in the Lebesgue sense) functions defined on G that have finite norm

$$\|u\|_{L_p(G)} = \|u\|_{L_p} = \left(\int\limits_G |u|^p dxdydt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

By $W_2^l(G)$ we denote the Sobolev spaces with the norm

$$\|u\|^2_{W_2^l(G)} = \|u\|_l^2 = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \int\limits_G (D^\alpha u)^2 dxdydt.$$

Semi-nonlocal boundary value problem. Find a weak generalized solution of equation (1) from the space $W(G) = W_2^1(G) \bigcap L_p(G)$, $p = \rho + 2$, satisfying the following semi-nonlocal boundary conditions:

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad p = 0, 1, \quad (2)$$

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0, \tag{3}$$

where γ is a number such that $|\gamma| > 1$.

By $W_1(G)$ we denote the following class of functions:

$$W_1(G) = \left\{ v \in W_2^2(G) : \ \gamma D_t^p v|_{t=0} = D_t^p v|_{t=T}, \ p = 0, 1; \ v|_{x=-1} = v|_{x=1} = 0; \ v|_{y=0} = v|_{y=\ell} = 0 \right\}.$$

LetвЂ™s enter the following forms for functions $u \in W_2^1(G) \bigcap L_p(G)$, $p = \rho + 2$ and $v \in W_1(G)$:

$$a(u,v) = \int\limits_Q \left(x(-u_t v_t + \lambda u_t v) + u_x v_x + u_y v_y + \alpha(x,y,t) u_t v + c(x,y,t) uv + |u|^\rho uv \right) e^{-\lambda t} dQ,$$

$$F(f,g,v) = \int\limits_Q \left(g(x,y,t,u) + f(x,y,t) \right) v e^{-\lambda t} dQ,$$

where $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$.

Definition. *If $\forall v \in W_1(G)$ the integral identity*

$$a(u,v) = F(f,g,v)$$

holds, then we call a function u a weak generalized solution of problem (1)-(3) from the space $W_2^1(G) \bigcap L_p(G)$

Let the coefficients of equation (1) be sufficiently smooth functions, and let the following conditions be satisfied regarding the coefficients of equation (1) and the right-hand side:

Condition 1:

The function g satisfies the Lipschitz condition with respect to the variable u:

$$|g(x,y,u_1) - g(x,y,u_2)| \le K |u_1 - u_2|$$

where $0 < K < 1$, and $g \in (\bar{G})$ is continuous, from which it follows that $|g| \le M$, where $M = const$.

Condition 2:

$$2\alpha(x,y,t) - \lambda x \ge \delta_1 > 2, \quad \lambda c(x,y,t) - c_t(x,y,t) \ge \delta_2 > 1, \quad c(x,y,T) \ge c(x,y,0),$$

where $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, $\delta_i = const$.

Theorem. *Let Conditions 1 and 2 be satisfied, and let $0 < \rho \le 2$. Then, for any function $f \in L_2(G)$, there exists a unique weak generalized solution to problem (1)-(3) in the space $W_2^1(G) \bigcap L_p(G)$.*

References

1. **Lions J.-L.** *Some methods for solving nonlinear boundary value problems*, Mir, 1972. [in russian]

2. **Larkin N.A., Novikov V.A., Yanenko N.N** *Nonlinear equations of variable type*, Nauka, 1983. [in russian]

3. **Dzhamalov S. Z.** *On the well-posedness of one nonlocal boundary value problem with constant coefficients for a nonlinear equation of mixed type of the second kind of the second order in space*, Ukr. Jour. Math., 71(1), 2019, 47-58.

UDK 517.946.6 (35M10)

Linear inverse problems with nonlocal boundary conditions for a three-dimensional mixed-type equation of the second kind of the fourth order in a parallelepiped

Dzhamalov S. Z.[1], **Khalkhadzhaev B. B.**[2]
[1]**V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;**
[2]**Cyber University, Tashkent region, Uzbekistan;**
siroj63@mail.ru / xalxadjaev@yandex.ru

As is known, to date the inverse problems for classical equations, such as parabolic, elliptic and hyperbolic types of the second order, have been fairly well studied [1]. Linear inverse problems for second order mixed-type equations on the plane have been studied in works [2,3]. For three-dimensional and multidimensional mixed-type equations of the second kind, of the second order, with local and nonlocal conditions, have been studied and developed in works [4,5,6].

For higher order mixed-type equations of the second kind, such problems have been very little investigated [7]. We attempt to partially fill this gap within the framework of this work.

In this paper we consider the well-posedness of a linear inverse problem for a three-dimensional mixed-type equation of the second kind, of the fourth order, in a parallelepiped. For this problem, by the methods of Fourier, "ε-regularization", a priori estimates [8,9], successive approximations and contraction mappings [10], existence and uniqueness theorems for a regular generalized solution of the linear inverse problem are proved in an anisotropic Sobolev space [11].

Statement of the problem. In the domain

$$G = (0,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell) = \{(x,t);\ 0 < x < 1;\ 0 < t < T < +\infty;\ 0 < y < \ell\}$$

we consider a mixed-type equation of the second kind of the fourth order.

$$Lu = Pu + Mu + Nu = \psi(x,t,y), \tag{1}$$

where

$$Pu = \sum_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u, \qquad Mu = a u_{xxxx} - b u_{xxtt} - c u_{xx}, \qquad Nu = u_{yyyy},$$

$K_4(x,t) = K_4(t)$, $K_4(0) = K_4(T) = 0$; $a, b, c -$ const > 0, $D_t^i u = \partial^i u / \partial t^i$ $(i = 0,1,2,3,4)$. Equation (1) is of the second kind, since no sign restriction is imposed on the function $K_4(t)$ with respect to t inside the segment $[0,T]$ [7].

We further assume $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t) \times f(x,t,y)$, where $g(x,t,y)$ and $f(x,t,y)$ are given functions, and $h(x,t)$ is to be determined.

Linear inverse problem. Find functions $\{u(x,t,y), h(x,t)\}$ satisfying equation (1) in the domain G, such that the function $u(x,t,y)$ satisfies the following nonlocal boundary conditions

$$\gamma D_t^q u\big|_{t=0} = D_t^q u\big|_{t=T}, \qquad q = 0,1,2, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \qquad u_{xx}\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0, \qquad u_{yy}\big|_{y=0} = u_{yy}\big|_{y=\ell} = 0, \tag{4}$$

and the additional condition

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t), \qquad \text{where } 0 < \ell_0 < \ell < +\infty, \tag{5}$$

and, together with the function $h(x,t)$, belongs to the class

$$U = \{(u,h) \mid u \in W_2^{4,3}(G);\ h \in W_2^4(Q)\}.$$

Here $W_2^{4,3}(G)$ denotes the anisotropic Sobolev space with norm

$$\|u\|^2_{W_2^{4,3}(G)} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (1+\mu_k^4)^3 \, \|u_k(x,t)\|^2_{W_2^4(Q)},$$

where $u_k(x,t)$ are the Fourier coefficients of $u(x,t,y)$ with respect to the systems $Y_k(y) = \{\sqrt{2\ell^{-1}} \sin m_k y\}$, $m_k = \pi k \ell^{-1}$, $k = 1,2,3,\ldots$

$W_2^4(Q)$ denotes the Sobolev space with norm

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^4(Q)} = \sum_{|\alpha| \le 4} \int_Q \left|D^\alpha \vartheta\right|^2 dx\, dt,$$

where α is a multi-index, D^α is the generalized derivative with respect to x and t.

We require the following conditions to hold.

Let all the coefficients of equation (1) be sufficiently smooth functions in the domain $\overline{G}$, and let the following conditions hold for the coefficients of the right-hand side and the given function $\varphi_0(x,t)$.

Condition 1 (Nonlocality). For $i = \overline{0,3}$, $K_i(x,0) = K_i(x,T)$, and $\gamma g(x,0,z) = g(x,T,z)$, $\gamma f(x,0,z) = f(x,T,z)$. In addition, the coefficients of equation (1) must satisfy the following conditions: for all $(x,t) \in \overline{Q}$ the function $K_1(x,t) > 0$ and it is sufficiently large, $K_3(x,t) < 0$ and the quantity $\|K_3\|_{C^2(\overline{Q})}$ is sufficiently large, moreover,

$$-\big(2K_3 + (2j-3)K_{4t} + 3\lambda K_4\big) \ge \delta_3 > 0, \quad (j = 0,1,2);$$

$$2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \ge \delta_2 > 0, \qquad \lambda K_0 - K_{0t} \ge \delta_1 > 0,$$

where $\lambda = \dfrac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$.

Smoothness. $g(x,t,\ell_0) = g_0(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})$, $f(x,t,\ell_0) = f_0(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})$, $|f_0(x,t)| \ge \eta > 0$, $f \in W_2^{3,3}(G)$, $g \in W_2^{1,3}(G)$.

Condition 2. $\varphi_0(x,t) \in W_2^5(Q)$, $\gamma D_t^p \varphi_0\big|_{t=0} = D_t^p \varphi_0\big|_{t=T}$, $p = 0,1,2,3$; $\varphi_0\big|_{x=0} = \varphi_0\big|_{x=1} = 0$, $\varphi_{0xx}\big|_{x=0} = \varphi_{0xx}\big|_{x=1} = 0$.

Condition 3. There exists $\sigma > 0$ such that $\delta_0 - 31 e^{\lambda T} \sigma^{-1} = \delta > 0$, $q = M\|f\|^2_{W_2^{3,3}(G)} < 1$, where $\delta_0 = \min\{\delta_3, \delta_2, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_1\}$,

$$M = \sigma e^{\lambda T} m (\ell\delta)^{-1} \eta^{-2} \|f_0\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})},$$

$m = 10 c_1 c_2 c_3$ is a positive constant, and c_i are the constants of the Sobolev embedding theorem.

Theorem. *Let Conditions 1, 2 and 3 hold for the coefficients of equation (1). Then there exists a unique solution of the linear inverse problem (1)–(5) in the class U.*

The theorem is proved by the methods of Fourier, "ε-regularization", a priori estimates, successive approximations and contraction mappings in the anisotropic Sobolev space $W_2^{4,3}(G)$.

Literature

1. **Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Vasiliev V.G.** *Multidimensional inverse problems for differential equations.* Novosibirsk: Nauka, 1969. – P. 67.
2. **Megrabov A.G.** *Forward and inverse problems for hyperbolic, elliptic and mixed type equations.* Utrecht; Boston: VSP. – 230 p.
3. **Sabitov K.B., Martemyanova N.V.** *Nonlocal inverse problem for a mixed-type equation.* Izv. Vuzov. Matematika. – 2011. – № 2. – P. 71–85.
4. **Dzhamalov S.Z.** *A linear inverse problem for a mixed-type equation of the second kind of the second order with nonlocal boundary conditions in three-dimensional space.* Vestnik KRAUNC, 2017, vol. 1, № 13, P. 7–13.
5. **Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R.** *On a linear inverse problem for a multidimensional mixed-type equation of the second kind, second order.* Differential Equations. – 2019, vol. 55, № 1, P. 34–44.
6. **Dzhamalov S.Z.** *Nonlocal boundary value and inverse problems for mixed-type equations.* Monograph. – Tashkent. – 2021. – 176 p.
7. **Dzhamalov S.Z., Khalkhadzhaev B.B.** *A linear inverse problem with semi-nonlocal boundary conditions for a three-dimensional equation of the second kind of the fourth order in a parallelepiped.* Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2026. – Vol. 47, № 4. – P. 1497–1509.
8. **Vragov V.N.** *Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics.* Novosibirsk: NSU, 1983.
9. **Lattes R., Lions J.L.** *The method of quasi-reversibility.* M.: Mir, 1971.
10. **Trenogin V.A.** *Functional analysis.* Moscow, 2007. – P. 488.
11. **Lions J.L., Magenes E.** *Non-homogeneous boundary value problems and their applications.* M.: Mir, 1971.

UDK 517.946.6 (35M10)

Linear inverse problems with nonlocal boundary conditions for a three-dimensional Tricomi equation of the fourth order in a parallelepiped

Dzhamalov S. Z.[1], Yusupov Sh. B.[2]
[1,2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
siroj63@mail.ru / sherzod.yusupov2020@inbox.ru

As is known, to date the inverse problems for classical equations, such as parabolic, elliptic and hyperbolic types of the second order, have been fairly well studied [1]. Linear inverse problems for second order mixed-type equations on the plane have been studied in works [2,3]. For three-dimensional and multidimensional mixed-type equations of the first kind, of the second order, with local and nonlocal conditions, have been studied and developed in works [4,5,6].

For higher order mixed-type equations, such problems have practically not been investigated. We attempt to partially fill this gap within the framework of this work.

In this paper we consider the well-posedness of a linear inverse problem for a three-dimensional Tricomi equation of the fourth order in a parallelepiped. For this problem, by the methods of Fourier, "ε-regularization", a priori estimates [7,8], successive approximations and contraction mappings [9], existence and uniqueness theorems for a regular generalized solution of the linear inverse problem are proved in an anisotropic Sobolev space [10].

Statement of the problem. In the domain

$$G = (-1,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell) = \{(x,t);\ -1 < x < 1;\ 0 < t < T < +\infty;\ 0 < y < \ell\}$$

we consider the Tricomi equation of the fourth order.

$$Lu = Pu + Mu + Nu = \psi(x,t,y), \tag{1}$$

where

$$Pu = \sum_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u, \qquad Mu = a(x)u_{xxxx} - b(x)u_{xxt} - c(x)u_{xx}, \qquad Nu = u_{yyyy},$$

$K_4(x,t) = K_4(x) = x$; $K_j(x,0) = K_j(x,T)$ $(j = \overline{0,3})$, where $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq b_0 > 0$, $c(x) \geq c_0 > 0$ for all $x \in [-1,1]$; $D_t^i u = \partial^i u / \partial t^i$ $(i = 0,1,2,3,4)$, $D_t^0 u = u$.

We further assume $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t) \times f(x,t,y)$, where $g(x,t,y)$ and $f(x,t,y)$ are given functions, and $h(x,t)$ is to be determined.

Linear inverse problem. Find functions $\{u(x,t,y), h(x,t)\}$ satisfying equation (1) in the domain G, such that the function $u(x,t,y)$ satisfies the following boundary conditions

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \qquad p = 0,1,2,3, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=-1} = u\big|_{x=1} = 0, \qquad u_{xx}\big|_{x=-1} = u_{xx}\big|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\ell} = 0, \qquad u_{yy}\big|_{y=0} = u_{yy}\big|_{y=\ell} = 0, \tag{4}$$

and the additional condition

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t), \qquad \text{where } 0 < \ell_0 < \ell < +\infty, \tag{5}$$

and, together with the function $h(x,t)$, belongs to the class

$$U = \{(u,h) \mid u \in W_2^{4,3}(G);\ h \in W_2^4(Q)\}.$$

Here $W_2^{4,3}(G)$ denotes the anisotropic Sobolev space with norm

$$\|u\|^2_{W_2^{4,3}(G)} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^3 \, \|u_k(x,t)\|^2_{W_2^4(Q)},$$

where $u_k(x,t)$ are the Fourier coefficients of $u(x,t,y)$ with respect to the systems $Y_k(y) = \{\sqrt{2\ell^{-1}} \sin m_k y\}$, $m_k = \pi k \ell^{-1}$, $k = 1,2,3,\ldots$

$W_2^4(Q)$ denotes the Sobolev space with norm

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^4(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq 4} \int_Q \left|D^\alpha \vartheta\right|^2 dx\, dt,$$

where α is a multi-index, D^α is the generalized derivative with respect to x and t.

Let all coefficients of equation (1) be sufficiently smooth functions in the domain $\overline{Q}$ and let the following conditions be satisfied regarding the coefficients of the right-hand side and the given function $\varphi_0(x,t)$.

Let all the coefficients of equation (1) be sufficiently smooth functions in the domain $\overline{G}$, and let the following conditions hold for the coefficients of the right-hand side and the given function $\varphi_0(x,t)$.

Condition 1 (Nonlocality). For all $x \in [-1,1]$, $K_i(x,0) = K_i(x,T)$, $i = \overline{0,3}$, and $\gamma g(x,0,z) = g(x,T,z)$, $\gamma f(x,0,z) = f(x,T,z)$. In addition, the coefficients of equation (1) must satisfy the following conditions: for all $(x,t) \in \overline{Q}$

$$-(2K_3 + 3\lambda x) \geq \delta_3 > 0, \qquad 2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0, \qquad \lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0,$$

where $\lambda = \dfrac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$.

Smoothness. $g(x,t,\ell_0) = g_0(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})$, $f(x,t,\ell_0) = f_0(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})$, $|f_0(x,t)| \geq \eta > 0$, $f \in W_2^{3,3}(G)$, $g \in W_2^{1,3}(G)$.

Condition 2. $\varphi_0(x,t) \in W_2^5(Q)$, $\gamma D_t^p \varphi_0\big|_{t=0} = D_t^p \varphi_0\big|_{t=T}$, $p = 0,1,2,3$; $\varphi_0\big|_{x=0} = \varphi_0\big|_{x=1} = 0$, $\varphi_{0xx}\big|_{x=0} = \varphi_{0xx}\big|_{x=1} = 0$.

Condition 3. $q = M\|f\|^2_{W_2^{3,3}(G)} < 1$, where $\delta_0 = \min\{\delta_3, \delta_2, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_1\}$,

$$M = 62e^{2\lambda T} m(\ell\delta_0^2)^{-1}\eta^{-2}\|f_0\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})},$$

$m = 10c_1c_2c_3$ is a positive constant, and c_i are the constants of the Sobolev embedding theorem.

The main results are the following theorem.

Theorem. *Let Conditions 1, 2 and 3 hold for the coefficients of equation (1). Then there exists a unique solution of the linear inverse problem (1)–(5) in the class U.*

The theorem is proved by the methods of Fourier, "ε-regularization", a priori estimates, successive approximations and contraction mappings in the anisotropic Sobolev space $W_2^{4,3}(G)$.

Literature

1. **Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Vasiliev V.G.** *Multidimensional inverse problems for differential equations.* Novosibirsk: Nauka, 1969. – P. 67.

2. **Megrabov A.G.** *Forward and inverse problems for hyperbolic, elliptic and mixed type equations.* Utrecht; Boston: VSP. – 230 p.

3. **Sabitov K.B., Martemyanova N.V.** *Nonlocal inverse problem for a mixed-type equation.* Izv. Vuzov. Matematika. – 2011. – № 2. – P. 71–85.

4. **Djamalov S.Z.** *Linear inverse problem for Trikomy equation in three-dimensional space.* Bulletin KRASES. Phys. & Math. Sci. – 2016. – v. 13, № 2. – P. 10–15.

5. **Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R.** *On a linear inverse problem for a multidimensional mixed-type equation of the first kind, second order.* Izvestiya Vuzov. Matematika. – 2019, № 6, P. 1–12. (Scopus)

6. **Dzhamalov S.Z.** *Nonlocal boundary value and inverse problems for mixed-type equations.* Monograph. – Tashkent. – 2021. – 176 p.

7. **Vragov V.N.** *Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics.* Novosibirsk: NSU, 1983.

8. **Lattes R., Lions J.L.** *The method of quasi-reversibility.* M.: Mir, 1971.

9. **Trenogin V.A.** *Functional analysis.* Moscow, 2007. – P. 488.

10. **Lions J.L., Magenes E.** *Non-homogeneous boundary value problems and their applications.* M.: Mir, 1971.

UDC 517.925

SINGULAR POINTS OF PLANAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMIAL RIGHT-HAND SIDES

Ergashev V.E.[1], Buriev T.E.[1]
[1]Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
vafokulyusuf@gmail.com, tolibjon@yahoo.com

Consider the system of differential equations with polynomial right-hand sides

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\left(a_1x^m + b_1y^m + c_1\right) = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y\left(a_2x^m + b_2y^m + c_2\right) = Q(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

We introduce the following notation:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Consider system (1) under the conditions $\Delta \neq 0$, $c_1c_2 \neq 0$, and $(P,Q) = 1$.

The coordinate axes $x = 0$ and $y = 0$ are integral lines of this system and contain the singular points

$$O(0,0), \qquad A\left(\left(-\frac{c_1}{a_1}\right)^{1/m}, 0\right), \qquad B\left(0, \left(-\frac{c_2}{b_2}\right)^{1/m}\right).$$

In addition to these, system (1) possesses singular points $M_i(x_i, y_i)$ determined by

$$\begin{cases} a_1x^m + b_1y^m + c_1 = 0, \\ a_2x^m + b_2y^m + c_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Thus,

$$x_i = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{1/m}, \qquad y_i = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta}\right)^{1/m}.$$

For odd m, the corresponding real singular point is unique, whereas over the complex field the m-th roots give the associated points.

Let m be odd. If $c_1c_2 \neq 0$ and $a_1b_2 \neq 0$, the singular points A and B always exist. The points M_1 and M_2 coincide with $O(0,0)$ when $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. These equalities imply

$$b_1c_2 = b_2c_1, \qquad c_1a_2 = a_1c_2, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

which contradicts $\Delta \neq 0$. Hence, this case is not considered.

Now let m be even and assume $c_1c_2 \neq 0$, $a_1b_2 \neq 0$, $\Delta_1 \neq 0$, and $\Delta_2 \neq 0$. To study the coexistence of isolated singular points, we additionally consider the following coefficient inequalities:

$$\begin{array}{ll}
(3.1) & c_1a_1 < 0,\ c_2b_2 < 0,\ \Delta_1\Delta > 0,\ \Delta_2\Delta > 0, \\
(3.2) & c_1a_1 > 0,\ c_2b_2 < 0,\ \Delta_1\Delta > 0,\ \Delta_2\Delta > 0, \\
(3.3) & c_1a_1 < 0,\ c_2b_2 > 0,\ \Delta_1\Delta > 0,\ \Delta_2\Delta > 0, \\
(3.4) & c_1a_1 > 0,\ c_2b_2 > 0,\ \Delta_1\Delta > 0,\ \Delta_2\Delta > 0, \\
(3.5) & c_1a_1 < 0,\ c_2b_2 < 0,\ \Delta_1\Delta < 0,\ \Delta_2\Delta < 0, \\
(3.6) & c_1a_1 > 0,\ c_2b_2 < 0,\ \Delta_1\Delta < 0,\ \Delta_2\Delta < 0, \\
(3.7) & c_1a_1 < 0,\ c_2b_2 > 0,\ \Delta_1\Delta < 0,\ \Delta_2\Delta < 0, \\
(3.8) & c_1a_1 > 0,\ c_2b_2 > 0,\ \Delta_1\Delta < 0,\ \Delta_2\Delta < 0.
\end{array} \tag{3}$$

If inequalities (3.1) are satisfied, system (1) has nine isolated singular points. If inequalities (3.8) are satisfied, it has the unique singular point $O(0,0)$.

Consider the remaining cases. Let inequalities (3.2) or (3.3) hold. Then the isoclines can be arranged as follows:

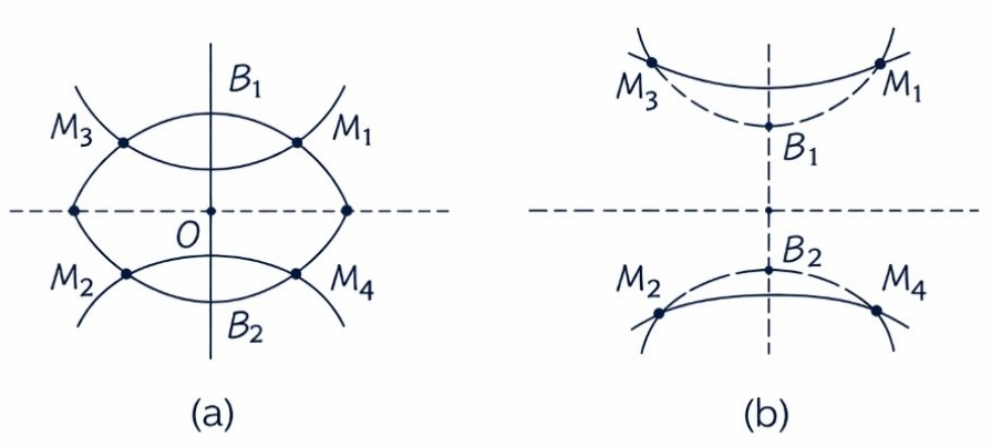


Fig. 1

Furthermore, assume that

$$c_2b_2 < 0, \qquad c_1b_1 < 0, \qquad \frac{c_2}{b_2} < \frac{c_1}{b_1}.$$

If $c_1c_2 > 0$, then

$$j(O) = j(B_1) = j(B_2) = +1, \qquad j(M_1) = j(M_2) = j(M_3) = j(M_4) = -1.$$

If $c_1c_2 < 0$, then

$$j(O) = j(B_1) = j(B_2) = -1, \qquad j(M_1) = j(M_2) = j(M_3) = j(M_4) = +1.$$

It follows that for $c_1c_2 > 0$, the points O, B_1, B_2 are nodes and M_1, M_2, M_3, M_4 are saddles. For $c_1c_2 < 0$, the points O, B_1, B_2 are saddles and M_1, M_2, M_3, M_4 are anti-saddles.

If inequality (3.3) holds, then

$$c_2a_2 > 0, \qquad c_1b_1 < 0, \qquad \frac{c_2}{a_2} > \frac{c_1}{b_1}.$$

For $c_1c_2 > 0$, we have $j(O) = +1$, $j(M_i) = +1$ $(i = 1,2,3,4)$, and $j(B_1) = j(B_2) = -1$. For $c_1c_2 < 0$, we have $j(O) = -1$, $j(M_i) = -1$ $(i = 1,2,3,4)$, and $j(B_1) = j(B_2) = +1$.

According to the Dulac criterion, if

$$\sigma = c_2a_1(b_1 - b_2) + c_1b_2(a_2 - a_1) \neq 0,$$

then system (1) has no limit cycles, and all singular points of anti-saddle type can be nodes or foci. Thus, the following result holds.

Theorem 1. Let $\sigma \neq 0$, and let either inequalities (3.2), $c_2a_2 < 0$, $c_1b_1 < 0$, $c_2/a_2 < c_1/b_1$, or inequalities (3.3), $c_2a_2 > 0$, $c_1b_1 < 0$, $c_2/a_2 > c_1/b_1$, hold. Then system (1) has seven isolated singular points. For $c_1c_2 > 0$, one of the following configurations is possible: (1) three nodes and four saddles; (2) five nodes and two saddles; (3) one node, four foci, and two saddles. For $c_1c_2 < 0$, one of the following configurations is possible: (4) three saddles and four foci; (5) five saddles and two nodes.

References

1. **Bautin N.N., Leontovich E.A.** *Methods and Techniques of Qualitative Investigation of Dynamical Systems on the Plane.* Moscow: Nauka, 1990. 488 p.
2. **Dulyak G.** *On Limit Cycles.* Moscow: Nauka, 1980. 156 p.
3. **Ergashev V.E., Buriev T.E.** Qualitative investigation of singular points at infinity of a two-dimensional system of differential equations. In: *Mathematical Analysis and Its Applications in Modern Mathematical Physics*, Samarkand, 2025.

UDK 517.95

Nonlocal problem for mixed-type equations of fractional Barenblatt-Zheltov-Kochina and Boussinesq types

Fayziyev Yu. E.[1], Abdimurodova Sh. A.[2]
[1] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
fayziyev.yusuf@mail.ru
[2] Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
shoxsanamabdimurodova@gmail.com

1. Introduction. Partial differential equations play an important role in scientific research conducted worldwide, and they are widely used to mathematically model processes encountered in physics, mechanics, geophysics, and many other fields. In particular, equations of mixed type are extensively applied to describe processes whose characteristics vary in different media and to capture changes in the nature of such processes from one region to another. In this paper, we investigate a nonlocal mixed problem for fractional-order differential equations of the abstract operator-valued BarenblattвЂ“ZheltovвЂ“Kochina and Boussinesq types. The system involves a fractional-order differential equation of order $\rho \in (0,1)$ in the domain $t > 0$, while in the domain $t < 0$ it contains a Boussinesq-type equation.

Let H be a separable Hilbert space endowed with the scalar product $(\cdot,\cdot)$ and the norm $\|\cdot\|$. Let $A : D(A) \to H$ be an arbitrary positive, self-adjoint operator defined in H and possessing a compact inverse A^{-1}, where $D(A) \subset H$ denotes the domain of definition of the operator A. Assume that the operator A has a complete orthonormal system of eigenfunctions $\{v_k\}$ in H and a countable set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}$. By reordering the eigenvalues, they can be arranged in non-decreasing order, i.e., $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \to +\infty$.

2. Problem Statement. The present paper is devoted to the investigation of a solution of the mixed-type equation

$$0 = \begin{cases} D_t^\rho u + A\left(D_t^\rho u\right) + Au + \nu^2 u, & 0 < t < \beta, \\ u_{tt} + Au_{tt} + Au + \nu^2 u, & -\alpha < t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

satisfying the coupling conditions

$$u(0+0) = u(0-0), \;\; D_t^\rho u(0+0) = u_t(0-0) \tag{2}$$

together with the integral condition

$$\int_{-\alpha}^{0} u(t)dt = \psi, \tag{3}$$

throughout the paper, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, and $\nu > 0$ are assumed to be given positive real numbers, and $\psi \in H$.

Numerous problems related to specific classes of partial differential equationsвЂ”namely, parabolic, hyperbolic, and elliptic types have been thoroughly investigated. For example, in [1], a problem similar to (1)-(3) was studied. However, equation (1) was considered with an ordinary classical derivative instead of a fractional derivative. In [2], a mixed-type equation whose elliptic part contains the Laplace operator was considered for the case $0 < \rho < 1$. Paper [3] studied mixed-type fractional equations with an elliptic part represented by a classical second-order derivative. In both works, direct and inverse problems were considered.

Let $\Delta_k(\alpha) = 1 + \frac{1}{\mu_k} sin\mu_k\alpha - cos\mu_k\alpha$. In this paper, the following theorem is proved:

Theorem. Let us assume that $\psi \in D(A)$.

1) If $\Delta_k(\alpha) \neq 0$, then the solution of problem (1)-(3) exists and is unique and is expressed by the series

$$u(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\psi_k}{\Delta_k(\alpha)} E_\rho(-\mu_k^2 t^\rho) v_k, & t > 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\psi_k}{\Delta_k(\alpha)} \big(\cos \mu_k t - \mu_k \sin \mu_k t\big) v_k, & t < 0. \end{cases}$$

2) If $\Delta_k(\alpha) = 0$ together with the fulfillment of the orthogonality conditions

$$(\psi, v_k) = 0, \quad k \in K_0, \quad K_0 = \{n_1, n_2, ...n_s\},$$

then the solution to problem (1)-(3) exists in the form of the series

$$u(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k \notin K_0} \dfrac{\psi_k}{\Delta_k(\alpha)} E_\rho(-\mu_k^2 t^\rho) v_k + \sum\limits_{k \in K_0} c_k E_\rho(-\mu_k^2 t^\rho) v_k, & t > 0, \\ \sum\limits_{k \notin K_0} \dfrac{\psi_k}{\Delta_k(\alpha)} \big(cos\mu_k t - \mu_k \sin \mu_k t\big) v_k + \\ + \sum\limits_{k \in K_0} c_k \left(\cos \mu_k t - \mu_k \sin \mu_k t\right) v_k, & t < 0. \end{cases}$$

In this case, the coefficients c_k for $k \in K_0$ are arbitrary.

References

1. **K. B. Sabitov.** *A Nonlocal Problem for a Parabolic-Hyperbolic Type Equation in a Rectangular Domain.* .Mathematical Notes. 2011 pp. 596-602.

2. **R. R. Ashurov, U.Kh. Dusanova, N.Sh. Nuraliyeva.** *Forward and inverse problems for a mixed-type equation with the Caputo fractional derivative and Dezin-type non-local condition.*, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2025, 120,4, pp. 46-60. DOI: 10.31489/2025M4/46-60.

3. **U.Kh. Dusanova.** *Inverse problems for mixed type equations with the Gerasimov-Caputo fractional derivative.* Lobachevskii JPsurnal of Mathematics. 2025. 46(11), pp. 5556-5565. DOI: 10.1134/S1995080225610070.

UDK 517.98

Control problem for partial differential equation with Caputo fractional derivatives

Fayziev Yu. E.[1], Bobokhonova M. B.[2]
[1] National University of Uzbekistan,
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
fayziev.yusuf@mail.ru
[1,2] Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
boboxonovamarjona1012@gmail.com

In recent years, fractional differential equations have been widely used in various fields, in particular in physics, biology, medicine, and control theory. Unlike classical integer-order models, fractional-order equations allow for a more accurate description of anomalous diffusion, biophysical processes and complex dynamical systems.

The theory of control problems for processes described by partial differential equations is well developed and the first results in the studies conducted by V.A. Il'in and E.I. Moiseev [1] boundary control problems for wave propagation processes were thoroughly investigated and important results concerning the solutions of these problems were obtained.

Control problems associated with homogeneous heat conduction equations have been extensively investigated in the work of Academician Shavkat A. Alimov [2]. In addition, inverse problem aimed at determining the right-hand side function, namely the heat source density, for various subdiffusion equations have been studied by many researchers.

Let H be a separable Hilbert space. $A : D(A) \to H$ be a self-adjoint, positive operator in H such that its inverse operator A^{-1} is compact.

By $C([a,b];H)$, we denote the set of all continuous functions $u(t)$ defined on $t \in [a,b]$ with values in H.

Let $0 < \rho < 1$. Then the Caputo fractional-order derivative ρ is defined by

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^t \frac{h^{'}(\tau)}{(t-\tau)^\rho} d\tau, \quad t > 0, \tag{1}$$

where $\Gamma(\rho)$ is Gamma function.

Let us consider the problem of finding a solution to the following fractional differential equation in the Caputo sense

$$D_t^\rho u(t) + Au(t) = f, \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

initial condition

$$u(+0) = \phi \tag{3}$$

here, ϕ and f are given elements of H and T is a positive constant. The problem of finding a solution to (2) вЂ“ (3) is called a forward problem.

In the paper, the following control problem is studied.

Control problem. Let $\psi \in H$ be a given element. It is required to choose the right-hand side f of the equation in such a way that the solution of problem (2)- (3) satisfies the following condition:

$$u(t_2) - u(t_1) = \psi, \quad 0 < t_1 < t_2 < T. \tag{4}$$

That is, the element f should be chosen so that the difference between the values of the process at times t_2 and t_1 follows the prescribed law.

References

1. **V. A. Il'in, E.I. Moiseev.** *Optimal boundary control by an elastic force at one end of a string with the other end free.* Differential Equations. 2005. Vol.41, Issue 1, pp. 105-115.
2. **Sh. A. Alimov.** *On a control problem for the heat transfer process.* Doklady Mathematics (Doklady of the Russian Academy of Sciences). 2008. Vol. 421, No. 5, pp. 583-585.
3. **Yu. E. Fayziev.** *On a control problem for the subdiffusion equation in a rectangular domain.* Bull. Inst. Math. 2022. Vol. 5, Issue 4, pp. 97-102.

UDK 517.95

A boundary − initial value problem for fractional differential equations with sequential Caputo and Riemann − Liouville derivatives

Fayziev Yu. E.[1], Khabibullaeva N.[2], Sayfullaeva S.[3]
[1,2,3] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
fayziyev.yusuf@mail.ru, habibullayevanavruza929@gmail.com,
sabrinasayfullayeva7@gmail.com

Let H be a separable Hilbert space and $A : D(A) \to H$ be an arbitrary positive, self-adjoint operator defined in H and possessing a compact inverse A^{-1}, where $D(A) \subset H$ denotes the domain of definition of the operator A. Assume that the operator A has a complete orthonormal system of eigenfunctions $\{v_k\}$ in H and a countable set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}$. By reordering the eigenvalues, they can be arranged in non-decreasing order, i.e., $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \to +\infty$.

We investigate a boundary-initial value problem for a linear fractional differential equation involving sequential Caputo and Riemann ı Liouville derivatives.

We consider the governing equation:

$$D_t^{\beta}(D_t^{\alpha}u(t)) + aD_t^{\beta}u(t) + bAu(t) = f(t), \quad 0 < t \leq T,$$

where D_t^{α} and D_t^{β} denote the Caputo and Riemann − Liouville fractional derivatives of orders $0 < \alpha < 1$ and $0 < \beta < 1$, respectively, and $f(t)$ is a given smooth source term, a, b are real nonnegative numbers. The problem is subject to the initial conditions $u\big|_{t=+0} = \varphi(x)$, $I^{1-\beta}u\big|_{t=+0} = \psi(x)$ and $I^{1-\beta}(D^{\alpha}u(t))\big|_{t=+0} = \phi(x)$, $0 < t \leq T$.

The presence of sequential fractional derivatives introduces significant analytical complexities compared to classical single-term models. We address the main analytical difficulties in three stages. First, we analyze the interaction of the sequential fractional operators [1]. Next, we introduce the bivariate Mittag − Leffler function and summarize the key properties required for the solution construction [2]. Using this framework, we derive an explicit closed-form analytic solution, which clarifies how the two fractional orders jointly govern the temporal dynamics of the system.

If the derivatives are in the Caputo sense, then the problem under consideration was solved in [5].

The article proves that the given equation has a solution that satisfies the initial conditions and is unique.

Keywords: sequential fractional derivatives, bivariate Mittag-Leffler function, boundary-initial value problem, Caputo derivative.

2020 Mathematics Subject Classification: 35R11, 33E12, 34A08, 35A02, 65M12

References

[1] Miller K. S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley Sons, New York (1993).

[2] Garg M., Manohar P., Kalla S. L. A Mittag-Leffler-type function of two variables, *Integral Transforms and Special Functions*, **24**:11 (2013), 934–944.

[3] Larson M. G., Bengzon F. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*, Springer Berlin, Heidelberg (2013).

[4] Lin Y., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, 225 (2007), 1533–1552.

[5] Fayziev Yu., Jumaeva Sh. On the Cauchy problem for the Langevin-type fractional equation, *Uz. Math.Journal*, 69:2 (2025), –1552.

UDK 517.95

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND-ORDER HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH INVOLUTION

Kadirkulov B. J.[1], Begimqulov F. Kh.[2]
[1]Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan;
b.kadirkulov@afu.uz;
Nordic International University, Tashkent, Uzbekistan;
f.begimqulov@nordicuniversity.org.

Let

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -p < x < p,\ 0 < y < \ell\}, \qquad p > 0, \quad \ell > 0.$$

In the domain Ω, we consider the equation

$$\varepsilon_1 u_{xx}(x, y) + \varepsilon_2 u_{xx}(-x, y) = u_{yy}(x, y) + x\left[\delta_1 u_x(x, y) + \delta_2 u_x(-x, y)\right], \tag{1}$$

where $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2$ are real parameters.

Problem. Find a function

$$u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}),$$

satisfying equation (1), the boundary conditions

$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, \ell) = 0, \qquad -p \le x \le p,$$

and the Cauchy conditions

$$u(0, y) = \varphi(y), \qquad u_x(0, y) = \psi(y), \qquad 0 \le y \le \ell,$$

where

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0.$$

Motivated by related studies of hyperbolic equations with involution [2], in the present work we consider a boundary value problem for a second-order hyperbolic partial differential equation in which the involutive argument $x \mapsto -x$ occurs in both the first- and second-order derivatives. The problem is investigated by the Fourier method. The corresponding spectral problem is constructed, and the equations for the Fourier coefficients are decomposed into their even and odd parts. This reduction leads to ordinary differential equations of confluent hypergeometric

type, whose solutions are expressed in terms of Kummer functions. As a result, a Fourier series representation of the classical solution is obtained. Conditions ensuring the convergence of the constructed series are established, and the existence and uniqueness of the classical solution are proved.

Literature

1. **A. Ashyralyev, A. Ashyralyyev, B. Abdalmohammed.** *On the hyperbolic type differential equation with time involution.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2023, No. 1(109), pp. 38–47. DOI: 10.31489/2023M1/38-47.

UDK 517.95

Direct and Inverse Problems for a Fourth-Order Three-Dimensional Equation of Mixed Type with Power-Law Degeneracy and Involution

Kadirkulov B. J.[1], Uzaqbaeva D. E.[2]
[1]Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan;
b.kadirkulov@afu.uz
[1,2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
uzaqbaevadilfuza1606@gmail.com

In domain $\Omega = \{(x,y,t)|(x,y) \in D, -a < t < b\}$, $D = \{(x,y)|0 < x < p, 0 < y < q\}$ let us consider mixed type equation

$$Lu = F(x,y,t), \tag{1}$$

where

$$Lu = \begin{cases} u_t(x,y,t) + t^{\alpha}[u_{xxxx}(x,y,t) + \varepsilon u_{xxxx}(p-x,y,t) + u_{yyyy}(x,y,t)], t > 0, \\ u_{tt}(x,y,t) + u_{xxxx}(x,y,t) + \varepsilon u_{xxxx}(p-x,y,t) + u_{yyyy}(x,y,t), t < 0, \end{cases}$$

$$F(x,y,t) = \begin{cases} F_1(x,y,t), t > 0, \\ F_2(x,y,t), t < 0, \end{cases}$$

and α, a, b, p and q are given positive real numbers, and we consider following problems:
Problem 1. Find the function $u(x,y,t)$ from the class

$$u(x,y,t) \in C^{2,3,1}_{x,y,t}(\bar{\Omega}) \cap C^2_t(\Omega_2) \cap C^{4,4}_{x,y}(\Omega_1 \cup \Omega_2), \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv F(x,y,t), (x,y,t) \in (\Omega_1 \cup \Omega_2), \tag{3}$$

which satisfies the equation (1) and conditions

$$u(0,y,t) = u(p,y,t) = u_{xx}(0,y,t) = u_{xx}(p,y,t), 0 \le y \le q, -a \le t \le b, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &u(x,0,t) = 0, u_y(x,0,t) + u_y(x,q,t) = 0, u_{yy}(x,0,t) = 0, \\ &u_{yyy}(x,0,t) + u_{yyy}(x,q,t) = 0, 0 \le x \le p, -a \le t \le b, \end{aligned} \tag{5}$$

$$u(x,y,-a) = \varphi(x,y), (x,y) \in \overline{D}, \tag{6}$$

where $F(x,y,t)$ is given function, $\Omega_1 = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{t < 0\}$.
Problem 2. Let $F_1(x,y,t) = f_1(x,y)g_1(t)$, and let the function $g_1(t)$ be known. Find functions $u(x,y,t)$ and $f_1(x,y)$, which satisfy equation (1) and conditions (2)-(6) and

$$u(x,y,b) = \psi(x,y), (x,y) \in \overline{D}, \tag{7}$$

where $F_2(x, y, t)$ and $\psi(x, y)$ are given functions.
Problem 3. Let $F_1(x, y, t) = f_1(x, y)g_1(t)$, and let the function $f_1(x, y)$ be known. Find functions $u(x, y, t)$ and $g_1(t)$, which satisfy equation (1) and conditions (2)-(6) and

$$u(x_0, y_0, t) = h(t), 0 \le t \le b, \tag{8}$$

where $F_2(x, y, t)$ and $h_1(t)$ are given functions, (x_0, y_0) is given point in D.

In this work, an initial-boundary problem and two inverse problems for finding the right side of a parabolic part in a rectangular parallelepiped were investigated for a non-homogeneous mixed-type fourth-order equation with involution and exponential degeneracy of the parabolic part. Based on the Fourier method, the criterion for the uniqueness of the solution of direct problem was established, and the solution itself was constructed as the sum of an orthogonal series. In proving the existence of solutions, the problem of small denominators arises, for which estimates of their separation from zero with the corresponding asymptotics have been obtained. Further, based on the solution of the direct problem, two inverse problems were investigated to find the source function in the parabolic part of the mixed equation. The unknown right side represents the product of factors dependent on spatial variables and time. The uniqueness and existence theorems for solutions to the inverse problems, in which small denominators also arise, have been proven using the spectral method and the theory of integral equations. Furthermore, the solutions to the inverse problems are constructed in explicit formвЂ”in the form of sums of orthogonal series. The work also examines the spectral properties of one non-self-adjoint boundary value problem for a fourth-order ordinary differential equation arising from the study of the aforementioned problems. The eigenfunctions of this problem and conjugate problem have been found; the completeness and basicity of eigenfunction systems have been studied.

Literature

1. **K. B. Sabitov, S. N. Sidorov.** *An initial-boundary value problem for a three-dimensional parabolic-hyperbolic equation.* Differential Equations, 2021, Volume 57, No 8, pp. 1071-1080.
2. **S. N. Sidorov.** *Inverse problems for a three-dimensional equation of parabolic-hyperbolic type in finding time-dependent factors of the right-hand sides.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 12, pp. 3641вЂ“3657. DOI: 10.1134/S1995080222150288.

UDC 517.956

On a new type of inverse problems for mixed parabolic-hyperbolic type equations

Karimov E. T.
Ghent University, Ghent, Belgium;
erkinjon.karimov@ugent.be

The study of mixed-type differential equations is fundamental in modeling physical systems that exhibit dual characteristics, such as simultaneous wave propagation and diffusive processes [1]. Traditionally, direct boundary value problems assume that the transition conditions at the interface between the parabolic and hyperbolic domains are entirely known [2]. However, in many real-world scenarios, the precise mechanics of this phase change are hidden. This research introduces a novel theoretical framework to solve inverse problems where critical transition parameters must be reconstructed from overdetermined boundary or internal measurements [3-4].

The presentation formulates and investigates two distinct classes of inverse problems:

1) **Spatial Transmission Identification:** Reconstructing the unknown components of the transmission conditions along the interface line where the governing equation shifts from a hyperbolic to a parabolic type.

2) **Temporal Phase Shift Detection:** Determining the exact, previously unknown time moment at which an active wave process transitions entirely into diffusion.

To ensure rigorous mathematical foundations, this research prioritizes analytical methods over purely numerical approximations. The existence and uniqueness of the solutions for these inverse problems are established by deriving exact closed-form solutions. The mathematical approaches rely heavily on Fourier series expansions to separate variables and the application of resolvent kernels to resolve the resulting integral equations. This analytical framework allows for the precise, theoretical reconstruction of both the spatial interface behaviors and the temporal shift points.

By successfully identifying these hidden transitions, the results expand the mathematical toolkit available for applied sciences. Accurately determining these parameters is highly relevant for modeling complex, evolving physical phenomena in gas dynamics, fluid-structure interactions, electromagnetics, and thermoelasticity, where phase and state changes are dynamic rather than strictly predefined.

Literature

1. **Gelfand I.M.** *Some problems of analysis and differential equations.* Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 1959, Vol. 14, No. 3, pp. 3–19.
2. **Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamazhanov M.** *Boundary value problems for equations of parabolic-hyperbolic type.* - Fan, Tashkent, 220 p., 1986.
3. **Karimov E., Mirzaeva M.** *Unknown time-moment inverse problem for time-fractional mixed wave-diffusion equation.* Bull. Inst. Math. 2024, Vol. 7, No. 6, pp.45–55.
4. **Karimov E.T., Murolimova N.A.** *New inverse problems for a time-switched system of wave and diffusion equations.* Preprint in arXiv: https://doi.org/10.48550/arXiv.2605.24189

УДК 517.44

Bessel operatori qatnashgan yuqori tartibli giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi

Karimov Sh. T.[1], Mo‘ydinov I. M.[2]
[1]Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston; shaxkarimov@gmail.com
[2]Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston; Farg‘ona davlat texnika universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston; ilhommuydinov887@gmail.com

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun singulyar koeffitsiyentlarga ega chegaraviy masalalar ko‘plab matematiklar tomonidan o‘rganilgan. Singulyar koeffitsiyentlarga ega bo‘lgan yanada murakkab tenglamalarni tadqiq qilish nazariy umumlashtirishlar yo‘lidagi tabiiy keyingi bosqich hisoblanadi. Shu tarzda olingan nazariy natijalarning ahamiyati, bunday tenglamalar yoki ularning xususiy hollari amaliy masalalarda uchrashi sababli, yanada ortadi.

Ma’lumki, ikkinchi tartibli buziladigan va singulyar tenglamalarning o‘ziga xos jihati shundaki, ular uchun klassik masalalarning korrekt qo‘yilganligi har doim ham ta’minlanmaydi. Masalaning qo‘yilishi quyi tartibli koeffitsiyentlarga sezilarli darajada bog‘liq bo‘ladi. Singulyar koeffitsiyentli yuqori tartibli tenglamalar uchun bunday masalalar deyarli o‘rganilmagan.

$\Omega = \{(x,t):\ 0 < y < x < +\infty\}$ sohada $u(x,y)$ noma'lum bo'lgan, quyidagi tenglamaning yechimini topishga qaratilgan Koshi masalasini ko'ramiz

$$L_\alpha^\lambda(u) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(x,y) - \lambda u(x,y) = 0, \tag{1}$$

bu yerda α, $\lambda \in R$ hamda $\alpha > 0$.

Koshi masalasi. (1) tenglamani ushbu

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad \frac{\partial^{2k+1}u}{\partial y^{2k+1}} = \psi_k(x), \quad x \geq 0, \quad k = \overline{0,\ m-1}, \tag{2}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,\ y) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{2m-1}(\Omega \cup J)$ yechimi topilsin, bu yerda $J = \{(x,\ y):\ y = 0,\ 0 \leq x < +\infty\}$.

(1), (2) Koshi masalasining klassik yechimi deb $u(x,y)$ funksiyaga aytiladi, u (1) tenglamaning $u(x,\ y) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{2m-1}(\Omega \cup J)$ sinfidagi yechimi bo'lib, (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi.

Faraz qilaylik, (1), (2) masalaning yechimi mavjud bo'lsin. Bu yechimni x o'zgaruvchisi bo'yicha ta'sir qiluvchi Erdeyi-Kober operatori ko'rinishida qidiramiz:

$$u(x,y) = I^{(x)}_{-1/2\,,\,\alpha}\upsilon(x,y) = \frac{2x^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x^2-\xi^2)^{\alpha-1}\upsilon(\xi,y)d\xi, \tag{3}$$

bu yerda $\upsilon(\xi,y)$ - noma'lum funksiya.

(3) ni (2) boshlang'ich shartlarga va (1) tenglamaga qo'yib, so'ngra Erdeyi – Kober va Bessel operatorlaring xossalaridan foydalanib $\upsilon(\xi,y)$ yechimini topish uchun quyidagi masala hosil bo'ladi:

(1)

$$L_0(\upsilon) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m \upsilon(x,t) - \lambda\upsilon(x,t) = 0, \quad 0 < \xi < x < \infty, \quad 0 < y < x < \infty,$$

tenglamaning quyidagi boshlang'ich shartlarni,

$$\left.\frac{\partial^{2k}\upsilon}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0} = \Phi_k(\xi), \quad \left.\frac{\partial^{2k+1}\upsilon}{\partial y^{2k+1}}\right|_{y=0} = \Psi_k(\xi), \ \ \xi > 0,$$

hamda chegaraviy shartlarni

$$\left.\frac{\partial^{2k+1}\upsilon}{\partial y^{2k+1}}\right|_{\xi=0} = 0, \quad y > 0,$$

qanoatlantiruvchi yechimni topish masalasiga kelamiz. Ushbu masala yechimi oshkor ko'rinishda Riman usulida topiladi.

Adabiyotlar

1. **Karimov Sh. T.** *The Cauchy Problem for the Iterated Klein – Gordon Equation with the Bessel Operator.* ISSN 1995 – 0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 5, pp. 772 – 784.
2. **Уринов А. К., Каримов Ш. Т.** *Операторы Эрдейи-Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных.* Издательство «Фаргона» 2021.
3. **Karimov Sh.T., Mo'ydinov I.M.** *Iteratsiyalangan yuqori tartibli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasini Riman usulida yechish.* Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti. №10.2025. 5-bet.

MSC (2020) 34A08; 35R11; 35R30.

A Direct Problem for a Sub-Diffusion Equation Involving the ψ-Prabhakar-Caputo Operator

Khasanov Sh. M.[1]
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shohzodbekxasanov@gmail.com

Let us consider a partial differential equation with fractional order:

$$ {}^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{0t;\psi} u(t,x) - u_{xx}(t,x) + p(t)\,u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

on the following domain: $\Omega = \{(t,x) : 0 < t < T, 0 < x < b\}$. Here $T, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ with $\alpha > 0, 0 < \beta \leq 1$, and $f(t,x), p(t)$ are given functions, ${}^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{0t;\psi}$ is the ψ- Prabhakar-Caputo fractional derivative, defined as follows in [1],[2]:

$$ {}^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{0t;\psi} u(t,x) = {}^{P}I^{\alpha,1-\beta,-\gamma,\delta}_{at;\psi}\left(\tfrac{1}{\psi'(t)}\tfrac{d}{dt}\right) u(t,x) = $$
$$ \int_0^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{-\beta} E^{-\gamma}_{\alpha,1-\beta}\left(\delta(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\right)\left(\tfrac{1}{\psi'(s)}\tfrac{d}{ds}\right) u(s,x)\,ds, \quad t > 0, $$

where, $\psi(t) \in C^1[0,T]$,$\psi'(t) > 0$ for all $t \in [0.T]$, and the function

$$ E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)\, k!}\, x^k $$

is the Prabhakar function, proposed in [3].

Problem 1. Find a regular solution $\{u(t,x)\}$ to equation (1) that satisfies the following conditions:

- Regularity conditions:

$$ u(t,x) \in C\left(\bar{\Omega}\right),\ {}^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{0t;\psi} u(t,x) \in C(\Omega), u_{xx}(t,x) \in C(\Omega). \tag{2}$$

- Initial condition:

$$ u(0,x) = \varphi(x), x \in [0,b], \tag{3}$$

- Boundary conditions:

$$ u(t,0) = 0,\ u(t,b) = 0,\ \ t \in [0,T]\ . \tag{4}$$

Here, $\varphi(x)$ is a given real function and $\varphi(0) = \varphi(b) = 0$.

Definition 1. A function $u(t,x)$ is called a regular solution to Problem 1 if it satisfies equation (1) and conditions (2)-(4).

For Problem 1, we obtain the following result:

Theorem 1. Suppose that $\alpha > 0, \gamma > 0, \delta < 0$, and the following conditions hold:

(i) $p(t) \in C[0,T], \psi(t) \in C^1[0,T], \psi'(t) > 0$;

(ii) $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(b) = 0, (i = 0,2,4),;$

(iii) $\varphi^{(4)}(x) \in C\left(\bar{\Omega}\right), \varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,b)$;

(iv) $f(t,0) = 0, f(t,b) = 0, f_{xx}^{(2)}(t,0) = 0, f_{xx}^{(2)}(t,b) = 0$;

(v) $f_{xx}^{(2)}(t,x) \in C\left(\bar{\Omega}\right), f_{xxx}^{(3)}(t,x) \in L_2\left(C[0,T];(0,b)\right)$.

Then there exists a unique solution to Problem 1.

References

1. **Fernandez A., Restrepo J.E., Suragan D.** *Prabhakar-Type Linear Differential Equations with Variable Coefficients.* Differential and Integral Equations. **35** (9-10),(2022), pp 581-610.
2. **Oliveira D.S.** *$\psi-$ Mittag-Leffler pseudo-fractional operators.* Pseudo-Differ. Oper. Appl.**12** (40),(2021).
3. **Prabhakar T.R.** *A singular integral equation with a generalized MittagЭ“Leffler function in the kernel.* Yokohama Math. J.**19** (1971), pp 171-183.

UDK 517.95

On a boundary value problem for the Airy equation with a fractional time derivative

Kurbanov O. T.
Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
odiljonkurbanov69@gmail.com

Consider the problem of finding a regular solution to the equation

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) - u_{xxx}(x,t) = 0 \tag{1}$$

in the domain $E = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t \leq 1\}$, where the fractional derivative is defined as

$$\partial_{\eta t}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_{\eta}^{t} \frac{g^{(n)}(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}}\, d\xi \right), \quad n-1 < \alpha < n, \tag{2}$$

subject to the initial condition

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3}$$

and the boundary conditions

$$u_{xx}(0,t) = g(u(0,t),t), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{4}$$

$$u_x(0,t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{5}$$

$$u(1,t) = \varphi_3(t), \quad 0 \le t \le 1. \tag{6}$$

Theorem 1 (Uniqueness). Let $g(u,t)$ be continuous on $0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1$ and satisfy the Lipschitz condition for all $|u| < \infty$:

$$|g(u_1,t) - g(u_2,t)| \le L|u_1 - u_2|.$$

Then the solution to problem(1)-(6) is unique.

Theorem 2 (Existence). Suppose that, in addition to the conditions of the uniqueness theorem, the following conditions hold:

$$\varphi_i(t) \in C^1[0,1], \quad i = 2,3,$$

and for all $(x,t) \in E$ and $|u| < \infty$,

$$|g(u,t)| \le M.$$

Then a regular solution to problem (1)-(6) exists.

Literature

1. **Pskhu A.V** *Fundamental solution of a third-order equation with a fractional derivative.* Uzbek mathematical journal, 4(2017), 119 - 127
2. **Rakhimov K.U** *The method of potentials for the Airy equation of fractional order.* Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2020, Volume 3 Issue 2, pp. 221-235.

UDK 517.956

An inverse source problem for Two-Term Regularized Prabhakar Fractional Diffusion Equation on a Metric Graph

Khujakulov J. R.[1], Kenjaboyeva M. H. [2], Usmonov Sh. [3]
[1,3] Termez state university, Termez, Uzbekistan;
jonibek.16@mail.ru
[2] Chirchik state pedagogical university, Chirchik, Uzbekistan;
kenjaboyevamuattar48@gmail.com

We consider a starlike metric graph $\mathbb{G} = V \bigcup E$ consisting of a finite set of vertices (nodes) $V = \{\nu_k\}_{k=0}^{j}$ and a finite set of edges $E = \{B_k\}_{k=1}^{j}$ connecting these nodes.

This paper deals with an inverse source problem for two-term regularized Prabhakar Fractional Diffusion Equation on each edge of the above defined graph $\mathbb{G}$:

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}u^{(k)}(x,t) + {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u^{(k)}(x,t) = a \cdot {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u_{xx}^{(k)}(x,t) + g(t)f^{(k)}(x,t), \tag{1}$$

where $(x,t) \in (B_k \times (0,T)), k = \overline{1,j}$, denote the regularized Prabhakar fractional derivatives of orders β_i, as introduced in , with parameters $\alpha > 0$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. We assume that $\beta_1, \beta_2 \in (0,1)$ such that $\beta_2 < \beta_1$. The coefficient a is a positive real constant, and $f^{(k)}(x,t)$ are given source functions.

Problem. To find couple functions $\{u^{(k)}(x,t), g(t)\}$, $(k = 1, 2, ...j)$ in the domain $B_k \times (0,T)$, satisfying the following:
vertex and boundary conditions

$$u^{(1)}(0,t) = u^{(2)}(0,t) = ... = u^{(j)}(0,t), \quad t \in [0,T],$$

$$u_x^{(1)}(0,t) + u_x^{(2)}(0,t) + ... + u_x^{(j)}(0,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

$$u^{(k)}(l_k,t) = 0, \ \ t \in [0,T],\ k = \overline{1,j},$$

with nonhomogeneous initial conditions

$$u^{(k)}(x,0) = \varphi^{(k)}(x), \qquad x \in B_k,\ k = \overline{1,j}.$$

and

$$\sum_{k=1}^{j} \int_0^{L_k} u^{(k)}(x,t)dx = \Phi(t), \ t \in [0,T], \tag{2}$$

over-specified condition of integral type. Here $\varphi^{(k)}(x)$ and $\Phi(t)$ are given sufficiently smooth functions.

The uniqueness of the solution to this problem is studied by means of the completeness of the system of eigenfunctions, while its existence is proved using the method of separation of variables.

UDC 517.95

An Initial-Boundary Value Problem for a Time-Fractional Equation with a Bessel-Type Differential Operator

Mamajonova R.A
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;

In this work, the problem of finding a solution to equation

$${}^{RL}D_{0t}^{\beta} u\,(x.t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\gamma}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) u\,(x,t) = 0 \tag{1}$$

in the domain $\Omega^+ = \{\,(x,t) |\, x > 0, t > 0\}$, satisfying the initial-boundary conditions

$$\lim_{t \to 0} I_{0t}^{2-\beta} u\,(x,t) = \varphi\,(x)\,, \lim_{t \to 0} {}^{Rl}D_{0t}^{\beta-1} u\,(x,t) = 0, x > 0, \tag{2}$$

$$u_x\,(0,t) = 0, u_{xxx}\,(0,t) = 0, t > 0 \tag{3}$$

has been investigated. Here, $1 < \beta < 2$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, and ${}^{RL}D_{0t}^{\beta}$, I_{0t}^{β} are the Riemann-Liouville fractional derivative and integral operators of order β, respectively.

To solve problem (1)-(3), we present the following lemma related to the transformation operator:

Theorem 1.[1] Let $\alpha > 0$, $\eta \geq -\frac{1}{2}$, $f \in C^{2m}\,(0,b)$, $b > 0$, and suppose that the function $x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} \left[B_{\eta+\alpha}^{x} \right]^k f\,(x)$ is integrable at the origin and

$$\lim_{x \to 0}, x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} \left[B_{\eta+\alpha}^{x} \right]^k f\,(x) = 0$$

Then

$$\left[B^x_{\eta+\beta}+\lambda^2\right]^k J\lambda\left(\eta,\beta\right)f\left(x\right)=J\lambda\left(\eta,\beta\right)\left[B^x_{\eta}\right]^k f\left(x\right)$$

In particular, for $\lambda=0$,

$$\left[B^x_{\eta+\beta}\right]^k I\eta,\beta f\left(x\right)=I\eta,\beta f\left(x\right)\left[B^x_{\eta}\right]^k f\left(x\right),$$

where $B^x_\lambda=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\lambda+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ is the Bessel operator, and $I_{\eta,\beta}$ and $J_\lambda\left(\eta,\beta\right)$ are the ErdГ©lyi-Kober and generalized ErdГ©lyi-Kober operators, respectively.

Suppose that a solution to problem (1)-(3) exists. We seek it in the following form:

$$u\left(x,t\right)=I^x_{-\frac{1}{2},\gamma}V\left(x,t\right), \tag{4}$$

where $I_{-\frac{1}{2},\beta}$ is the ErdГ©lyi-Kober operator, and $V\left(x,y\right)$ is an unknown function.

Using Theorem 1 with $m=2$, $\lambda=0$, and $\eta=-\frac{1}{2}$, and substituting (4) into problem (1)-(3), we obtain the following problem for $V\left(x,t\right)$:

$${}^{RL}D^{\beta}_{0t}V\left(x,t\right)+\frac{\partial^4 V\left(x,t\right)}{\partial x^4}=0 \tag{5}$$

with the initial conditions

$$\lim_{t\to 0}I^{2-\beta}_{0t}V\left(x,t\right)=\varphi_0\left(x\right),\lim_{t\to 0}{}^{RL}D^{\beta-1}_{0t}V_t\left(x,t\right)=0, \tag{6}$$

and the boundary conditions

$$Vx\left(0,t\right)=0,Vxxx\left(0,t\right)=0 \tag{7}$$

where $\varphi 0\left(x\right)=\left(I-\frac{1}{2},\gamma^x\right)^{-1}\varphi\left(x\right)$.

Using the solution of problem (5)-(7), the solution of problem (1)-(3) is obtained in the following form:

$$u\left(x,t\right)=x^{-\gamma+\frac{1}{2}}\int_0^\infty s^{\frac{1}{2}+\gamma}\varphi\left(s\right)\int_0^\infty zE\beta,\beta\left(-z^4t^\beta\right)J\gamma-\frac{1}{2}\left(zs\right)J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(zx\right)dz.$$

References

1. **Karimov, Sh. T., Urinov, A. K.** *ErdBɾ'elyi-Kober operators and their applications to partial differential equations.* Fergana: Fergana Publishing, 2021, 202 p.
2. **Karimov Sh., Mamajonova R.** *The Cauchy problem for a beam vibration equation involving the Caputo time-fractional operator.* Bull. Inst. Math., 2025, Vol.8, No 6, pp. 154-160

UDK 517.968

Fractional Oscillator Differential Equations in Single-DOF Mechanical Systems

Mamatov T.Yu.
Bukhara state technical university, Bukhara, Uzbekistan
tulkinmamatov7@gamail.com

Fractional oscillators are commonly understood as mechanical dynamical systems whose state varies over time in an oscillatory manner, while their mathematical models are described by equations containing fractional derivatives and/or integrals of generalized coordinates. The apparatus of fractional calculus and certain special functions can be effectively employed to solve these equations and analyze the obtained solutions [1, 2].

It is well known that such equations arise in the modeling of various processes in media with memory or fractal structure, as well as in problems of the dynamics of systems with hereditary viscoelastic connections [3].

The main attention is devoted to initial value problems for linear differential equations with constant coefficients and Riemann–Liouville fractional derivatives:

$$\ddot{x}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{x}(t) + \sum_{s=1}^{m} b_s D_{0t}^{\beta_s} x(t) + b_0 x(t) = f(t), \tag{1}$$

where $x = x(t)$ is the generalized coordinate, $f(t)$ is the external force ($t \geq 0$); the parameters satisfy $\alpha_k \in (0,1)$ and $\beta_s \in (0,2)$; $D_{0t}^{\alpha_k}$ and $D_{0t}^{\beta_s}$ denote the left-sided Riemann–Liouville fractional differentiation operators: $D_{0t}^{\alpha}\varphi = (d/dt)^n I_{0t}^{n-\alpha}\varphi$ for $\alpha > 0$, where $n = [\alpha] + 1$, and $[\alpha]$ denotes the integer part of the number α,

$$I_{0t}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$$

is the left-sided Riemann–Liouville fractional integral of order α [1, 3]. Such a differential equation arises, for example, when the generalized (fractional) Voigt model is employed as the rheological model of a viscoelastic connection:

$$\sigma = E_0\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} A_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{\varepsilon} + \sum_{s=1}^{m} E_s D_{0t}^{\beta_s} \varepsilon,$$

where $\sigma = \sigma(t)$ and $\varepsilon = \varepsilon(t)$ are the stress and strain at time t; A_k, E_0, and E_s are prescribed constants; $\alpha_k \in (0,1)$ and $\beta_s \in (0,2)$.

The principal method for solving differential equations with fractional derivatives is the reduction of the initial value problem to a Volterra-type integral equation [2]. It is well known that the formulation of the initial conditions for differential equation (1) depends on the presence or absence of fractional derivatives $D_{0t}^{\beta_s}$ of order $\beta_s > 1$ in the equation.

The existence and uniqueness of the solution to a modified Cauchy-type problem for equation (1) with the initial conditions

$$x(0) = x_0, \quad \lim_{t\to 0+} \left(\dot{x}(t) + \sum_{s:\beta_s>1} b_s D_{0t}^{\beta_s - 1} x \right) = x_1. \tag{2}$$

are established.

If $\beta_s \in (0,1]$, then the initial conditions (2) reduce to the classical Cauchy initial conditions. To obtain the solution in explicit form, an approach based on the idea of factorization of the Volterra-type integral operator is proposed. Several sufficient conditions for the factorizability of linear fractional-order integral operators are presented. In these cases, the solution can be expressed in terms of special functions associated with the Mittag–Leffler-type function

$E_{\bar{\alpha}}(\bar{z};\mu)$ [1, 3], its multivariable generalization $E_{\bar{\alpha}}(\bar{z};\mu)$, where $\bar{z} = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0, (i = 1, 2, \ldots, n)$, the generalized (fractional) exponential function

$$\exp(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}; \mu)$$

and other related functions.

As examples, let us consider the following two differential equations:

$$\ddot{x} + pD_{0t}^{\beta}\dot{x} + qD_{0t}^{2\beta}x = f(t), \quad \text{and} \quad \ddot{x} + pD_{0t}^{1+\beta}x + qD_{0t}^{2\beta}x = f(t)$$

with the initial conditions $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ and

$$x(0) = x_0, \quad \lim_{t\to 0+}\left[\dot{x}(t) + p\left\{D_{0t}^{2\beta}x - x(t)\right\}\right] = x_1$$

respectively, for which explicit solutions are obtained. The study of these dynamical models requires the computation of the solution values and, in particular, the evaluation of their asymptotic behavior as $t \to \infty$, which is especially important in problems concerning the strength of structural elements subjected to continuous dynamic loading. The computational algorithm and asymptotic formulas developed for the function $E_{\alpha}(z;\mu)$ have been extended to functions of the type $E_{\bar{\alpha}}(\bar{z};\mu)$ and applied to the analysis of the obtained solutions.

Using the developed apparatus, the qualitative differences between these solutions have been investigated, and their phase portraits have been constructed. It is shown that as $\beta \to 0$, both the differential equations themselves, the formulations of the initial value problems, and their solutions reduce to the solution of the classical Cauchy problem for the oscillator differential equation with viscous damping $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t)$.

It is also noted that the one-parameter families of solutions of these differential equations may prove useful in problems of parametric identification of nonlinear dynamical systems, while the introduced special functions may serve as a basis of functions for representing nonlinear oscillations.

References

1. **S. G. Samko and A .A. Kilbas and O.I.Marichev.** *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.* Gordon and Breach. Sci. Publ., N.York-London, -1993, -1012 pp.
2. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* Amsterdam: Elsevier, -2006. -523 p.
3. **Nakhushev A.M.** *Fractional Calculus and Its Applications.* Moscow: Fizmatlit, -2003. -272 p.

УДК 517.95

TO‘RTINCHI TARTIBLI KARRALI XARAKTERISTIKALI BUZILUVCHI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING YAGONALIGI HAQIDA

Meliqo‘ziyeva D. M.
Namangan davlat texnika universiteti, Namangan, O‘zbekiston;
meliquziyevadilshoda@gmail.com.

Xususiy hosilali tenglamalar nazariyasida buzilish va singulyar tenglamalar uchun masalalarni o‘rganish bo‘yicha A.V. Bitsadze , M.S. Salaxitdinov , T.D.Djurayev, M.M. Smirnov kabi

olimlarning fundamental ishlari asosiy poydevor bo‘lib xizmat qilgan. Keyinchalik yuqori tartibli va buziladigan differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar I.E. Egorov, S.G.Pyatkov, S.V. Popov [1], E.I. Moiseev [2], Yu.P.Apakov va B.Yu.Irgashev [3] maqolalarida o‘rganilgan. Shunga qaramasdan, to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali buziluvchi tenglamalarga chegaraviy masalalarni o‘rganish dolzarb sanaladi.

$D=\{(x,y):0<x<p,0<y<q\}$ sohada quyidagi

$$L\left[u\left(x,y\right)\right]=u_{xxxx}\left(x,y\right)-y^{m}u_{yyy}\left(x,y\right)=0,\quad 0<m<1 \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz. Bu yerda $p,q>0$.

A **masala.** D sohada $u\left(x,y\right)\in C_{x,y}^{4,3}\left(D\right)\cap C_{x,y}^{3,2}\left(\overline{D}\right)$ sinfga tegishli (1) tenglamani va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechim topilsin:

$$u\left(0,y\right)=u_{x}\left(0,y\right)=u\left(p,y\right)=u_{x}\left(p,y\right)=0,\quad 0\leq y\leq q, \tag{2}$$

$$u_{y}\left(x,0\right)=\psi_{1}\left(x\right),\quad u_{yy}\left(x,0\right)=\psi_{2}\left(x\right),\quad u_{yy}\left(x,q\right)=\psi_{3}\left(x\right),\quad 0\leq x\leq p, \tag{3}$$

$\psi_{i}\left(x\right),\ \ i=\overline{1,3}$ – esa berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Teorema. Agar A masala yechimga ega bo‘lsa u yagonadir.

Isboti. Teskarisidan faraz qilaylik, A masalaning ikkita $u_{1}\left(x,y\right)$ va $u_{2}\left(x,y\right)$ yechimi bo‘lsin, u holda $u\left(x,y\right)=u_{1}\left(x,y\right)-u_{2}\left(x,y\right)$ funksiya (1) tenglamani bir jinsli chegaraviy shartlar bilan $(\psi_{i}\left(x\right)\equiv 0)$ qanoatlantiradi. $\overline{D}$ yopiq sohada $u\left(x,y\right)\equiv 0$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$$y^{-m}uL\left[u\right]=0,$$

yoki

$$y^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\cdot u_{xxx}-u_{x}u_{xx}\right)+y^{-m}u_{xx}^{2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(-uu_{yy}+\frac{1}{2}u_{y}^{2}\right)=0, \tag{4}$$

ayniyat o‘rinli.

(4) ayniyatni $D_{\varepsilon}=\left\{(x,y):\ 0<x<p,\quad \varepsilon<y<q\right\},\quad \varepsilon>0$ sohada integrallaymiz, Grin formulasidan foydalanib,

$$\begin{gathered}\int_{\varepsilon}^{q}y^{-m}\left[u\left(p,y\right)u_{xxx}\left(p,y\right)-u_{x}\left(p,y\right)u_{xx}\left(p,y\right)\right]dy-\\ -\int_{\varepsilon}^{q}y^{-m}\left[u\left(0,y\right)u_{xxx}\left(0,y\right)-u_{x}\left(0,y\right)u_{xx}\left(0,y\right)\right]dy+\int_{\varepsilon}^{q}\int_{0}^{p}y^{-m}u_{xx}^{2}dxdy+\\ +\int_{0}^{p}\left(-u\left(x,q\right)u_{yy}\left(x,q\right)+u\left(x,\varepsilon\right)u_{yy}\left(x,\varepsilon\right)\right)dx+\\ +\tfrac{1}{2}\int_{0}^{p}\left(u_{y}^{2}\left(x,q\right)-u_{y}^{2}\left(x,\varepsilon\right)\right)dx=0.\end{gathered}$$

(2) chegaraviy shartni hisobga olib,

$$\begin{gathered}\int_{\varepsilon}^{q}\int_{0}^{p}y^{-m}u_{xx}^{2}dxdy+\int_{0}^{p}\left(-u\left(x,q\right)u_{yy}\left(x,q\right)+u\left(x,\varepsilon\right)u_{yy}\left(x,\varepsilon\right)\right)dx+\\ +\frac{1}{2}\int_{0}^{p}\left(u_{y}^{2}\left(x,q\right)-u_{y}^{2}\left(x,\varepsilon\right)\right)dx=0.\end{gathered} \tag{5}$$

Endi $\varepsilon\to+0$ limitni qaraymiz, masala shartiga ko‘ra $u\left(x,y\right)\in C_{x,y}^{3,2}\left(\overline{D}\right)$ bo‘lgani sababli, $u\left(x,y\right),\ u_{y}\left(x,y\right),\ u_{yy}\left(x,y\right)$ funksiyalar uzluksizdir. Natijada $\varepsilon\to+0$ da (5) dan

$$\iint_{D}y^{-m}u_{xx}^{2}dxdy+\frac{1}{2}\int_{0}^{p}u_{y}^{2}\left(x,q\right)dx=0 \tag{6}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $0 < m < 1$ shartidan $y^{-m} > 0,\ y \in (0, q)$ hamda

$$\int_0^q y^{-m} dy = \frac{q^{1-m}}{1-m} < \infty.$$

Demak, (6) tenglikdagi ikkala qo‘shiluvchi ham manfiy emas. Ularning yig‘indisi nolga teng bo‘lganligi sababli 1-qo‘shiluvchidan $u_{xx}(x, y) \equiv 0$. Bundan $u(x, y) = f_1(y) \cdot x + f_2(y)$. (2) chegaraviy shartni hisobga olib, $u(0, y) = 0 \Rightarrow f_2(y) = 0$, $u(p, y) = 0 \Rightarrow f_1(y) \cdot p = 0 \Rightarrow f_1(y) = 0$ (chunki $p > 0$) $u(x, y) \equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

Adabiyotlar

1. **Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В.** *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка.* -Новосибирск: ВЦ СО РАН, -1995. - 133 с.
2. **Моисеев Е.И.** *О решении методом Фурье краевых задач для уравнений смешанного типа.* - Дифференциальные уравнения, 1990 Т.26, -1, С. 92-105.
3. **Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю.** *Краевая задача в бесконечной области для уравнения третьего порядка, имеющего вырождение первого рода.* Дифференциальные уравнения и процессы управления. -Санкт-Петербург, 2008. -4. - С. 41–50.

UDC 517.95

A nonlocal problem for a sub-diffusion equation with a periodic-type boundary condition and the regularized Prabhakar fractional derivative

Mirzaeva M.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
maftunamirzayeva2009@gmail.com

Let Ω be a rectangular domain: $\Omega = \{(t, x) :\ 0 < t < T,\ 0 < x < 1\}$, $0 < T < \infty$. We consider a nonlocal problem for the following sub-diffusion equation:

$$^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x). \tag{1}$$

Here $f(t, x)$ is a given function, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are given real numbers such that $\alpha > 0$, $0 < \beta \leq 1$,

$$^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} g(t) = {}^{P}I_{0t}^{\alpha,1-\beta,-\gamma,\delta} \frac{d}{dt} g(t),\ t > 0$$

is the regularized Prabhakar fractional derivative [1],

$$^{P}I_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} g(t) = \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[\delta(t-s)^{\alpha}\right] g(s) ds$$

is the Prabhakar fractional integral operator, whereas

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}[z] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!}$$

represents the Prabhakar function [2].

Definition. A regular solution of the equation (1) in the domain Ω is called a function $u(t,x)$ with the regularity

$$u(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right),\ u_{xx}(t,x),\ {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u(t,x) \in C(\Omega)$$

that satisfies the equation (1) at all points $(t,x) \in \Omega$.

Problem. Find a regular solution $u(t,x)$ of the equation (1) in the domain Ω, satisfying the following initial and boundary conditions:

$$u(0,x) = \tau(x),\ \ 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,1),\ \ u_x(t,1) = 0,\ \ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where $\tau(x)$ is a given function.

According to [3] and [4], the solution of the problem (1)-(2)-(3) is written in the following form:

$$u(t,x) = \int_0^t \nu_0(\eta) G_\xi(t,x,\eta,0)d\eta +$$

$$+ \int_0^1 \tau(\xi)\widetilde{G}(t,x,0,\xi)d\xi + \int_0^1\int_0^t f(\eta,\xi)G(t,x,\eta,\xi)d\eta d\xi. \tag{4}$$

Here, $\nu_0(t)$ is an unknown function defined by $u(t,0) = \nu_0(t)$. Since $u(t,0) = u(t,1) = \nu_0(t)$ by (3), we put $x = 1$ in (4) and obtain a Volterra equation of the second kind with respect to $\nu_0(t)$:

$$\nu_0(t) - \int_0^t \nu_0(\eta) G_\xi(t,1,\eta,0)d\eta = g(t), \tag{5}$$

where

$$g(t) = \int_0^1 \tau(\xi)\widetilde{G}(t,1,0,\xi)d\xi + \int_0^1\int_0^t f(\eta,\xi)G(t,1,\eta,\xi)d\eta d\xi.$$

For the integral equation (5), we state the following lemma:

Lemma. Let $\tau(x) \in C^1[0,1]$, $f(t,x) = t^{-\varepsilon}f_1(t,x)$, $f_1(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 \le \varepsilon < \beta_1$. Additionally, the following conditions are required to be satisfied:

$$\tau(0) = \tau(1),\ \ \tau'(1) = 0.$$

Then the integral equation (5) has a unique regular solution given by

$$\nu_0(t) = g(t) + \int_0^t g(\eta)R(t,\eta)d\eta, \tag{6}$$

where $R(t,\eta)$ is resolvent of the kernel $G_\xi(t,1,\eta,0)$.

Using Lemma, we establish the following theorem concerning the solution of the considered nonlocal problem:

Theorem. If the conditions of the Lemma are satisfied, then the solution of the problem (1)-(2)-(3) exists and is unique, and it is represented by (6) and (4).

References

1. **Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Z.** *Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications.* Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol.242, pp. 576-589.
1. **Prabhakar T.R.** *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel.* Yokohama Mathematical Journal. 1971. Vol.19, pp. 7-15.
1. **Usmonov D., Mirzaeva M.** *Solution of Boundary Value Problems for the Fractional-Order Diffusion Equation with the Prabhakar Fractional Derivative by the Green's Function Method.* Preprint. 2026. DOI:10.13140/RG.2.2.34275.21282.
1. **Karimov E., Usmonov D., Mirzaeva M.** *Green's Function Framework for Boundary Value Problems with the Regularized Prabhakar Fractional Derivative.* arXiv preprint arXiv:2603.24252. 2026.

UDK 517.95

On Systems of Fractional Nonlinear Partial Differential Equations

O. Mukhiddinova[1,2]

[1]**Renaissance Educational University, Tashkent, Uzbekistan;**
[2]**V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;**
oqila1992@mail.ru

This work is devoted to the Cauchy problem for systems of fractional-order partial differential equations with constant-coefficient differential operators.

The time derivative is understood in the sense of Caputo and has order $0 < \beta \leq 1$. Both linear systems, for which the right-hand side is independent of the unknown vector function, and nonlinear systems are considered. Sufficient conditions on the initial data and the right-hand side are established that guarantee the existence and uniqueness of a classical solution.

In several important cases, these conditions are also shown to be necessary.

The analysis is based on the Fourier and Laplace transforms, spectral properties of the matrix symbol of the differential operator, and estimates for Mittag–Leffler functions [1–3]. Let

$$U = (u_1, \ldots, u_m), \qquad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,$$

and consider the nonlinear Cauchy problem

$$D_t^\beta U(t,x) + \mathbb{A}(D)U(t,x) = H(t,x,U(t,x)), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

with the initial condition

$$U(0,x) = \Phi(x). \tag{2}$$

Here D_t^β denotes the Caputo fractional derivative of order $0 < \beta \leq 1$, while $\mathbb{A}(D)$ is a matrix differential operator with constant coefficients. Denote by $\mathcal{A}(\xi)$ the corresponding matrix symbol. Under the spectral assumptions imposed on $\mathcal{A}(\xi)$, its diagonalization leads to

$$\mathcal{A}(\xi) = M(\xi)\Lambda(\xi)M^{-1}(\xi), \qquad \Lambda(\xi) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(\xi), \ldots, \lambda_m(\xi)\}. \tag{3}$$

For the corresponding homogeneous problem, applying the Fourier transform with respect to the spatial variables and the Laplace transform with respect to time yields the representation

$$\widehat{U}(t,\xi) = M(\xi)\mathcal{E}_\beta\big(-\Lambda(\xi)t^\beta\big)M^{-1}(\xi)\widehat{\Phi}(\xi), \tag{4}$$

where

$$\mathcal{E}_\beta\big(-\Lambda(\xi)t^\beta\big) = \operatorname{diag}\left\{E_\beta(-\lambda_1(\xi)t^\beta),\dots,E_\beta(-\lambda_m(\xi)t^\beta)\right\}. \tag{5}$$

Thus, the solution of the homogeneous problem can be written in the form

$$U(t,x) = S(t,D)\Phi(x). \tag{6}$$

For the inhomogeneous problem, the corresponding representation is the Volterra integral equation

$$U(t,x) = F(t,x) + \int_0^t S'(t-\eta,D)H(\eta,x,U(\eta,x))\,d\eta, \tag{7}$$

where

$$F(t,x) = S(t,D)\Phi(x). \tag{8}$$

The kernel of the integral operator is expressed in terms of the Mittag–Leffler function:

$$\mathcal{S}'(t,\xi) = M(\xi)t^{\beta-1}\mathcal{E}_{\beta,\beta}\big(-\Lambda(\xi)t^\beta\big)M^{-1}(\xi). \tag{9}$$

The estimates for Mittag–Leffler functions play a fundamental role in obtaining the required bounds for this operator.

Let

$$\Phi \in \mathbf{L}_2^{\tau+\tau^*}(\mathbb{R}^n), \qquad \tau > \frac{n}{2}, \tag{10}$$

where τ^* characterizes the difference between the maximal and minimal orders of the diagonal differential operators. Assume that the right-hand side satisfies the required regularity condition and the Lipschitz estimate

$$\|H(t,\cdot,U) - H(t,\cdot,V)\|_{\mathbf{L}_2^{\tau+\tau^*}} \le L\|U-V\|_{\mathbf{L}_2^{\tau+\tau^*}}. \tag{11}$$

The main result establishes the existence and uniqueness of a classical solution to problem (1)–(2). The proof is based on the corresponding Volterra integral equation and the Banach fixed-point theorem. In particular, for sufficiently small $t_1 > 0$ satisfying

$$c_1 t_1^\beta < 1, \tag{12}$$

the integral operator becomes a contraction on $[0,t_1]$. Hence, a unique solution exists on this interval. Repeating the argument on successive intervals yields a unique solution on the whole interval $[0,T]$.

Moreover, the solution belongs to the class

$$U \in C\left([0,T];\mathbf{L}_2^{\tau+\tau^*}(\mathbb{R}^n)\right), \tag{13}$$

and, owing to the condition $\tau > n/2$, the Sobolev embedding theorem provides the continuity required for a classical solution. The spatial derivatives of the solution also satisfy the corresponding decay conditions at infinity.

A fractional Gronwall inequality is used to obtain a global estimate. If

$$y(t) \le K_0 + \frac{K_1}{\Gamma(\rho)}\int_0^t (t-s)^{\rho-1}y(s)\,ds, \tag{14}$$

then

$$y(t) \le K_0 E_\rho(K_1 t^\rho). \tag{15}$$

This estimate allows one to control the dependence of the solution on the initial data.

In particular, if $u_j^{(1)}$ and $u_j^{(2)}$ are two solutions corresponding to initial data $\varphi^{(1)}$ and $\varphi^{(2)}$, respectively, then

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_j^{(1)}(t,\cdot) - u_j^{(2)}(t,\cdot)\|_{C(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}\|_{L_2^{\tau+\tau^*}(\mathbb{R}^n)}. \tag{16}$$

Therefore, the obtained results provide sufficient conditions for the existence, uniqueness and stability of classical solutions for systems of fractional partial differential equations with $0 < \beta \le 1$. In several cases, the corresponding conditions on the data are also necessary.

The fractional time derivative leads to substantial differences from the classical case $\beta = 1$: exponential functions are replaced by Mittag–Leffler functions in the representation of solutions.

The developed approach provides a framework for further investigation of more general fractional systems, including systems with derivatives of order $1 < \beta \le 2$, Riemann–Liouville fractional derivatives, non-Hermitian matrix symbols, and systems involving different fractional orders.

Literature

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204. Elsevier, Amsterdam, 2006.

2. **Umarov S., Ashurov R., Chen Y.** *On a method of solution of systems of fractional pseudo-differential equations.* Fractional Calculus and Applied Analysis, 24(1), 254–277 (2021).

3. **Umarov S.** *Representations of solutions of systems of time-fractional pseudo-differential equations.* Fractional Calculus and Applied Analysis, 27, 616–651 (2024).

UDK 517.956.3

The inverse problem for a generalized (fractional) hyperbolic-type equation with Caputo derivatives of different orders

Nematjonov F.F. [1]

[1]Fergana Presidential School, Fergana, Uzbekistan;

[1]fnematjonov31@gmail.com

Let Ω be a rectangular domain: $\Omega = \{(t,x) :\ 0 < t < T,\ 0 < x < l\}$. In the domain Ω we consider the following fractional differential equation:

$$D_{0t}^{\alpha} u_x(t,x) - a\, u_x(t,x) - b\, D_{0t}^{\beta} u(t,x) = f(x), \tag{1}$$

where $a, b \in \mathbb{R}$ are given constants, and α, β are given real numbers such that $1 > \alpha > \beta > 0$. Here D_{0t}^{γ} $(0 < \gamma < 1)$ is the Caputo fractional derivative of order γ [1], defined by

$$D_{0t}^{\gamma} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{g'(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma}}\, d\tau = J_{0t}^{1-\gamma} g'(t), \quad t > 0,$$

$$J_{0t}^{\gamma} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} g(\tau)\, d\tau, \quad \gamma > 0,$$

is the Riemann - Liouville fractional integral operator of order γ, and $\Gamma(x)$ is the Euler gamma function.

Inverse Problem. Find a pair of functions $\{u(t,x),\ f(x)\}$, where $u(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $u_x(t,x)$, $D_{0t}^{\alpha} u(t,x)$, $D_{0t}^{\alpha} u_x(t,x) \in C(\Omega)$, and $f(x) \in C[0,l]$, satisfying equation (1) in the domain Ω, the Goursat conditions

$$u(0,x) = \tau(x), \quad u(t,0) = \varphi(t), \quad \varphi(0) = \tau(0), \quad 0 \le x \le l, \ \ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

and the additional condition

$$u(t_0,x) = \omega(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

where $\varphi(t)$, $\tau(x)$, $\omega(x)$ are given functions satisfying the compatibility conditions $\varphi(0) = \tau(0)$ and $\varphi(t_0) = \omega(0)$, and $t_0 \in (0,T]$ is a given number.

References

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Elsevier, Amsterdam. - 2006. - 523 p.

UDK 517.956.6

Nonlocal boundary problem for a class of mixed type equation in a domain whose elliptic part is a half-plane

Ruziev M. Kh.[1], Kazakbaeva K. B.[2]
[1,2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
ruzievmkh@gmail.com
[2]Tashkent International University of Financial Management and Technologies, Tashkent, Uzbekistan;
qalligul96@gmail.com

Consider the equation

$$(sgn\, y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \quad m > 0, \tag{1}$$

in the domain $D = D^+ \cup D^- \cup J$ of the complex plane $z = x + iy$, where D^+ is a half-plane $y > 0$, D^- is a finite domain of the plane $y < 0$, bounded by the characteristics

$$OC: \quad x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \qquad BC: \quad x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1,$$

of equation (1) issuing from the points $O(0,0)$ and $B(1,0)$.

We introduce the following notation: $J = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$, $J_1 = \{(x,y) : -\infty < x < 0, y = 0\}$, $J_2 = \{(x,y) : 1 < x < \infty, y = 0\}$.

In domain D we study the following non-local boundary value problem.

Problem N Find a solution of equation (1) in the domain $D = D^+ \cup D^-$, which satisfies the following conditions:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ and satisfies equation (1) in $D^+ \cup D^-$;

2) the following relation hold:

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0,$$

where $R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0$;

3) $u(x,y)$ satisfies the boundary conditions:

$$\lim_{y\to+0} y^{-\frac{m}{2}} u_y(x,y) = \varphi_i(x), \quad \forall x \in J_i, \quad i = 1,2,$$

$$\frac{d}{dx} u[\theta_0(x)] = \frac{d}{dx} u(x,0) + f(x), \quad x \in (0,1),$$

and the conjugation condition

$$\lim_{y\to-0} (-y)^{-\frac{m}{2}} u_y = \lim_{y\to+0} y^{-\frac{m}{2}} u_y, \quad x \in (0,1),$$

moreover, these limits at $x = 0$ and $x = 1$ may have a singularity of order lower than one, where $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, and $f(x)$ are given functions, and $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -(\frac{m+2}{4}x)^{\frac{2}{m+2}}\right)$ [1] is the point of intersection of the characteristic OC with the characteristic of equation (1) emanating from the point $(x_0, 0) \in J$.

Problem N reduces to solving a singular integral equation with a Cauchy-type kernel, and its solution is obtained in explicit form using the Carleman-Vekua method [2].

Note that a nonlocal problem for equation (1) in a mixed domain, where the elliptic part is a half-strip, was studied in [3].

Literature

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* - М.: Высшая школа. - 1985.
2. **Mushelishvili N.I.** *Singulyarnie Integralnie Uravneniya.* M: Fiz.-Mat. Literatura. - 1962.
3. **Ruziev M.Kh., Kazakbaeva K.B.** *A nonlocal problem for a class of mixed-type equations in a domain with elliptic part as a half-strip.* Bull. Inst. Math.,- 2025.- 8(2).-pp. 66-71.

UDK 517.95

Boundary value problem for an elliptic equation degenerating inside a domain

Ruziev M. Kh.[1], Sarsenbaeva G. O.[2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
ruzievmkh@gmail.com
[2]Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan;
gozzalsarsenbaeva13@gmail.com

In [1], the Dirichlet problem and a Neumann-type problem for the Holmgren equation with a singular coefficient and a spectral parameter in a vertical half-strip are considered. A boundary value problem for a degenerate elliptic equation in the upper half-plane was investigated in [2].

This paper investigates a boundary value problem for an elliptic equation degenerating in an unbounded domain. The unique solvability of the problem considered is proven.

Consider the following equation

$$|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

in the domain $D = D^+ \cup D^- \cup I$, where $D^+ = \{(x,y) | \, x > 0, y > 0\}$, $D^- = \{(x,y) | \, x > 0, y < 0\}$ and $I = \{(x,y) | \, x > 0, y = 0\}$.

In the equation (1), m is a real number satisfying the condition $m > 0$.

Problem N**.** It is required to find a function $u = u(x,y)$ in the domain D that satisfies the following conditions:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ and satisfies the equation (1) in $D^+ \cup D^-$;

2) $u = u(x,y)$ satisfies:

$$\lim_{R \to \infty} u(x,y) = 0, \tag{2}$$

where $R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2}|y|^{m+2}$, $x > 0$, $y \in (-\infty; +\infty)$.

3) $u = u(x,y)$ satisfies a boundary condition

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad y \in (-\infty; +\infty), \tag{3}$$

where

$$\varphi(y) = \begin{cases} \varphi_1(y), & y > 0, \\ \varphi_2(y), & y < 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

and a conjugation condition

$$\lim_{y \to +0} u_y = a(x) \lim_{y \to -0} u_y + b(x), \quad x \in (0, \infty), \tag{4}$$

moreover, these limits at $x = 0$ may have singularities of order less than $1 - 2\beta$ and tend to zero as $x \to \infty$, where $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$. In equalities (3) and (4), $a(x)$, $b(x)$, and $\varphi(y)$ are given functions, where $a(x)$, $b(x) \in C[0, \infty)$.

To solve the given problem, by virtue of the conjugation condition (4), the forms of the solution to problem (1) in the domains D^+ and D^- are equated. After performing the corresponding calculations, the problem reduces to a singular integral equation with a Cauchy kernel, which is solved using the Carleman-Vekua method [3]. It is shown that the index of the resulting singular integral equation is equal to zero, and consequently, its solution can be represented in the explicit form.

Consequently, we obtain the following theorem.

Theorem. Let the following conditions be satisfied:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \varphi_1(\infty) = 0, \varphi_2(\infty) = 0,$$

$$\varphi_1(y) \in C[0; +\infty) \text{ and absolutely integrable in } (0; +\infty),$$

$$\varphi_2(y) \in C(-\infty; 0] \text{ and absolutely integrable in } (-\infty; 0).$$

Then Problem N is uniquely solvable.

References

1. **Ruziev M. Kh.** *A boundary value problem for the Holmgren equation with singular coefficient and spectral parameter.* J. Ellipt. Parab. Equat.: - 2019. - 5, 269-280 5 pp.
2. **Ruziev M. Kh., Kazakbaeva K. B.** *On a boundary value problem for the Holmgren equation with singular coefficients in a half-plane.* Lobachevskii J. Math.: - 2025. - 46, 6004-6011 pp.
3. **Mushkhelishvili N. I.** *Singular Integral Equations.* Fizmatlit, Moscow: - 1962.

UDK 517,95

Space-dependent source identification problem for the subdiffusion equation with a non-local in time condition

Shakarova M.[1]

[1]Tashkent State University of Economics, Islom Karimov 49, Tashkent, Uzbekistan; shakarova2104@gmail.com

Suppose that H is a separable Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)$, and let A be an operator in H, with a domain of definition $D(A)$, satisfying the following conditions:

1) $A = A^*$, where A^* denotes the adjoint operator of A,

2) $(Ah, h) \geq \lambda_0(h, h)$, $h \in D(A)$, for some $\lambda_0 > 0$.

Assume that A has a complete system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}_1^\infty$ in H and a countable set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$. It is assumed that the eigenvalues are ordered such that $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty$.

Let $C((a,b);H)$ stand for a set of continuous vector-valued functions $h(t)$, defined on $t \in (a,b)$ with values in H.

Inverse problem. Let $0 < \rho \leq 1$. Find a pair of function $u(t) \in AC([0,T];H)$ and element $f \in H$ that satisfies the following non-local boundary value problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + Au(t) = fg(t), \quad t \in (0,T], \\ u(0) = u(T), \end{cases} \tag{1}$$

and additional

$$\int_0^T u(t)dt = \psi, \tag{2}$$

condition. Here $g(t) \in C[0,T]$ is a given function, $\psi \in H$ is a known element and D_t^ρ stands for the Caputo fractional derivative (see e.g. [1], p.14).

Problem (1) is also called *the forward problem.* The forward problem is studied in [2].

Lemma 1.

Let $\rho \in (0,1]$, $g(t) \in C[0,T]$, $g(t) \geq 0$ (or $g(t) \leq 0$), $t \in [0,T]$ and $\exists \tau \in [0,T]$, $g(\tau) \neq 0$. Then there is constant $C_0 > 0$, depending on T, such that for all k one has:

$$|\Phi_\rho(k,T)| \geq \frac{C_0}{\lambda_k}.$$

where

$$\Phi_\rho(k,T) = (1 - E_\rho(-\lambda_k T^\rho))G_{k,\rho}(T) + TE_{\rho,2}(-\lambda_k T^\rho)w_{k,\rho}(T),$$

$$G_{k,\rho}(T) = \int_0^T (T-\eta)^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\lambda_k(T-\eta)^\rho)g(\eta)d\eta$$

and

$$w_{k,\rho}(T) = \int_0^T (T-\eta)^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\lambda_k (T-\eta)^\rho) g(\eta) d\eta.$$

Theorem 1. *Let $\rho \in (0,1]$, $\psi \in D(A)$. Moreover let $g(t) \in C[0,T]$, $g(t) \geq 0$ (or $g(t) \leq 0$), $t \in [0,T]$ and $\exists \tau \in [0,T]$, $g(\tau) \neq 0$. Then there exists a unique solution of inverse problem (1)-(2):*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\Phi_\rho(k,T)} \left[(1 - E_\rho(-\lambda_k T^\rho)) w_{k,\rho}(t) + E_\rho(-\lambda_k t^\rho) w_{k,\rho}(T) \right] v_k, \tag{3}$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - E_\rho(-\lambda_k T^\rho)}{\Phi_\rho(k,T)} \psi_k v_k. \tag{4}$$

Theorem 1 holds where the function $g(t)$ does not change sign. If the function $g(t)$ is changing sign, then $\Phi_\rho(k,T)$ can become zero. Therefore, let us divide the set of natural numbers $\mathbb{N}$ into two sets, i.e. $\mathbb{N} = K_\rho \cup K_{0,\rho}$. Sets K_ρ and $K_{0,\rho}$ are defined as follows: if $\Phi_\rho(k,T) \neq 0$, then $k \in K_\rho$, alternatively, if $\Phi_\rho(k,T) = 0$, then $k \in K_{0,\rho}$.

When the function $g(t)$ changes sign, we present the following lemma.

Lemma 2. *Let $\rho \in (0,1]$, $g(t) \in C[0,T]$ and $\left| \int_0^T g(t) dt \right| \geq g_0 > 0$. Then there exists number k_0 such that, for all $k \geq k_0$, the following estimate holds:*

$$|\Phi_\rho(k,T)| \geq \frac{C}{\lambda_k},$$

where constant C_0 depends on k_0 and g_0.

Theorem 2. *Let $\rho \in (0,1]$, $\psi \in D(A)$, $g(t) \in C[0,T]$ and $\left| \int_0^T g(t) dt \right| \geq g_0 > 0$.*

(1) If the set $K_{0,\rho}$ is empty, then there exists a unique solution of the inverse problem (1)-(2) and this solution has the form (3), (4).

(2) If the set $K_{0,\rho}$ is not empty, then for the existence of a solution to the inverse problem, it is necessary and sufficient that the following conditions

$$\psi_k = (\psi, v_k) = 0, \ k \in K_{0,\rho},$$

be satisfied. In this case, the solution to the problem (1)-(2) exists, but is not unique. In this case the solution has the representation

$$f = \sum_{k \in K_\rho} \frac{\psi_k (1 - E_\rho(-\lambda_k T^\rho))}{\Phi_\rho(k,T)} v_k + \sum_{k \in K_{0,\rho}} f_k v_k,$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{1 - E_\rho(-\lambda_k T^\rho)} \left[(1 - E_\rho(-\lambda_k T^\rho)) w_{k,\rho}(t) + E_\rho(-\lambda_k t^\rho) w_{k,\rho}(T) \right] v_k,$$

where f_k, $k \in K_{0,\rho}$, are arbitrary real numbers.

References

1. **A.V Pskhu.** *Fractional Differential Equations.* Nauka, Moscow (2005) [in Russian].
2. **R. Ashurov, Y. Fayziev.** *On the non-local problems in time for time-fractional subdiffusion equations.* Fractal Frac., 2022, 41, 1–21.

UDC 517.956.4

Uniqueness for an Inverse Problem of Determining Orders and Coefficients for Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equation

Shamuratov D.S.

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, Tashkent, 100174, Uzbekistan; damirshamuratov5@gmail.com

Fractional differential equations have become an important tool for modeling anomalous diffusion, viscoelasticity, heat conduction in heterogeneous media, signal processing, and many other phenomena exhibiting memory and hereditary effects. In recent decades, substantial attention has been devoted to the mathematical analysis of fractional evolution equations, including questions of existence, uniqueness, regularity, asymptotic behavior, controllability, and inverse problems. Among various models, multi-term time-fractional diffusion equations have attracted particular interest because they provide a more accurate description of complex physical processes than their single-term counterparts.

In many practical applications, the parameters appearing in fractional differential equations are not known a priori and must be identified from experimental or observational data. Consequently, inverse problems concerning the determination of fractional orders and associated coefficients have become an active area of research. Such problems are of considerable importance because the fractional orders characterize the memory properties of the underlying medium and therefore play a crucial role in the interpretation of physical processes.

Let A be an arbitrary positive self-adjoint operator defined in a separable Hilbert space H with domain $D(A)$. Denote the inner product in H by $(\cdot,\cdot)$ and the norm by $\|\cdot\|$. Suppose further that the inverse operator A^{-1} is compact. Then it is well known that A possesses a complete orthonormal system of eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}$ with a unique accumulation point at $+\infty$. We assume that the eigenvalues are ordered in a nondecreasing manner, i.e.,

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \to +\infty.$$

The Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha_j < 1$ $(j = 1, \dots, n)$ for a function $h(t)$ is defined as:

$$\partial_t^{\alpha_j} h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_j)} \int_0^t \frac{h'(s)}{(t-s)^{\alpha_j}} ds, \quad t > 0,$$

provided that the right-hand side exists. Here, $\Gamma(\cdot)$ is EulerвЂ™s gamma function.

Consider the following multi-term fractional diffusion equation with Caputo derivatives:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} q_j \partial_t^{\alpha_j} u(t) + Au(t) = 0, \qquad 0 < t \le T, \\ u(0) = a, \end{cases} \tag{1}$$

where

$$0 < \alpha_n < \alpha_{n-1} < \cdots < \alpha_1 < 1,$$

$q_j > 0$ for $j = 1, \dots, n$ (without loss of generality, $q_1 = 1$) and $a \in H$.

For single-term time-fractional diffusion equations, inverse problems for determining the fractional order have been extensively investigated by many authors. Various uniqueness and reconstruction results have been obtained using additional observations at interior points, boundary measurements, integral conditions, and overdetermination data. Compared with the single-term case, inverse problems for multi-term time-fractional equations are significantly more challenging because several fractional orders interact simultaneously in the solution representation. As a consequence, the available literature on such problems remains relatively limited.

More recently, [1] investigated inverse problems for multi-term time-fractional wave equations and established uniqueness results for recovering fractional orders . Their approach requires the observation of the solution on a nonempty space–time subdomain and assumes relatively strong regularity conditions on the initial data. In particular, the initial value is required to belong to $H^6(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ and satisfy an additional sign condition.The authors considered the following problem:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} c_j \partial_t^{\alpha_j} u(x,t) - \Delta u(x,t) + p(x)u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = a(x), \qquad u_t(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} c_j \partial_t^{\beta_j} v(x,t) - \Delta v(x,t) + q(x)v(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v(x,0) = a(x), \qquad v_t(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \end{cases}$$

where $1 < \alpha_m < \cdots < \alpha_1 < 2, \quad 1 < \beta_m < \cdots < \beta_1 < 2, \quad c_j > 0, \ (c_1 = 1), \ j = 1, \dots, m.$

The main feature of our approach is that the identification is performed using only the scalar observation $(u(t), \phi)$ for $0 < t < T$, where ϕ is a fixed element of the Hilbert space. Thus, unlike most existing works, no observation on a space–time subdomain is required. Furthermore, we assume only that the initial value belongs to the underlying Hilbert space H. No sign condition and no additional smoothness assumptions on the initial data are imposed. For the single-term time-fractional diffusion equation, uniqueness results for determining the fractional order from observation data were obtained in [2] under such a condition.

Let τ be an arbitrary real number. We introduce the power of the operator A, acting in H according to the rule :

$$A^\tau h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau h_k v_k.$$

Here and everywhere below, for the vector $h \in H$, the symbol h_k denotes the Fourier coefficients of this vector: $h_k = (h, v_k)$. The domain of definition of this operator is determined by the condition $A^\tau h \in H$ and has the form:

$$D(A^\tau) = \Big\{ h \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 < \infty \Big\}.$$

The solution of problem (1) involves the multivariable (multinomial) Mittag–Leffler function. Therefore, we first present the definition of the multinomial Mittag–Leffler function.

The multinomial Mittag–Leffler function is defined as

$$E_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\,\alpha_0}(z_1,\dots,z_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\binom{k}{k_1,\dots,k_n}\frac{\prod_{j=1}^{n}z_j^{k_j}}{\Gamma(\alpha_0+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j k_j)},$$

where $\binom{k}{k_1,\dots,k_n}$ denotes the multinomial coefficient

$$\binom{k}{k_1,\dots,k_n}=\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!},\quad \text{with}\quad k=\sum_{j=1}^{n}k_j,$$

and k_j, $1\le j\le n$, are non-negative integers.

For later use, we adopt the abbreviation

$$E_{\alpha',\beta}(-\lambda_k t^{\alpha_1},*)=E_{(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\dots,\alpha_1-\alpha_n),\beta}(-\lambda_k t^{\alpha_1},-q_2 t^{\alpha_1-\alpha_2},\dots,-q_n t^{\alpha_1-\alpha_n}),$$

Lemma 1. [3] The solution of (1) is represented by

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\lambda_k t^{\alpha_1}E_{\alpha',1+\alpha_1}(-\lambda_k t^{\alpha_1},*)\right)a_k v_k,$$

where $(a,v_k)=a_k$, $a\in H$.

Inverse Problem. Let us formulate our main result. For this, we will look at another system

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mu_j\,\partial_t^{\beta_j}\omega(t)+B\omega(t)=0, & 0<t\le T,\\ \omega(0)=a,\end{cases}\tag{2}$$

where $0<\beta_n<\beta_{n-1}<\cdots<\beta_1<1$, $\mu_j>0$ for $j=1,\dots,n$ (without loss of generality, $\mu_1=1$) and B is a positive definite self-adjoint operator with compact inverse. By the spectral theorem, the operator B possesses a complete orthonormal system of eigenfunctions $\{\widetilde{v_k}\}$ corresponding to positive eigenvalues $\{\widetilde{\lambda_k}\}$. Then there exists a unique solution [3]:

$$\omega(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\widetilde{\lambda_k}t^{\beta_1}E_{\beta',1+\beta_1}(-\widetilde{\lambda_k}t^{\beta_1},*)\right)\widetilde{a_k}\widetilde{v_k}.$$

where $(a,\widetilde{v_k})=\widetilde{a_k}$ and $a\in H$.

Theorem 1. Let $\phi\in D(A^2)\cap D(B^2)$, and $(a,A\phi)\neq 0$, $(a,B\phi)\neq 0$. If

$$(u(t),\phi)=(\omega(t),\phi),\quad 0<t<T,$$

then

$$(a,A\phi)=(a,B\phi),\quad \alpha_j=\beta_j,\quad q_j=\mu_j,\quad j=1,\dots,n.$$

Remark 1. For multi-term time-fractional wave equations, an analogous result can be formulated under the assumptions

$$1<\alpha_n<\alpha_{n-1}<\cdots<\alpha_1<2,\qquad 1<\beta_n<\beta_{n-1}<\cdots<\beta_1<2,$$

and the initial conditions

$$\partial_t u(0)=0,\qquad \partial_t\omega(0)=0.$$

References

1. **X. Jiang., Z. Li.** *Unique inversion of orders and potential for multi-term time fractional wave equations.* Appl. Math. Lett. **160**, Article 109319 (2025).
2. **R. Ashurov., M. Yamamoto.** *Uniqueness for an inverse problem of determining order and temporal factor of the source for time-fractional evolution equations.* https://arxiv.org/pdf/2606.31113 (2026).
3. **Z. Li., Y. Liu., M. Yamamoto.** *Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients.* Appl. Math. Comput. **257**, 381–397 (2015).

UDK 517.958

Inverse problem for determining an unknown spatial source function in a time-fractional Kuramoto-Sivashinsky equation

Sobirov Z. A.[1], Norkulova R. B.[2]
[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
sobirovzar@gmail.com
[1,2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
norkulovarushana1988@gmail.com

The Kuramoto-Sivashinsky equation is a fundamental nonlinear evolution equation that arises in the mathematical modeling of various instability phenomena, including flame-front dynamics, thin-film flows, and other dissipative systems. In the last few years, fractional generalizations of the Kuramoto-Sivashinsky equation have attracted considerable attention due to their ability to describe systems with memory and hereditary effects. We study an inverse source problem for the following fractional differential equation, which constructed the linear part of the Kuramoto-Sivashinsky equation equipped with a Caputo fractional time derivative:

$$\partial_{0t}^{\beta}u + a^2u_{xxxx} + bu_{xxx} + cu_{xx} + du_x + ku = f(x)g(x,t) + \gamma u^p u_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \le T, \quad (1)$$

with initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \le t \le T, \quad (2)$$

and the overdetermination condition

$$\int_0^T \eta(t)u(x,t)dt = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

where $0 < \beta < 1$, $a > 0$, b, c, d, and k are real numbers, $p \in \mathbb{N}$, $\eta(t)$ and $\psi(x)$ known functions, $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$. The inverse problem of simultaneously determining the pair (u, f), with $u \in C([0,T]; S(\mathbb{R}))$ and $f \in S(\mathbb{R})$ is investigated. Inverse source problems of this type arise naturally in a wide range of physical and engineering applications. The problem is formulated in the Schwartz space $S(\mathbb{R})$ in the class of infinitely differentiable, rapidly decreasing functions [1]. This functional framework is particularly well adapted to the analysis of problems posed on the whole real line. The unknown source function is reconstructed using an additional integral overdetermination condition [2]. A successive approximation method is employed to construct a sequence of approximate solutions [3]. The Cauchy sequence is established through appropriate a priori estimates. Consequently, the existence, uniqueness, and stability of the solution in the Schwartz space are proved.

Literature

1. **Yakupov V.M.** *On the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation.* Differential Equations, 11(3),(1975), 556-561.[In Russian].
2. **V. L. Kamynin.** *On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition, Mathematical Notes 77(3),(2005), 482-493.*
3. **Ashurov R. R., Sobirov Z. A., Norkulova R. B.** *Cauchy problem for the time-fractional generalized Kuramoto-Sivashinsky equation* //arXiv preprint arXiv:2604.08041. (2026).

УДК 517.958

Inverse source problem for the fractional heat equation on metric graphs

Sobirov Z. A.[1,2], Turemuratova A. A.[3], Aminov H.[1]
[1,2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
z.sobirov@nuu.uz
[3] Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
ariuxanturemuratova@gmail.com
aminov03h@gmail.com

A graph $\mathcal{G}$ is defined by a finite set of vertices $V = \{\nu_i\}_{i=1}^{j}$ and a set of edges $E = \{e_i\}_{i=1}^{n}$. In the context of a metric graph, each edge e_i is assigned a positive length $l_i > 0$, and is identified with the open interval $(0, l_i)$, $i = \overline{1,n}$. A local coordinate $x_i \in (0, l_i)$ is introduced along each edge e_i $i = \overline{1,n}$. A vertex ν is said to be incident to an edge e_i if ν is one of the endpoints of e_i; this relation is denoted $e_i \sim \nu$. The valency of a vertex ν is the number of edges incident to it, i.e., the cardinality of the set $I(\nu) = \{e : e \sim \nu, e \in E\}$. A vertex of valency one is called a boundary vertex. The set of all boundary vertices is denoted by $\partial\mathcal{G} \subset V$. For the function $y : \mathcal{G} \to R$, defined on the graph, we put $y|_{e_i} = y^{(i)}$.

In this work, we assume that $\mathcal{G}$ is a connected graph and that its set of boundary vertices $\partial\mathcal{G}$ is non-empty.

We investigate the following fractional heat equations on each edge of graph $\mathcal{G}$

$$\partial_{0,t}^{\alpha} u^{(i)}(x,t) + \partial_{x,l_i}^{\beta_i} \left(p^{(i)}(x) D_{0,x}^{\beta_i} u^{(i)}(x,t) \right) = f(t) g^{(i)}(x,t), \tag{1}$$

$$x \in e_i,\ t \in (0,T],\ i = \overline{1,n},$$

where $p \in C[\mathcal{G}]$ satisfying $0 < a_0 \le p^{(i)}(x) \le a_1 < +\infty$, a_0, a_1 are constants, $D_{0,x}^{\beta_i}$ and $\partial_{x,l_i}^{\beta_i}$, $i = \overline{1,n}$ denote the left-sided Riemann-Liouville and the right-sided Caputo fractional derivatives of order $\beta_i \in (\frac{1}{2}, 1)$ with respect to x, respectively. Also, $\partial_{0,t}^{\alpha}$ is the generalized left-sided Caputo fractional derivative [1] of order $\alpha \in (0,1)$, $g^{(i)}(x,t)$ are given functions, $f(t)$ is an unknown function. Our aim is to determine a pair of functions $\{u(x,t), f(t)\}$ on the space-time domain $G_T = \mathcal{G} \times (0,T]$ satisfying the following initial conditions

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathcal{G}, \tag{2}$$

the vertex (transmission) conditions

$$\begin{cases} I_{0,x}^{1-\beta_i} u^{(i)}(\nu,t) = I_{0,x}^{1-\beta_j} u^{(j)}(\nu,t), \ \forall i,j \in I(\nu), \ \nu \in V \backslash \partial\mathcal{G}, \\ \sum\limits_{e_i \sim \nu} \sigma_{e_i,\nu} p^{(i)}(\nu) D_{0,x}^{\beta_i} u^{(i)}(\nu,t) = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial\mathcal{G}, \ t \in [0,T], \end{cases} \tag{3}$$

where

$$\begin{cases} \sigma_{e_i,\nu} = 1 \text{ if } \nu \text{ is the right end of the edge } e_i, \\ \sigma_{e_i,\nu} = -1 \text{ if } \nu \text{ is the left end of the edge } e_i, \end{cases}$$

and Dirichlet conditions

$$I_{0,x}^{1-\beta} u(\nu,t) = 0, \quad \nu \in \partial\mathcal{G}, \ t \in [0,T], \tag{4}$$

and the integral overdetermination condition

$$\int\limits_{\mathcal{G}} \mu(x) u(x,t) d\mathcal{G} = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

where $b(x)$, $\mu(x)$, $\psi(t)$ are given functions.

Using a modified functional approach and suitable a priori estimates, we prove the existence and uniqueness of strong solutions in fractional Sobolev spaces. The inverse problem is transformed into an equivalent operator equation. The well-posedness of the associated resolvent operator is established subject to an integral overdetermination condition. The inverse source problem (1)–(5) was previously studied in [2] on a star metric graph, where the fractional derivative order in equation (1) was assumed to be constant along all edges. Similarly, the fractional Sturm–Liouville problem was examined in [3] under the assumption of a common fractional differentiation order on every edge of the graph. In contrast, our approach allows for edge-dependent fractional orders.

References

1. **Kubica A., Ryszewska K., Yamamoto M.** *Time-Fractional Differential Equations: A Theoretical Introduction.* Springer, Singapore, 2020.

2. **Ashurov R.R., Sobirov Z.A., Turemuratova A.A.** *Inverse source problem for the space-time fractional parabolic equation on a metric star graph with an integral overdetermination condition.* Mathematical Notes. - 2024, 116(5), pp. 892-904.

3. **Turemuratova A. A., Kulaev R. Ch., Sobirov Z. A.** *Fractional Sturm-Liouville problem on metric graphs.* Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2025, 46(11), pp. 5682–5693.

UDK 517.95

FRACTIONAL WAVE EQUATION ON COMPACT METRIC GRAPHS

Sobirov Z. A.[1], Turapova Sh. H.[2]

[1]V.I,Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; z.sobirov@nuu.uz [2]National University of Uzbekistan,Tashkent; turapovashahnoza8@gmail.com

We consider the graph $\Gamma = (E, V)$, where $E = \{e_k\}_{k=1}^n$ the set of edges and V is the set of vertices. We suppose that Γ is connected and bounded. In the each of the edges e_k we define the local coordinate $x_k \in (0, L_k)$. Such a graph usually called a metric graph. For a function $u : \Gamma \to R$ we put $u|_{e_k} = u^{(k)}$.

We study the following fractional equation posed on a metric graph Γ

$$\partial_{0,t}^{\alpha} u^{(k)}(x,t) = \mathcal{L}u^{(k)} + f^{(k)}(x,t), \quad x \in e_k, \quad t \in (0,T], \quad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

where $\partial_{0,t}^{\alpha}$ is the left Caputo fractional derivatite of order $1 < \alpha < 2$ and $f^{(k)}(x,t)$ are given functions.

$$\mathcal{L}u^{(k)} = \partial_{x,l_k}^{\beta} \left(p^{(k)}(x) D_{0,x}^{\beta} u^{(k)}(x,t) \right) \tag{2}$$

$0 < a_0 \le p^{(k)}(x) \le a_1 < +\infty$ and $p \in C[\Gamma], D_{0,x}^{\beta}$ and ∂_{x,l_k}^{β} represent the left Riemann-Liouville and the right Caputo fractional derivatite of order $\frac{1}{2} < \beta < 1$ with respect to the x, respectively.We look for the function $u(x,t)$ defined in the domain $G_T = \Gamma \times (0,T)$, under the given initial conditions.

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Gamma \tag{3}$$

the vertex conditions

$$\begin{cases} I_{0,x}^{1-\beta} u^{(k)}(0,t) = I_{0,x}^{1-\beta} u^{(j)}(0,t), \quad k \neq j, \quad k,j \in I(\nu)1 \\ \sum_{e_k \sim \nu}^{n} \sigma_{e_k,\nu} p^{(k)}(\nu) D_{0,x}^{\beta} u^{(k)}(\nu,t) = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial\Gamma, \end{cases} \tag{4}$$

where $\sigma e_{k,\nu} = 1$ if ν is the right end of the edge $e_k, \sigma e_k, \nu$ if is the left end of the edge e_k, and Dirichlet conditions

$$I_{0,x}^{1-\beta} u(\nu,t) = 0, \quad \nu \in \partial\Gamma, \tag{5}$$

where $\varphi(x), \psi(x)$ is known functions.

Now we need to show uniqueness of the solution and multiply equation (1) by $u_t^{(k)}(x,t)$ and integrate the resulting relation with respect to x from 0 to L_k. We demonstrate the uniueness of the solution by applying a priori estimates and using generalised order Gronwall-Bellman inequality to the resulting expressions [3].

References

1. Klimek M., and Agrawal O. P. *Fractional Sturm-Liouville problem.*Computers and Mathematics with applications, 2013.
2. Sobirov Z. A., Turemuratova A. A. *Inverse source problem for the space-time fractional diffusion equation on metric graphs.*, Bull. Inst. Math., 2025, 8(4), 121-130.
3. A.A.Alikhanov, *A priori estimate for solutions of boundary value problems for fractional-order equations,* Differential equations, 2010.V.46.Issue 5. pp 660-666.

UDC 517.95

A problem with a nonlocal condition in time for a parabolic equation with involution

Sobirjonov A.K.[1], Turmetov B.Kh [2]

[1]Alfraganus University Tashkent, Uzbekistan; avazbeksobirjonov1998@gmail.com

[2] Akhmet Yassawi University Turkestan. Kazakhstan; batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

In this paper, we investigate a Dirichlet problem for an equation with a nonlocal-in-time condition involving two non-commuting involutions. The main feature of the problem is related to the non-commutativity of the involutions S_1 and S_2, defined by $x = (x_1, x_2)$, $S_1x = (1 - x_1, x_2)$, $S_2x = (x_2, x_1)$. By applying the Fourier method, we derive a system of coupled ordinary differential equations for the unknown Fourier coefficients. Based on the obtained system, we establish sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution.

Problem Statement.

Let $P = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}$, $Q = (0, T) \times P$. Consider the involution mappings $S_1x = (1 - x_1, x_2)$, $S_2x = (x_2, x_1)$. Obviously, S_1 and S_2 do not commute, i.e., $S_1S_2 \neq S_2S_1$.

Let $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ be real numbers. We introduce the operator

$$L_x v(x) = \alpha_0 \Delta v(x) + \alpha_1 \Delta v(S_1 x) + \alpha_2 \Delta v(S_2 x).$$

Consider the following problem in the domain Q:

$$u_t(t, x) - L_x u(t, x) = f(t, x), \qquad (t, x) \in Q, \tag{1}$$

with the nonlocal condition

$$u(0, x) + \gamma u(T, x) = \varphi(x), \qquad x \in \overline{P}, \tag{2}$$

and the boundary condition

$$u(t, x) = 0, \qquad x \in \partial P, \quad 0 < t < T. \tag{3}$$

Here, $f(t, x)$ and $\varphi(x)$ are given functions.

It is worth emphasizing that, in our previous studies, we considered problems in the case where S_1 and S_2 commute, namely, $S_1x = (1 - x_1, x_2)$ and $S_2x = (x_1, 1 - x_2)$. In particular, in [1], the case where the operators S_1 and S_2 commute, $\gamma = 0$, and the equation contains time-dependent loaded terms was studied.

If, in problem (1)–(3), we set $\gamma = 0$ and consider the case $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0$, then problem (1)–(3) is not well-posed for arbitrary $\alpha_2 \in R, \quad \alpha_2 \neq 0$.

However, considering the nonlocal condition, i.e., the case $\gamma \neq 0$, leads to interesting results. In particular, γ can be chosen appropriately so that problem (1)–(3) becomes well-posed.

Investigation of the problem.

If we apply the Fourier method to problem (1)–(3), we obtain the following spectral problem:

$$\alpha_0 \Delta v(x) + \alpha_1 \Delta v(S_1 x) + \alpha_2 \Delta v(S_2 x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in P; \qquad v(x) = 0, \quad x \in \partial P. \tag{4}$$

Let

$$w_{nm}(x) = 2 \sin(\pi n x_1) \sin(\pi m x_2), \tag{5}$$

be the eigenfunctions of the classical Dirichlet problem

$$-\Delta w(x_1, x_2) = \mu w(x_1, x_2), \quad x \in P; \qquad w(x_1, x_2) = 0, \quad x \in \partial P.$$

The corresponding eigenvalues are given by $\mu_{mn} = \pi^2(n^2 + m^2), \quad n, m \in \mathbb{N}$.
In our previous works [1,3], we proved that, in the case

$$S_1x = (1 - x_1, x_2), \quad S_2x = (x_1, 1 - x_2),$$

the functions $w_{mn}(x)$ are eigenfunctions of problem (4).
However, this result does not hold in the case $S_1x = (1 - x_1, x_2), \quad S_2x = (x_2, x_1)$.
Indeed, in this case,

$$w_{mn}(S_2x) = w_{nm}(x), \qquad \Delta w_{mn}(S_2x) = -\mu_{mn}\Delta w_{nm}(x).$$

Consequently, when $n \neq m$, the functions $w_{nm}(x)$ are not eigenfunctions of problem (4).
Since the system of functions $w_{nm}(x)$ in (5) forms an orthonormal basis in the space $L_2(P)$ [2], we seek the solution of problem (1)–(3) in the following form:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(t)w_{nm}(x), \tag{6}$$

where $u_{nm}(t)$ are unknown coefficients.

We also expand the functions $f(t, x)$ and $\varphi(x)$ into Fourier series:

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(t)w_{nm}(x), \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{nm}w_{nm}(x). \tag{7}$$

Furthermore, the following identities hold for the functions $w_{nm}(x)$:

$$-\Delta w_{nm}(x) = \mu_{nm}w_{nm}(x),$$
$$-\Delta w_{nm}(S_1x) = (-1)^{n+1}\mu_{mn}w_{mn}(x),$$
$$-\Delta w_{nm}(S_2x) = \mu_{mn}w_{mn}(x).$$

Consequently,

$$\Delta u(t, x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}u_{nm}(t)w_{nm}(x),$$
$$\Delta u(t, S_1x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}(-1)^{n+1}u_{nm}(t)w_{nm}(x),$$
$$\Delta u(t, S_2x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}u_{mn}(t)w_{nm}(x).$$

After interchanging the indices $n \leftrightarrow m$ and taking into account that $\mu_{nm} = \mu_{mn}$, we obtain the following expression:

$$\Delta u(t, S_2x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{mn}u_{nm}(t)w_{mn}(x).$$

Therefore,

$$L_xu(t, x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{nm}\left[\left(\alpha_0 + (-1)^{n+1}\alpha_1\right)u_{nm}(t) + \alpha_2u_{mn}(t)\right]w_{nm}(x). \tag{8}$$

Now, substituting equalities (6)–(8) into equation (1) and condition (2), respectively, we obtain the following problem:

$$\begin{cases} u'_{mn}(t) + \mu_{mn}\left(\alpha_0 + (-1)^{m+1}\alpha_1\right)u_{mn}(t) + \mu_{mn}\alpha_2u_{nm}(t) = f_{mn}(t), \quad u_{mn}(0) + \gamma u_{mn}(T) = \varphi_{mn} \\ u'_{nm}(t) + \mu_{mn}\left(\alpha_0 + (-1)^{n+1}\alpha_1\right)u_{nm}(t) + \mu_{mn}\alpha_2u_{mn}(t) = f_{nm}(t), \quad u_{nm}(0) + \gamma u_{nm}(T) = \varphi_{nm}. \end{cases}$$

Literature

1. **B.Turmetov, O. Kh.Abdullaev, A.K.Sobirjonov** *Boundary value problems for a loaded fractional order diffusion equation with involution perturbation.* Journal of Mathematical Sciences. 2025. vol. 289.
2. **E. I. Moiseev** *The basis property for systems of sines and cosines.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 275:4 (1984), 794-798.
3. **B.Kh.Turmetov, V. Karachik.** *On solvability of some inverse problems for a nonlocal fourth-order parabolic equation with multiple involution.* AIMS Mathematics, 9:3, 6832-6849 (2024).

UDK 517.95

On the Solvability of the Cauchy Problem for the Diffusion Equation with Weyl Fractional Derivative

Sulaymonov I. A.[1], Rayimberdiyev S. I.[2]
[1] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
ilyosxojasulaymonov@gmail.com
[1,2] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
rayimberdiyevshahzod@gmail.com

Fractional partial differential equations have attracted considerable attention due to their ability to describe nonlocal phenomena arising in physics, engineering, and applied sciences. Among the various definitions of fractional derivatives, the Riemann–Liouville and Caputo derivatives are the most widely used and have led to a well-developed theory concerning existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions.

In contrast, the Weyl fractional derivative occupies a special place due to its intrinsic connection with harmonic analysis and its natural formulation on periodic or unbounded domains. An important early contribution to the development of Weyl fractional calculus is due to K. S. Miller [1], where the analytical foundations of the Weyl fractional derivative were systematically investigated within the framework of integral transforms and harmonic analysis.

A systematic treatment of Weyl fractional calculus is presented in the work of Raina and Koul [2], establishing essential analytical properties of Weyl fractional operators. Despite these advances, boundary value and Cauchy problems involving Weyl fractional derivatives have not been as extensively investigated as those with classical Caputo or Riemann–Liouville derivatives. A pioneering contribution in this direction was made by Sh. A. Alimov [3], who systematically studied the Cauchy problem for the wave equation $u_{tt} + \partial^\alpha u = 0$ with the Weyl fractional derivative ∂^α, establishing solvability in Gevrey classes.

In this paper, we study the Cauchy problem for the fractional diffusion equation:

$$u_t + \partial^\alpha u = f(x)g(t), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad t > 0,$$

subject to the initial condition $u(x, 0) = \varphi(x)$, where ∂^α denotes the Weyl fractional derivative of order $\alpha \in (0, 2)$ with $\alpha \neq 1$, $\varphi(x)$, $f(x)$ and $g(t)$ are given functions.

We establish sufficient conditions for the existence, uniqueness, and continuous dependence of solutions in the Sobolev space H^α. These results demonstrate the well-posedness of evolution equations involving the Weyl fractional derivative and highlight key regularity properties of their solutions.

Literature

1. **K. S. Miller.** *The Weyl fractional calculus.* Fractional Calculus and Its Applications, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, 1975, Volume 457, pp. 80–89.
2. **R. K. Raina, O. P. Koul.** *On Weyl fractional calculus*, Proc. Amer. Math. Soc., 1979.
3. **Sh. A. Alimov.** *On solvability in Gevrey classes for the Cauchy problem for an equation with Weyl fractional derivative.* Doklady Mathematics, 2025 Volume 111, Issue 3, pp. 160–162.

УДК 517.95

An initial-boundary value problem for a strongly degenerate higher-order even equation

Tolipov N. I.[1]
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
nodirjontolipov23098@gmail.com

Boundary value problems for partial differential equations of high even order arise in the description of the oscillations of rods, beams and plates; if the flexural rigidity vanishes at a point of the rod, the corresponding equation degenerates in the spatial variable. Such problems were studied in [1]–[3], while nonlocal (paired) conditions coupling the two endpoints of the interval have so far been analysed only for equations of the *second* order in the spatial variable [4]. The aim of the present work is the statement and the investigation of an initial-boundary value problem combining local and nonlocal conditions for a *strongly* degenerate equation of high even order.

Let $\Omega = \{(x,t):\ 0<x<1,\ 0<t<T\}$. In the domain Ω we consider the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(x^\alpha \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = f(x,t), \tag{1}$$

where $u = u(x,t)$ is the unknown function, $f(x,t)$ is a given function and

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \qquad 0<\alpha<n, \qquad \alpha = \alpha_0 + \varepsilon, \quad \alpha_0 = [\alpha], \quad 0<\varepsilon<1.$$

The line $x=0$ is the line of degeneration of equation (1) and α is its degree. In contrast to the weakly degenerate case $0<\alpha<1$ treated in [1], [2], the admissible range $0<\alpha<n$ allows the degree of degeneration to reach half of the order $2n$ of the equation, so that (1) may be strongly degenerate. The integer part α_0 is here the structural parameter of the problem: it is exactly the number of the orders j at the degenerate end $x=0$ at which a prescribed boundary value must be replaced by a boundedness requirement.

Problem N. *Find a function* $u(x,t)$ *such that*

1) $u_t,\ \dfrac{\partial^j u}{\partial x^j},\ \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\left[x^\alpha \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\right] \in C(\bar\Omega),\ j=\overline{0,n-1};\quad \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\left[x^\alpha \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\right],\ u_{tt} \in C(\Omega)$;
2) *it satisfies equation* (1) *in* Ω;
3) *it satisfies the initial conditions*

$$u(x,0)=\varphi_1(x), \qquad u_t(x,0)=\varphi_2(x), \qquad x\in[0,1]; \tag{2}$$

4) *it satisfies, for* $t \in [0,T]$, *the boundary conditions*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^j u(0,t)}{\partial x^j} + \dfrac{\partial^j u(1,t)}{\partial x^j} = 0, \quad j = \overline{0, n-\alpha_0-1}; \qquad \left|\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right| < \infty, \quad j = \overline{n-\alpha_0, n-1}; \\ \dfrac{\partial^j u(1,t)}{\partial x^j} = 0, \quad j = \overline{n-\alpha_0, n-1}; \\ \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\Big(x^\alpha \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big)\Big|_{x=0} + \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\Big(x^\alpha \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big)\Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{\alpha_0, n-1}, \end{cases} \tag{3}$$

where $\varphi_1(x)$ *and* $\varphi_2(x)$ *are given sufficiently smooth functions.*

The first and the third groups of relations in (3) are nonlocal, since they link the values of the corresponding quantities at $x = 0$ and at $x = 1$; the boundedness conditions reflect the strong degeneration of the equation and replace Dirichlet-type conditions at $x = 0$ for those orders j for which the latter cannot be imposed.

A formal application of the Fourier method to Problem N leads to the spectral problem

$$M[v] \equiv (-1)^n \big(x^\alpha v^{(n)}(x)\big)^{(n)} = \lambda v(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{4}$$

considered in $H = L_2(0,1)$, the domain $D(M)$ of the operator M consisting of the functions satisfying

$$\begin{cases} v^{(j)}(x),\ \big(x^\alpha v^{(n)}(x)\big)^{(j)} \in C[0,1],\ j = \overline{0,n-1}; \qquad v^{(j)}(0) + v^{(j)}(1) = 0,\ j = \overline{0, n-\alpha_0-1}; \\ \Big|\lim\limits_{x\to 0} v^{(j)}(x)\Big| < \infty, \quad v^{(j)}(1) = 0, \qquad j = \overline{n-\alpha_0, n-1}; \\ \big(x^\alpha v^{(n)}\big)^{(j)}\big|_{x=0} + \big(x^\alpha v^{(n)}\big)^{(j)}\big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{\alpha_0, n-1}. \end{cases} \tag{5}$$

The boundedness requirement in (5) is equivalent to the equalities $\big(x^\alpha v^{(n)}\big)^{(j)}\big|_{x=0} = 0$, $j = \overline{0, \alpha_0 - 1}$.

Multiplying (4) by $v(x)$, integrating the obtained identity over $[0,1]$ and integrating by parts with account of (5), we get

$$\lambda \int_0^1 v^2(x)\,dx = \int_0^1 x^{-\alpha}\big[x^\alpha v^{(n)}(x)\big]^2\,dx. \tag{6}$$

Taylor's formula together with the equalities $\big(x^\alpha v^{(n)}\big)^{(j)}\big|_{x=0} = 0$, $j = \overline{0, \alpha_0 - 1}$, gives $x^\alpha v^{(n)}(x) = x^{\alpha_0} g(x)$, whence the integral in the right-hand side of (6) equals $\int_0^1 x^{\alpha_0-\varepsilon} g^2(x)\,dx$ and therefore converges. Consequently $\lambda \geq 0$; moreover, $\lambda = 0$ implies $v(x) \equiv 0$, so that problem (4), (5) may possess non-trivial solutions only for $\lambda > 0$.

The Green's function of problem (4), (5) is sought in the form

$$G(x,s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{a_j\, x^{2n-\alpha-j}}{(n-j)!\,(n-\alpha+1-j)_n} + \sum_{j=1}^n \frac{a_{n+j}\, x^{n-j}}{(n-j)!}, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{b_j\, x^{2n-\alpha-j}}{(n-j)!\,(n-\alpha+1-j)_n} + \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}\, x^{n-j}}{(n-j)!}, & s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{7}$$

where a_j, b_j $(j = \overline{1,2n})$ are unknown functions of s and $(z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1)$ is the Pochhammer symbol. The continuity requirements and the jump condition for $\big(x^\alpha G_x^{(n)}\big)^{(n-1)}$ at

$x = s$ lead to a linear system with the unique solution

$$b_j - a_j = \frac{(-1)^{n+j-1} s^{j-1}}{(j-1)!}, \qquad b_{n+j} - a_{n+j} = \frac{(-1)^{j-1} s^{n-1-\alpha+j}}{(j-1)!\,(j-\alpha)_n}, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

The boundedness conditions give $a_j = 0$ for $j = \overline{n-\alpha_0+1, n}$, and the remaining coefficients are determined uniquely from the paired conditions by explicit recurrence relations. Hence the following statement holds.

Theorem 1. *The Green's function of problem* (4), (5) *exists and is unique.*

Theorem 2. *The operator M with the domain* (5) *is self-adjoint in $L_2(0,1)$; consequently, $G(x,s) = G(s,x)$.*

By the theorem on the equivalence of boundary value problems and integral equations [5], problem (4), (5) is equivalent to the homogeneous Fredholm integral equation of the second kind $v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,s)v(s)\,ds$. Since its kernel is continuous, symmetric and positive, the theory of symmetric integral equations [6] guarantees the existence of a countable set of eigenvalues $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k < \ldots$, $\lambda_k \to +\infty$, whose eigenfunctions $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ form an orthonormal system in $L_2(0,1)$; the system $\left\{x^{\alpha/2} v_k^{(n)}(x)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ is orthonormal as well. Using Bessel's inequality one proves that the series $\sum_k \left[v_k^{(j)}(x)\right]^2/\lambda_k$ and $\sum_k \left(\left[x^\alpha v_k^{(n)}(x)\right]^{(j)}\right)^2/\lambda_k^2$, $j = \overline{0, n-1}$, converge uniformly on $[0,1]$.

The solution of Problem N is sought in the form $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)v_k(x)$. Substituting this series into (1), (2) gives for $u_k(t)$ the Cauchy problem $u_k'' + \lambda_k u_k = f_k(t)$, $u_k(0) = \varphi_{1k}$, $u_k'(0) = \varphi_{2k}$, where $\varphi_{jk} = \int_0^1 \varphi_j v_k dx$, $f_k(t) = \int_0^1 f(x,t)v_k(x)dx$; hence

$$u_k(t) = \varphi_{1k}\cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right) + \frac{\varphi_{2k}}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\left(t\sqrt{\lambda_k}\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^t f_k(\tau)\sin\left[(t-\tau)\sqrt{\lambda_k}\right]d\tau. \tag{9}$$

Theorem 3. *Let $\varphi_1(x)$ satisfy conditions* (5) *and let $[M\varphi_1]^{(j)} \in C[0,1]$, $j = \overline{0, n-1}$, $x^{\alpha/2}[M\varphi_1]^{(n)} \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$, $[M\varphi_1]^{(j)}\big|_{x=0} = 0$, $j = \overline{0, n-\alpha_0-1}$, $[M\varphi_1]^{(j)}\big|_{x=1} = 0$, $j = \overline{n-\alpha_0, n-1}$; let $\varphi_2(x)$ satisfy* (5) *and $M\varphi_2 \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$; and let $f(x,t)$ satisfy the same conditions as $\varphi_2(x)$ with respect to x, uniformly in t. Then the series $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)v_k(x)$ with the coefficients* (9) *is a solution of Problem N.*

Theorem 4. *Problem N cannot possess more than one solution.*

Proof. Let $u(x,t)$ be the difference of two solutions, $\omega(x,t) = -\int_t^{T_0} u(x,\xi)d\xi$, $T_0 \in (0,T]$. Multiplying equation (1) with $f \equiv 0$ by $\omega(x,t)$, integrating over $\{0 < x < 1,\ 0 < t < T_0\}$ and integrating by parts, we observe that, owing to the paired conditions (3), the boundary terms in x cancel pairwise at the two endpoints, and we arrive at $\int_0^1 u^2(x,T_0)dx + \int_0^1 x^\alpha \left[\partial^{2n}\omega(x,t)/\partial x^{2n}\right]_{t=0}^2 dx = 0$, whence $u(x,T_0) \equiv 0$ on $[0,1]$. Since T_0 is arbitrary, $u(x,t) \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$. $\square$

Thus the stated problem is well posed.

References

1. **Urinov A.K., Azizov M.S.** *About an initial boundary problem for a degenerate higher even order partial differential equation.* Sib. Zh. Ind. Mat. – 2023. – V. 26, No. 2. – P. 155–170.

2. **Urinov A.K., Oripov D.D.** *On the solvability of an initial boundary problem for a high even order degenerate equation.* Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. – 2023. – V. 27, No. 4. – P. 621–644.

3. **Urinov A.K., Mamanazarov A.O.** *A mixed problem for a time-fractional space-degenerate beam equation.* Lobachevskii J. Math. – 2025. – V. 46, No. 2. – P. 939–952.
4. **Mamanazarov A., Khalilov K., Kodiraliev A.** *Direct and inverse source problems with non-local boundary conditions for a time-fractional time and space degenerate heat equation.* Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. – 2025. – V. 74. – Art. 162.
5. **Naimark M.A.** *Linear differential operators.* M.: Nauka. – 1969. – 528 p.
6. **Mikhlin S.G.** *Lectures on linear integral equations.* M.: Fizmatlit. – 1959. – 232 p.

УДК 517.95

AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH PAIRED NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS FOR A DEGENERATE HIGH EVEN-ORDER PDE

Tolipov Nodirjon[1]

[1]Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan
nodirjontolipov23098@gmail.com

In the rectangle $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < 1\}$ we consider the degenerate partial differential equation of high even order

$$t^a(1-t)^b \frac{\partial u}{\partial t} + c\,u + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}}\right) = f(x,t), \tag{1}$$

where a, b, c, α are given real numbers, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le a < 1$, $0 \le b < 1$, $c \ge 0$, $0 < \alpha < 1$, $u = u(x,t)$ is the unknown function, and $f(x,t)$ is a given sufficiently smooth function. Equation (1) degenerates simultaneously with respect to the time variable, at both endpoints $t = 0$ and $t = 1$, and with respect to the spatial variable, at $x = 0$, and it additionally contains the lower-order term $c\,u$.

Statement of the problem. Find a function $u(x,t)$ satisfying equation (1) in Ω, the initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

and the paired (linked) boundary conditions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^j u(0,t)}{\partial x^j} + \dfrac{\partial^j u(1,t)}{\partial x^j} = 0, \quad \dfrac{\partial^{n+j} u(1,t)}{\partial x^{n+j}} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}; \\ \left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}\right)^{(j)}\Big|_{x=0} = 0, \ \left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}\right)^{(n+j)}\Big|_{x=0} + \left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}\right)^{(n+j)}\Big|_{x=1} = 0, \ j = \overline{0, n-1}; \end{cases} \tag{3}$$

for $t \in [0,1]$, where $\varphi(x)$ is a given continuous function.

Applying the Fourier method to problem (1)–(3), we arrive at the spectral problem

$$\left(x^\alpha v^{(2n)}(x)\right)^{(2n)} = \lambda\, v(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{4}$$

subject to the boundary conditions obtained from (3) by omitting the t-dependence. Using an energy identity, we show that problem (3)–(4) is self-adjoint and that all its eigenvalues are strictly positive, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \to +\infty$, the eigenfunctions $\{v_k(x)\}$ forming an orthonormal system in $L_2(0,1)$. By the Green's-function method, problem (4) is reduced to a Fredholm integral equation of the second kind with a continuous, symmetric, positive-definite

kernel $G(x,s)$, which is constructed explicitly; its closed form is obtained for $n=1$ and $n=2$, and the symmetry $G(x,s)=G(s,x)$ is established by an auxiliary bilinear identity.

We seek the solution of problem (1)–(3) as the Fourier series $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)v_k(x)$, where the coefficients $u_k(t)$ satisfy, for every $k\in\mathbb{N}$, the degenerate Cauchy problem

$$t^a(1-t)^b u_k'(t)+(c+\lambda_k)u_k(t)=f_k(t),\qquad u_k(0)=\varphi_k,$$

with $\varphi_k=\int_0^1\varphi(x)v_k(x)\,dx$, $f_k(t)=\int_0^1 f(x,t)v_k(x)\,dx$, whose unique solution is found explicitly by means of the Gauss hypergeometric function. On the basis of a series of auxiliary weighted Bessel-type estimates for the Fourier coefficients of a function with respect to the system $\{v_k(x)\}$, we establish the following results.

Theorem 1. *If $\varphi(x)$ and $f(x,t)$ satisfy natural smoothness and consistency conditions, then the series above converges uniformly on $\overline{\Omega}$ together with all the derivatives entering the statement of the problem, and its sum gives the solution of problem (1)–(3).*

Theorem 2. *Problem (1)–(3) cannot possess more than one solution.* The proof relies on an energy-integral identity adapted to the two-sided time degeneracy and completed by a Gronwall-type inequality.

Theorem 3. *The solution satisfies the a priori estimates*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)}\le K_0\Big[\|\varphi(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|f(x,t)\|^2_{L_{2,\rho}(\Omega)}\Big],$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})}\le K_1\Big[\|\varphi^{(2n)}(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}+\|f(x,t)\|_{L_{2,\rho}(\Omega)}\Big],$$

where $\rho(t)=t^{-a}(1-t)^{-b}$, $r(x)=x^\alpha$, and $K_0,K_1>0$ are constants; these estimates entail the continuous dependence of the solution on the given data φ and f.

Thus, for the initial-boundary value problem with paired nonlocal boundary conditions for a degenerate high even-order partial differential equation, existence, uniqueness, and stability of the solution with respect to the given data are established by combining spectral analysis with the Green's-function method.

References

1. Urinov A.K., Oripov D.D. On the solvability of an initial-boundary value problem for a degenerate partial differential equation of high even order. Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2023. Vol. 27, No. 4, pp. 621–644.
2. Urinov A.K., Oripov D.D. On an initial boundary value problem for a degenerate equation of high even order. Ural Mathematical Journal. 2025. Vol. 11, No. 1, pp. 132–144.
3. Mikhlin S.G. Lectures on Linear Integral Equations. M.: Fizmatgiz, 1959. 232 p.
4. Naimark M.A. Linear Differential Operators. M.: Nauka, 1969. 384 p.

UDK 517.95

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER DEGENERATE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION AND SOME PROPERTIES OF THE ASSOCIATED HYPERGEOMETRIC FUNCTION

Tulasheva Y.I.
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
yorqinoytulasheva@gmail.com

Many problems concerning the vibrations of rods, beams, and plates which are crucial in structural mechanics, the theory of stability for rotating shafts, and ship vibrations lead to the fourth-order partial differential equations [1, 2, 3, 4].

In the domain $\Omega = \{(x,y): \ x \in R, \ y \in R, \ y > 0\}$, we consider the Cauchy problem: Find a solution $u(x,y) \in M$ to Equation

$$A_\lambda^\beta(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

satisfying the initial conditions

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \lim_{y\to+0} y^{2\beta} u_y(x,y) = \psi(x), \ x \in R, \tag{2}$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given smooth functions, $0 < 2\beta < 1$, $M = \{u(x,y) \in C_{x,y}^{4,2}(\Omega), \ y^{2\beta}u_y \in C(\Omega \cup (y=0))\}$.

We solved the Cauchy problem $\{(1), (2)\}$ based on the superposition principle and the method of double degree reduction, obtaining the solution in the form [5]

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2\sqrt{y}\eta) G_3(y,\eta;\beta,\lambda) d\eta +$$

$$+ y^{1-2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x + 2\sqrt{y}\eta) G_4(y,\eta;\beta,\lambda) d\eta, \tag{3}$$

where

$$G_3(y,\eta;\beta,\lambda)d\eta =$$

$$= 2k_1 \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(\beta+1/4)} K_1\Big(\beta + \frac{1}{4}; \frac{3}{4}, \frac{1}{2}; -\frac{\eta^4}{4}, -\frac{\lambda^2 y^2}{4}\Big) +$$

$$+ k_1\eta^2 \frac{\Gamma(-1/4)}{\Gamma(\beta-1/4)} K_1\left(\beta - \frac{1}{4}; \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -\frac{\eta^4}{4}, -\frac{\lambda^2 y^2}{4}\right),$$

$$G_4(y,\eta;\beta,\lambda) = 2k_2 \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(5/4-\beta)} K_1\left(\frac{5}{4} - \beta; \frac{3}{4}, \frac{1}{2}; -\frac{\eta^4}{4}, -\frac{\lambda^2 y^2}{4}\right) +$$

$$+ k_2\eta^2 \frac{\Gamma(-1/4)}{\Gamma(3/4-\beta)} K_1\left(\frac{3}{4} - \beta; \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -\frac{\eta^4}{4}, -\frac{\lambda^2 y^2}{4}\right),$$

$k_1 = \frac{\Gamma(\beta+1/2)}{\sqrt{2}\pi}$, $k_2 = \Gamma(1/2-\beta)/(\sqrt{2}\pi)$.

In the solution (3), we utilize the generalized hypergeometric function

$$K_1(a,b,c;\sigma_1,\sigma_2) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(a)_{k-m}(b)_m(c)_m} \frac{{\sigma_1}^m}{m!} \frac{{\sigma_2}^k}{k!}, \tag{4}$$

where a, b, c are real numbers such that $a, b, c \neq 0, -1, -2, ..., -n..., $ and $(a)_k = a(a+1)...(a+k-1)$ is the Pochhammer symbol. This series converges for $|\sigma_1|, |\sigma_2| < \infty$, and can be represented in the form

$$K_1(a,b,c;\sigma_1,\sigma_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{\sigma_2}^k}{(a)_k k!} {}_1F_2(1-a-k; b, c; \sigma_1) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-a)_m}{(b)_m (c)_m} \frac{{\sigma_1}^m}{m!} {}_0F_1(a-m, \sigma_2),$$

where ${}_1F_2(a; b, c; z)$ and ${}_0F_1(a; z)$ are the generalized hypergeometric functions [6].

Lemma 1. If $a, b, c \neq 0, -1, -2, ..., -n...$ then the following differentiation formulas hold for the series (4):

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_1} K_1(a; b, c; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1-a}{bc} K_1(a-1; b+1, c+1; \sigma_1, \sigma_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_2} K_1(a; b, c; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{a} K_1(a+1; b, c; \sigma_1, \sigma_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_1} \left[{\sigma_1}^{c-1} K_1(a; b, c; \sigma_1, \sigma_2) \right] = (c-1)\, {\sigma_1}^{c-2} K_1(a; b, c-1; \sigma_1, \sigma_2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} K_1(a; b, c; \sigma_1, \sigma_2) = -\frac{1}{bc} K_1(a; b+1, c+1; \sigma_1, \sigma_2),$$

$$\left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + b - 1 \right) K_1(a, b, c; \sigma_1, \sigma_2) = (b-1)\, K_1(a, b-1, c; \sigma_1, \sigma_2),$$

$$\left(\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_2} - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \right) K_1(a, b, c; \sigma_1, \sigma_2) =$$

$$= (a-1) K_1(a-1, b, c; \sigma_1, \sigma_2) - (a-1) K_1(a, b, c; \sigma_1, \sigma_2).$$

By applying the differentiation formulas in Lemma 1, it can be shown that the derived solution (3) satisfies the differential equation (1).

Literature

1. **Timoshenko, S.P.** *Vibration Problems in Engineering.* Translated under the title Kolebaniya v inzhenernom dele. *Moscow: Nauka* (1967).
2. **Sitnik S., Karimov Sh.T., Tulasheva Y.I.** *The Cauchy problem for the degenerate beam vibration equation. Journal of Mathematical Sciences (New York, Springer)* Vol.277. **3** December **7** (2023), 458-466.
3. **Bateman G.; Erd'lyi A.** *Higher transcendental functions.* vol.1,2. -M.: Nauka, 1973. - 296 p.

УДК 517.956

Umumlashgan Gellerstedt tenglamasi uchun Bitsadze-Samarskiy tipidagi masala yechimining yagonaligi haqida

Tosheva M. Ch.[1], Xudoynazarov S.S.[2], Yo'ldoshev B. B.[3]
[1,2,3]Termiz iqtisodiyot va servis universiteti, Termiz, O'zbekiston;
b49751318@gmail.com

1. BS_0 **(Bitsadze-Samarskiy) masalasining qo'yilishi.** Faraz qilaylik, D_a - Oy o'qining $0 \leq y \leq ((m+2)a/2)^{2/(m+2)}$ kesmasi, $x \geq 0$, $y > 0$ da $\sigma_a : x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = a^2$ normal egri chiziqning AB yoyi hamda bu yerda $O = O(0,0)$, $A = A(a,0)$, $B = B(0,b)$ [3] umumlashgan Trikomi tenglamasi

$$(\text{sign } y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0 \tag{1}$$

ning

$$OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0 \text{ va } AC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = a$$

xarakteristikalari bilan chegaralangan soha bo'lsin [3].

D_a sohaning yuqori va quyi yarim tekisliklarda yotuvchi qismlarini mos ravishda D_a^+ va D_a^- orqali belgilaymiz [3].

Faraz qilaylik, $y = -k(x - x_0)$ $(x \le x_0,\ 0 \le x_0 \le a)$ to'g'ri chiziq koordinata o'qlarini $(x_0, 0)$ va $(0, kx_0)$ nuqtalarda kesib o'tsin, bu yerda $k = b/a$, $b = ((m+2)a/2)^{2/(m+2)}$.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundan iboratki, (1) tenglama uchun sohaning elliptik qismida Trikomi masalasi [1, 148-b.] qaralayotgan masalaning qo'yilishi bilan ustma-ust tushadi, bunda (1) tenglamaning izlanayotgan $u(x, y)$ yechimi Oy o'qining OB kesmasida va OC xarakteristikada berilgan qiymatlarni qabul qiladi .

Ushbu ish izlanayotgan $u(x, y)$ yechimning mos ravishda Ox va Oy koordinata o'qlaridagi $(x_0, 0)$, $(0, kx_0)$ nuqtalardagi qiymatlarini bog'lovchi Bitsadze-Samarskiy shartlariga ega masalani tadqiq qilishga bag'ishlangan, bu yerda $0 \le x_0 \le a$. Singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy tipidagi masala [2] ishda ham o'rganilgan.

BS_0 **masalasi.** D_a sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y) \in C(\overline{D_a})$ funksiyani topish talab qilinadi:

1) $u(x, y)$ funksiya $C^2(D_a^+)$ sinfga tegishli bo'lib, D_a^+ sohada (1) tenglamani qanoatlantiradi;

2) $u(x, y)$ funksiya D_a^- sohada R_1 sinfidagi umumlashgan yechim hisoblanadi [1, 104-b.];

3) Quyidagi shartlar bajariladi

$$u(x, y)|_{\sigma_a} = \varphi_1(x), \quad 0 \le x \le a; \tag{2}$$

$$u(0, kx) = \mu(x)u(x, 0) + \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le a; \tag{3}$$

$$u(x, y)|_{OC} = \psi(x), \quad 0 \le x \le a/2 \tag{4}$$

bu yerda $\varphi_1(x)$, $\mu(x)$, $\varphi_2(x) \in C[0, a]$, $\psi(x) \in C[0, a/2] \cap C^{1,\delta}(0, a/2)$ - berilgan funksiyalar (δ - silliqlik ko'rsatkichi bo'lib, bunda $0 < \delta < 1$ o'rinli hamda u $\psi'(x)$ funksiyaning Gyolder sinfiga tegishli ekanligini belgilaydi, bu esa regulyar hosilalar mavjudligini kafolatlaydi), shuningdek

$$\psi(0) = 0,\ \varphi_2(0) = 0,\ \mu(x) = x^{\delta_1}\tilde{\mu}(x),\ \varphi_2(x) = x^{\delta_1 - m}\tilde{\varphi}_2(x),$$
$$\delta_1 > m + 1,\ \tilde{\mu}(x), \tilde{\varphi}_2(x) \in C[0, a],$$
$$\varphi_1(x) = (a - x)^{\delta_2}\tilde{\varphi}_1(x),\ \delta_2 > 1/2,\ \tilde{\varphi}_1(x) \in C[0, a].$$

4) $y = 0$, $0 \le x \le a$ buzilish kesmasida quyidagi ulanish sharti o'rinli bo'ladi

$$\lim_{y \to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 < x < a, \tag{5}$$

bunda ushbu limitlar $x \to 0$, $x \to a$ bo'lganda birdan kichik tartibli maxsuslikka ega bo'lishi mumkin.

BS_0 **masalasi yechimining yagonaligi.** O'zgartirilgan Koshi masalasining yechimidan [3, 34-b.] hamda (3) chegaraviy shartidan quyidagini hosil qilamiz

$$\nu(x) = \gamma D_{0,x}^{1-2\beta}\tau(x) + \psi_1(x), \quad 0 < x < a, \tag{6}$$

bu yerda

$$\gamma = \frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta}, \quad \psi_1(x) = -\gamma(\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta))x^{\beta}D_{0,x}^{1-\beta}\psi(x/2)$$

, $D_{0,x}^{l}$ - Liuvill ma'nosidagi kasr tartibli differensiallash operatori [1, 18-b.]

(6) munosabat $y = 0$ o'qining $(0, a)$ intervaliga D_a^- sohadan keltirib chiqarilgan noma'lum $\tau(x)$ va $\nu(x)$ funksiyalar orasidagi birinchi funksional munosabat hisoblanadi.

BS masalasi uchun A.V. Bitsadzening ekstremum prinsipining [4, 301-b.] analogi quyidagicha bo'ladi .

1-Teorema. $\varphi_2(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, shartlar bajarilganda BS masalasining $u(x, y)$ yechimi yopiq $\overline{D}_a^+$ sohada o'zining eng katta musbat qiymatini yoki eng kichik manfiy qiymatini faqatgina σ_a egri chiziq nuqtalarida qabul qilishi mumkin.

$$0 < \mu(x) < 1$$

Teoremaning isboti [2] ishdagi usul bilan amalga oshiriladi.

Adabiyotlar

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М., 1985. - 304 с.
2. **Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х.** *Задача с локальными и нелокальными условиями на границе области эллиптичности для уравнения смешанного типа* // Известия вузов. Математика, 2021, №12, с.80-93.
3. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005. - 224 с.
4. **Бицадзе А.В.** *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М., 1981. - 448 с.

UDC 517.95

A Boundary Value Problem for a one-dimensional Space-Time Fractional Convection-Diffusion Equation involving the Generalized Caputo-Prabhakar fractional derivative

Tursunova E. G.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
tursunova.ergashoy.gayratjonqizi@gmail.com

This paper focuses on developing methods to obtain accurate analytical approximations for the solutions of fractional sub-diffusion equations, particularly the ultra-slow diffusion model involving a time-fractional derivative $0 < \beta_2 < 1$ and $1 < \beta_1 < 2$, which exhibits even slower diffusion behavior than power-law sub-diffusion and is widely observed in various natural and engineering applications. In this work, we study the one-dimensional STFADE with a source term

$$ {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma_1,\delta} z(\rho,t) - a\, {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_2,\gamma_2,\delta} z(\rho,t) = {}_0^R D_\rho^\beta z(\rho,t) + s(\rho,t), \tag{1}$$

$$z(0,t) = z(1,t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$z(\rho,0) = \phi(\rho), \quad z_t(\rho,0) = \phi_1(\rho), \quad 0 < \rho < 1,$$

in domain $\omega = (0,1) \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, where $0 < \beta_2 < 1$ and $1 < \beta_1 < 2$ is a parameters describing the order of the fractional derivative in the time direction and $1 < \beta < 2$ describes the order of the fractional derivative space direction. ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_i,\gamma_i,\delta} z\,(\rho,t)$ is the Prabhakar fractional derivative operator α with parameters $\beta_i, \gamma_i, \delta$, which is defined by [1]

$$ {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma_1,\delta} z\,(\rho,t) = {}^{P}I_{0t}^{\alpha,2-\beta_1,-\gamma_1,\delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} z\,(\rho,t)\,, \tag{2}$$

$$ {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_2,\gamma_2,\delta} z(\rho,t) = {}^{P}I_{0t}^{\alpha,1-\beta_2,-\gamma_2,\delta} \frac{\partial}{\partial t} z(\rho,t), \tag{3} $$

and the space fractional derivative D_ρ^β is the Riemann-Liouville fractional derivative operator of order β defined by

$$ D_\rho^\beta z(\rho,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(2-\beta)} \dfrac{d^2}{d\rho^2} \displaystyle\int_0^\rho (\rho-\sigma)^{1-\beta} z(\sigma,t)\, d\sigma, & 1<\beta<2, \quad 0<\sigma<\rho, \\ \dfrac{\partial^2 z(\rho,t)}{\partial \rho^2}, & \beta = 2. \end{cases} \tag{4} $$

Theorem 1. For every $s(\rho,t) \in C_{\beta_i,\beta}^{(1),(2)}(\omega)$ and $\phi(\rho) \in C(0,1)$, the regular solution $z(\rho,t) \in C_{\beta_i,\beta}^{(1),(2)}(\omega)$ of the boundary value problem (1) can be represented in the form

$$ \begin{aligned} z(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Bigg(& \phi_m + \phi_m(-\lambda_m) t^{\beta_1} \Gamma(\gamma_1) E_2 \left(\begin{array}{c} \gamma_1, 1, \gamma_1; 0, 1; \\ \beta_1, \alpha, \beta_1+1; \gamma_1, \gamma_1; 1, 1; \end{array} \middle| \begin{array}{c} (-\lambda_m) t^{\beta_1} \\ \delta t^\alpha \end{array} \right) \Bigg) \\ & + \phi_m a(-\lambda_m) t^{\beta_3+\beta_1} \\ & {}_3E_1 \left(\begin{array}{l} \gamma_3, \gamma_1, 1, \gamma_3+\gamma_1; 1, 1, 2; \\ \beta_3, \beta_1, \alpha, \beta_3+\beta_1+1; \gamma_3, \gamma_1, \gamma_3+\gamma_1; 1, 1; 1, 2; 1, 1 \end{array} \middle| \, at^{\beta_3};\ (-\lambda_m) t^{\beta_1};\ \delta t^\alpha \right) \\ & + \phi_{1m} t\, e_{1,-\alpha}^{1,2}(\delta t^\alpha) + \phi_{1m} a t^{\beta_3+1} \Gamma(\gamma_1)\, {}_2E_2 \left(\begin{array}{c} \gamma_3, 1, \gamma_3; 0, 1; \\ \beta_3, \alpha, \beta_3+2; \gamma_3, \gamma_3; 1, 1; \end{array} \middle| \begin{array}{c} at^{\beta_3} \\ \delta t^\alpha \end{array} \right) \\ & + \phi_{1m}(-\lambda_m) t^{\beta_1+1} \Gamma(\gamma_1)\, {}_2E_2 \left(\begin{array}{c} \gamma_1, 1, \gamma_1; 0, 1; \\ \beta_1, \alpha, \beta_1+2; \gamma_1, \gamma_1; 1, 1; \end{array} \middle| \begin{array}{c} (-\lambda_m) t^{\beta_1} \\ \delta t^\alpha \end{array} \right) \\ & + \phi_{1m} a(-\lambda_m) t^{\beta_3+\beta_1+1} \\ & {}_{\times 3}E_1 \left(\begin{array}{l} \gamma_3, \gamma_1, 1, \gamma_3+\gamma_1; 1, 1, 3; \\ \beta_3, \beta_1, \alpha, \beta_3+\beta_1+2; \gamma_3, \gamma_1, \gamma_3+\gamma_1; 1, 2; 1, 2; 1, 1; \end{array} \middle| \, at^{\beta_3}; (-\lambda_m) t^{\beta_1}; \delta t^\alpha \right) \\ & + \int_0^t (t-z)^{\beta_1-1} s_m(z)\, dz \\ & {}_{\times 3}E_1 \left(\begin{array}{l} \gamma_3, \gamma_1, 1, \gamma_1; 1, 1, 1; \\ \beta_3, \beta_1, \alpha, \beta_1; \gamma_3, \gamma_1, \gamma_1; 1, 1; 1, 1; 1, 1; \end{array} \middle| \, a(t-z)^{\beta_3}; (-\lambda_m)(t-z)^{\beta_1}; \delta(t-z)^\alpha \right) \\ & \times \rho^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(-\lambda_m \rho^\beta\right). \end{aligned} \tag{5} $$

Here, $E_2(\cdot)$ - is the bivariate Mittag-Leffler type function [2], ${}_3E_1(\cdot)$ is the new three-variable Mittag-Leffler type function [3]; ϕ_m, ϕ_{1m}, $s_m(z)$ are decomposition coefficients of functions $\phi(\rho)$ and $s(\rho,t)$, respectively, on the basis of functions $P_m(\rho,\lambda_m) = \rho^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(\lambda_m \rho^\beta\right)$ $(m = 1, 2, ...)$, $\beta_3 = \beta_1 - \beta_2$ and $\gamma_3 = \gamma_1 - \gamma_2$.

References

1. **Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Z.** *Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications.* Applied Mathematics and Computation. **242** (2014), pp 576-589.
2. **Karimov E.T., Hasanov A.** *On a boundary-value problem in a bounded domain for a time-fractional diffusion equation with the Prabhakar fractional derivative.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. **111** (3),(2023), pp 39-46.
3. **Rafiqov A., Tursunova E.** *The Cauchy problem for a differential equation with several Prabhakar fractional derivatives.* Bull. Inst. Math. **8** (6),(2025), pp 178-184.

UDK 517.956.3

The fundamental solution to a wave equation with a fractional derivative involving a Bessel function in the kernel

Usmonov D. A. [1]
[1]Fergana State Univeristy, Fergana, Uzbekistan;
dusmonov909@gmail.com

Let Ω be a rectangular domain: $\Omega = \{(t,x):\ t>0,\ -\infty<x<+\infty\}$. We formulate the Cauchy problem for the following sub-diffusion equation:

$$ {}^{BRL}D_{0t}^{\alpha,\gamma}G(t,x) - G_{xx}(t,x) = 0. \tag{1}$$

Here α,γ are given real numbers such that $1<\alpha<2$,

$$ {}^{BRL}D_{0t}^{\alpha,\gamma}g(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2}+\gamma^2\right){}^{B}I_{0t}^{2-\alpha,\gamma}g(t),\ t>0$$

is the fractional derivative of order α with a Bessel function in the kernel [1],

$$ {}^{B}I_{0t}^{\beta,\gamma}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-z)^{\beta-1}\bar{J}_{(\beta-1)/2}[\gamma(t-z)]g(z)dz$$

is the fractional integral operator of order β with a Bessel function in the kernel, $\bar{J}_v(z)$ is the Bessel-Clifford function defined by the equalities

$$\bar{J}_v(z) = \Gamma(v+1)(z/2)^{-v}J_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{k!(v+1)_k},$$

where $(z)_k$ is the Pochhammer symbol, $\Gamma(x)$ is the Euler gamma function, and $J_v(x)$ is the Bessel function of the first kind of order v.

Definition 1. The fundamental solution of equation (1) in the domain Ω is defined as a function $G(t,x)$ that satisfies the following initial conditions.

$$\lim_{t\to 0}{}^{B}I_{0t}^{2-\alpha,\gamma}G(t,x) = 0,\quad \lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}{}^{B}I_{0t}^{2-\alpha,\gamma}G(t,x) = \delta(x),\quad -\infty<x<+\infty. \tag{2}$$

Here $\delta(x)$ - is the Dirac delta function, defined by the following equality [2]:

$$\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

$\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \varphi(x) \equiv 0$ outside the interval $[a_\varphi, b_\varphi]\}$.

Theorem 1. The fundamental solution of the equation (1) takes the form

$$G(t,x) = \frac{t^{\alpha/2-1}}{2} E_{12}\left(\begin{matrix} -\frac{\alpha}{4}, 0, \frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}; \\ -\frac{\alpha}{4}, 1, \frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; 1, 1; 1, 1 \end{matrix} \middle| -\frac{|x|}{t^{\alpha/2}}, -\frac{\gamma^2 t^2}{4} \right),$$

where $E_{12}(x,y)$ is the bivariate Mittag-Leffler type function defined as [3] :

$$E_{12}\left(\begin{matrix} \alpha_1, \beta_1, \delta_1; \\ \alpha_2, \beta_2, \delta_2; \alpha_3, \delta_3; \alpha_4, \delta_4; \beta_3, \delta_5; \end{matrix} \middle| x; y \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 n + \beta_1 m + \delta_1)\, x^n y^m}{\Gamma(\alpha_2 n + \beta_2 m + \delta_2)\, \Gamma(\alpha_3 n + \delta_3)\, \Gamma(\alpha_4 n + \delta_4)\, \Gamma(\beta_3 m + \delta_5)},$$

$$(x, y, \alpha_l, \beta_i, \delta_j \in \mathbb{R}; \min\{\alpha_l, \beta_i, \delta_j\} > 0; (l = \{1, \ldots, 4\}, i = \{1,2,3\}, j = \{1, \ldots, 5\}))\,,$$

in which the double series converges for $x, y \in \mathbb{R}$, if $\Delta_1 > 0$, and $\Delta_2 > 0$. Here $\Delta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1$, $\Delta_2 = \beta_2 + \beta_3 - \beta_1$.

References

1. **Urinov A.K.** *Generalizing Riemann-Liouville fractional order integrals and derivatives using Bessel's functions.* Bull. Inst. Math. - 2022. - Vol. 5, No. 1. - pp. 108–155. [In Russian]
2. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differen-tial Equations.* North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Elsevier, Amsterdam. - 2006. - 523 p.
3. **Turdiev Kh.N., Usmonov D.A.** *The Goursat's problem for generalized (fractional) hyperbolic-type equation.* Uzbek Mathematical Journal. - 2025. - Vol. 69, No. 2. - pp. 300–306. DOI: 10.29229/uzmj.2025-2-29

UDK 517.956.3

The Goursat problem for a generalized (fractional) hyperbolic-type equation with Caputo derivatives of different orders

Usmonov D. A. [1], Nematjonov F.F. [2]
[1]Fergana State Univeristy, Fergana, Uzbekistan;
[1]dusmonov909@gmail.com;
[2]Fergana Presidential School, Fergana, Uzbekistan;
[2]fnematjonov31@gmail.com

Let Ω be a rectangular domain: $\Omega = \{(t,x) :\ 0 < t < T,\ 0 < x < l\}$. In the domain Ω we consider the following fractional differential equation:

$$D_{0t}^{\alpha} u_x(t,x) - a\, u_x(t,x) - b\, D_{0t}^{\beta} u(t,x) = f(t,x)\,, \tag{1}$$

where $a, b \in \mathbb{R}$ are given constants, $f(t,x)$ is a given function, and α, β are given real numbers such that $1 > \alpha > \beta > 0$. Here D_{0t}^{γ} $(0 < \gamma < 1)$ is the Caputo fractional derivative of order γ [1], defined by

$$D_{0t}^{\gamma} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{g'(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma}}\, d\tau = J_{0t}^{1-\gamma} g'(t)\,, \quad t > 0,$$

$$J_{0t}^{\gamma} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} g(\tau)\, d\tau, \quad \gamma > 0,$$

is the Riemann–Liouville fractional integral operator of order γ, and $\Gamma(x)$ is the Euler gamma function.

Problem (Goursat). Find a function $u(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $u_x(t,x)$, $D_{0t}^{\alpha} u(t,x)$, $D_{0t}^{\alpha} u_x(t,x) \in C(\Omega)$, that satisfies equation (1) in the domain Ω and the Goursat conditions

$$u(0,x) = \tau(x), \quad u(t,0) = \varphi(t), \quad \varphi(0) = \tau(0), \quad 0 \le x \le l, \ \ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

where $\varphi(t)$, $\tau(x)$ are given functions satisfying the compatibility condition $\varphi(0) = \tau(0)$.

References

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Elsevier, Amsterdam. - 2006. - 523 p.

UDC 517.95

Initial-inverse problem for a generalized hyperbolic-type equation with the Prabhakar fractional derivative

Usmonov D. A.[1], Turdiev Kh. N.[1]
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
dusmonov909@gmail.com, xurshidjon2801@gmail.com

We consider the following a generalized hyperbolic-type equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\, {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t,x) + \lambda u(t,x) = f(x), \tag{1}$$

in a domain $\Omega = \{(t,x) : 0 < t < b, 0 < x < a\}$. Here $u(t,x)$, $f(x)$ are unknown functions and

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t,x) = I_{0t}^{\alpha,1-\beta,-\gamma,\delta} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)$$

represents regularized Prabhakar fractional derivative [1] and

$$I_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} g(t) = \int_0^t (t-z)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[\delta(t-z)^{\alpha}\right] g(z)\, dz, \quad t > 0$$

represents Prabhakar fractional integral [2]. We note that above-given definitions are valid for α, β, γ, δ, λ, a, $b \in \mathbb{R}$, such that $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $a > 0$ and $b > 0$.

Here $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ is the generalized Mittag-Leffler (Prabhakar) function (see [2])

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_m}{\Gamma(\alpha m + \beta)} \frac{z^m}{m!}.$$

We note that at $\beta = 1$, $\delta = 0$, Eq. (1) becomes classical hyperbolic-type equation:

$$u_{tx}(t,x) + \lambda u(t,x) = f(x).$$

Problem D**.** To find a triplet of functions $\{u(t,x), \varphi(x), f(x)\}$, satisfying:

i) regularity conditions $u(t,x)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}u(t,x) \in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial}{\partial x}{}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u(t,x) \in C(\Omega)$, $f(x) \in C[0,a]$;

ii) Eq. (1) in Ω;

iii) the initial condition

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le a;$$

iv) the boundary condition

$$u(t,0) = \psi(t), \quad 0 \le t \le b;$$

v) the over-determination conditions

$$u(t_1,x) = h_1(x), \quad u(t_2,x) = h_2(x), \quad 0 \le t \le a,$$

where $\psi(t)$, $h_1(x)$ and $h_2(x)$ are given functions, such that $h_j(0) = \psi(t_j)$, $j = \overline{1,2}$, $0 < t_1 < t_2 \le b$.

Equations with the Prabhakar derivative were discussed in [3]–[6].

References

1. **D'Ovidio M., Polito F.** *Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions.* Theory Probab. Appl., 2018, Volume 62, Issue 4, pp. 552–574.

2. **Prabhakar T.R.** *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel.* Yokohama Math. J., 1971, Volume 19, pp. 7–15.

3. **Turdiev Kh., Usmonov D.** *The Goursatєв Ъ^{TM}s problem for generalized (fractional) hyperbolic-type equation.* Uzbek Mathematical Journal, 2025, Volume 69, Issue 2, pp. 300–306.

4. **Karimov E., Kerbal S., Turdiev Kh.** *Direct and inverse problems with a dynamical condition for the sub-diffusion equation involving the Hilfer-Prabhakar integral-differential operator.* Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser., 2026, Volume 75, Issue 35, pp. 1–15.

5. **Karimov E., Turdiev Kh., Usmonov D.** *Fractional generalization of hyperbolic-type equation and bivariate, trivariate Mittag-Leffler type functions.* Arab. J. Math., 2026, Volume 15, pp. 1215–1232.

6. **Karimov E., Usmonov D., Mirzaeva M.** *Greenєв Ъ^{TM}s function and solution representation for a boundary value problem involving the Prabhakar fractional derivative.* Fractional Calculus and Applied Analysis, pp. 1–29.

УДК 517.956.6

Uchinchi tartibli aralash tipdagi tenglamaning bir sinfi uchun chegaraviy masalalar

Usmonov Baxtiyor Zoxirovich
Samarqand davlat pedagogika instituti;
bakhtiyer.usmanov@mail.ru

shbu ishda aralash tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun muhim hisoblangan umumlashgan Trikomi masalasining qo'yilishi va uning korrektligi o'rganilgan. Differensial tenglamalar nazariyasida buziladigan va aralash tipdagi tenglamalarni tadqiq etish zamonaviy matematikaning, xususan, gaz dinamikasi, plazma fizikasi va qobiqlar nazariyasining amaliy masalalarini modellashtirishda dolzarb yo'nalishlardan biri hisoblanadi.

Tezisda elliptik va giperbolik qismlardan iborat bo‘lgan, murakkab geometriyaga ega$D$ sohasida [1] tenglama ko‘rib chiqilgan. Elliptik soha D_1 silliqlik shartlarini hamda muayyan geometrik cheklovlarni (jumladan, Gyolder shartini) qanoatlantiruvchi Jordan yoyi σ va o‘qidagi AB kesmasi bilan chegaralangan. Giperbolik soha D_2 esa tenglamaning xarakteristikalari bilan qoplangan. Masalaning qo‘yilishida AB o‘tish chizig‘ida [2] ulanish shartlarining berilishi, shuningdek, soha chegaralarida [3-6] chegaraviy shartlarning, xususan, normal hosila va berilgan funksiyalarning maxsuslik xarakterini hisobga oluvchi shartlarning qo‘yilishi masalaning umumlashgan xarakterini belgilaydi..

Ushbu

$$0 \equiv \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} + u_{yy}), & y > 0, \\ (a\frac{\partial}{\partial x} + c)(u_{xx} - u_{yy}), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda $a,\ \ c \in R\backslash\{0\}\,,\ \ R = (-\infty, +\infty)$.

(x, y) tekisligida $y > 0$ bo‘lganda uchlari $A(-1, 0),\ \ B(1, 0)$ nuqtalarda bo‘lgan σ oddiy Jordon yoyi va x o‘qida AB kesma bilan chegaralangan bir bog‘lamli sohani D_1 deb belgilaymiz. D_2 deb x o‘qida AB kesma va $y < 0$ bo‘lganda [1] tenglamani $C(0, -1)$ nuqtadan chiquvchi AC : $x + y = -1$, BC : $x - y = 1$ xarakteristikalari bilan chegaralangan sohani belgilaymiz, $D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup AB$, $AB = \{(x, y) :\ \ -1 < x < 1,\ \ y = 0\}$.

σ egri chiziq quyidagi shartlarni bajarsin:

1) Har bir $x = const$ to‘g‘ri chizi σ egri chiziq yoyini bitta nuqtada kesib o‘tsin;

2) σ ergi chiziqning parametrik tenglamasi $x(s),\ y(s)$ bo‘lib, bir vaqtda o‘zida nolga teng bo‘lmagan uzluksiz hosilalarga $x'(s),\ y'(s)$ ega bo‘lsin, hamda ikkinchi tartibli hosilalari $0 \le s \le l$ intervalda $\kappa\,(0 < \kappa < 1)$-tartibli Gyolder shartini qanoatlantirsin. Bu yerda $l-$butun σ egri chiziq uzunligi, $s-B\,(1, 0)$ nuqtadan boshlab hisoblangan σ egri chiziq yoyini uzunligi;

3) σ egri chiziq

$$\sigma_0 : x^2 + y^2 = 1, \quad y \ge 0$$

normal konturning yetarlicha kichik BB' va AA' yoylari bilan tugasin;

4) Har bir $y = c, \quad 0 \le c < h$ to‘g‘ri chiziq σ bilan ikkita nuqtada kesishadi, $y = h$ to‘g‘ri chiziq esa σ bilan $N(0, h)$ bitta umumiy nuqtaga (urinish nuqtasi) ega bo‘lsin. σ ning AN va BN qismlarini mos ravishda σ_1 va σ_2 orqali belgilaymiz.

$C_\theta^k(M)$orqali Msohada θ ga nisbatan $k-$tartibgacha o‘zining xususiy hosilalari bilan uzluksiz bo‘lgan funksiyalar sinfini belgilaymiz.

D sohada [1] tenglama uchun umumlashgan Trikomi masalasini o‘rganamiz.

Masala T. D sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ funksiya topilsin:

$$1)u(x, y) \in C(\overline{D}),\ u(x, y) \in C^1(D_1 \cup \bar{\sigma}_1) \cap C^1(D_2 \cup \overline{AC})\ ;$$

2) $u(x, y) \in C_x^3(D_1 \cup D_2), \quad u \in C_y^2(D_2), \quad u_{xyy} \in C(D_1 \cup D_2)$ va $D_j\ (j = 1, 2)$ sohalarda [1] tenglamani qanoatlantirsin;

3) AB intervalda quyidagi

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to -0} u_y(x, y) = \alpha_2(x) \lim\limits_{y \to +0} u_y(x, y) + \int_0^x \gamma\,(t)\,u\,(t, 0)\,dt + \beta_2(x), \quad (x, 0) \in AB \end{cases} \tag{2}$$

ulash shartlari bajarilsin;

4) $u(x, y)$ funksiya quyidagi

$$\Big\{ u(x, y)|_\sigma = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}, \tag{3}$$

$$\left\{ \frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{\sigma_1} = g(s), \quad \frac{l}{2} \le s \le l, \right. \tag{4}$$

$$\left\{ u(x,y)|_{AC} = \psi_1(x), \qquad -1 \le x \le 0, \right. \tag{5}$$

$$\left\{ \frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{AC} = \psi_2(x), \quad -1 \le x \le 0 \right. \tag{6}$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $n-$ichki normal, $s-B\,(1,0)$ nuqtadan boshlab hisoblangan σ egri chiziq yoyini uzunligi, $l-$butun σ egri chiziq uzunligi, $\varphi(s),\ g(s),\ \ \psi_j(x)\ (j=1,2)$ $-$belgilangan funksiyalar bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\left\{ \varphi(l) = \psi_1(-1), \right. \tag{7}$$

$$\left\{ \ \alpha_2(x),\ \beta_2(x) \in C(\overline{AB}) \cap C^2(AB), \right. \tag{8}$$

$$\left\{ \varphi(\xi(s),\eta(s)) = \eta^2(s)\varphi_1(\xi(s),\eta(s)),\ \ \varphi_1(s) \in C\,[0,l]\,, \quad g(s) \in C^2\left(\tfrac{l}{2}, l\right), \right. \tag{9}$$

$$\left\{ \psi_1(x) \in C^1\,(-1,0] \cap !^3(-1,0), \quad \psi_2(x) \in C^1\,[-1,0] \cap !^2(-1,0), \right. \tag{10}$$

$\psi_1'\left(\frac{x-1}{2}\right)$ funksiya $x \to 1$ da birdan kichik tartibda cheksizlikga ega, $x \to 1$ da
esa chegaralangan. $g(s)$ funksiya $s \to l$ da birdan kichik maxsuslikka ega, $s \to l/2$ da chegaralangan.

Teorema . Agar [7] - [10] shartlar qondirilsa, u holda D sohada T masalani yagona regulyar yechimi mavjud.

Литература

1.**Исломов Б.И., Усмонов Б.З.** *Аналог задачи Геллерстедта для одного класса уравнения третего порядка эллиптико-гиперболического типа.* // Узбекский математический журнал. 2017. № 4. С. 51-57 .

2. **Усмонов Б.З.** *Обобщения задачи Трикоми для одного класса уравнения третего порядка эллиптико-гиперболического типа с разрывными условиями.* // Научный вестник Бухарского государственного университета, 2019. №4. С.

3. **Islomov B. I., Usmonov B.** *Nonlokal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type.* // "Lobachevski Journal of Mathematics". 2020. Vol. 41. No 1. pp. 32-38. DOI: 10. 1134/ S1995080220010060.

UDC 517.95

Ikkinchi tartibli singulyar koeffitsiyent qatnashgan parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun 3-tur integral shartli masala haqida

Xalilov Q. S.[1], Xolmatova R. X.[1]
[1]Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston;
qsxalilov@gmail.com, xabibullayevarobiyaxon575@gmail.com

Mazkur ishda ikkinchi tartibli parabolo-giperbolik tipdagi singulyar koeffitsient qatnashgan tenglama uchun integral shartli masala bayon qilingan. Bunday integral shartli masalalar tadqiqotchilar tomonidan qiziqish bilan o‘rganib kelinadi [1-4].

xOy tekisligining $x = 0,\ y = 1,\ x = 1$ to‘g‘ri chiziqlar hamda tor tebranish tenglamasining $x + y = 0,\ x - y = 1$ xarakteristikalari bilan chegaralangan chekli sohani D deb va ushbu $D_1 = D \cap (y > 0),\quad D_2 = D \cap (y \le 0),\ AB = \{(x,0) : 0 \le x \le 1\},\quad AE = \{(x,y) : y = -x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ belgilashni kiritaylik.

Ushbu

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda u = 0, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - \dfrac{2\beta}{y} u_y = 0, & (x,y) \in D_2 \end{cases} \tag{1}$$

tenglamani D sohada qaraylik. Bunda (1) tenglama D_1 sohada parabolik tipga, D_2 sohada esa giperbolik tipga tegishli, $AB = D \cap (y = 0)$ tip o‘zgarish chizig‘i bo‘lib, λ – haqiqiy son.

Quyidagi masalani qaraylik.

Masala. Shunday $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^2_{x,y}(D_2)$ funksiya topilsinki, u $D_1 \cup D_2$ sohada (1) tenglamaning regulyar yechimi mavjud hamda

$$\int_0^1 u(x,y)\,dx = \int_0^y u(0,t)\,dt + \mu_1(y), \quad 0 \le y \le 1;$$

$$u(1,y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le 1;$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2};$$

$$\lim_{y \to +0} u(x,y) = \lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u(x,y), \quad 0 < x < 1$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\psi(x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Qo‘yilgan masalaning bir qiymatli yechilishi integral tenglamalar nazariyasi yordamida tadqiq qilinadi.

Adabiyotlar ro’yxati

1. **Уринов А.К., Халилов К. С.** *Об одной нелокальной задаче для параболо-гиперболических уравнений* // Доклады АМАН. – Нальчик. 2013. Т.15. №1. – С. 24-30.

2. **Уринов А.К., Халилов К.С.** *Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения* // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. –Ташкент. 2014. №2. – С. 6-9.

3. **Уринов А.К., Халилов К.С.** *О некоторых неклассических задачах для одного класса параболо-гиперболических уравнений* // Доклады АМАН. – Нальчик. 2014. Т.16. № 4. – С. 42-49.

4.**Xalilov Q.S., Xolmatova R.X.***Parabolo-giperboliktipdagi tenglama uchun 3-tur integral shartli masala haqida* // Buxoro davlat universitet ilmiy axboroti.-2026. №6. - B.146-152.

УДК 517.956

Aralash tipdagi tenglama uchun nolokal shartli masala yechimining yagonaligi haqida.

Xudoynazarov S.S.[1], Xo‘jayeva H. F.[2], Begaliyev B.N.[3]

[1,2,3]Termiz iqtisodiyot va servis universiteti, Termiz, O‘zbekiston;

TG_0 masalasining qo‘yilishi.

Faraz qilaylik, D — xOy tekisligining $y > 0$ da uchlari $A(-1,0)$ va $B(1,0)$ nuqtalarda bo‘lgan $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ normal egri chiziq bilan, $y < 0$ da esa

$$(\text{sign } y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

tenglamaning AC va BC xarakteristikalari bilan chegaralangan chekli bir bog’lamli sohasi bo‘lsin. Bu yerda m — musbat o‘zgarmas son.

D sohaning mos ravishda $y > 0$ va $y < 0$ yarim tekisliklarda yotuvchi qismlarini D^+ va D^- orqali, AC va BC xarakteristikalarning $y = 0$ o‘qining $I = (-1,1)$ intervaliga tegishli bo‘lgan biror c soni uchun $E(c,0)$ nuqtadan chiquvchi (1) tenglama xarakteristikalari bilan kesishish nuqtalarini esa mos ravishda C_0 va C_1 deb belgilaymiz.

S. Gellerstedt [1, 186-b., 201-b.] (1) tenglama uchun F. Trikomi shunday masalalarni tadqiq qilganki, ularning qo‘yilishida D sohaning giperbolik qismida qiymatlar izlanayotgan yechimning turli oilaga tegishli xarakteristikalarning ikkita bo‘lagida, ya’ni EC_0 va EC_1 yoki AC_0 va BC_1 larda beriladi. Bunda D sohaning elliptik qismida chegaraviy qiymatlar σ_0 normal egri chiziqda beriladi. Ushbu ishda qaralayotgan masala Gellerstedt masalasidan shu bilan farq qiladiki, unda izlanayotgan yechim qiymatlari bitta oilaga tegishli xarakteristikalarda, ya’ni AC_0 chegara xarakteristikasida va unga parallel bo‘lgan EC_1 ichki xarakteristikada beriladi.

TG_0 masalasi. D sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y) \in C(\overline{D})$ funksiyani topish talab qilinadi:

1. $u(x,y)$ funksiya $C^2(D^+)$ sinfga tegishli bo‘lib, D^+ sohada (1.1.1) tenglamani qanoatlantiradi;

2. $u(x,y)$ funksiya D^- sohada R_1 sinfidagi umumlashgan yechim hisoblanadi [1, 104-b.];

3. AB buzilish intervalida quyidagi ulanish sharti o’rinli bo’ladi

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\}, \tag{2}$$

bunda ushbu limitlar $x \to \pm 1$, $x \to c$ bo’lganda birdan kichik tartibli maxsuslikka ega bo’lishi mumkin;

4. ixtiyoriy $x \in \overline{I}$ uchun quyidagi shartlar bajariladi

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1,1]; \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [-1,(c-1)/2]; \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{EC_1} = \psi_1(x), \quad x \in [c,(c+1)/2]; \tag{5}$$

bu yerda $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ — berilgan funksiyalar bo‘lib, quyidagilar o’rinli

$$\varphi(x) \in C[-1,1] \cap C^{0,\alpha_0}(-1,1), \quad \psi_0(x) \in C[-1,(c-1)/2] \cap C^{1,\alpha_0}(-1,(c-1)/2),$$

$$\psi_1(x) \in C[(c+1)/2,1] \cap C^{1,\alpha_0}((c+1)/2,1), \quad \alpha_0 \in (0,1),$$

$$\varphi(x) = (1-x^2)\varphi(x), \text{ bu yerda } \varphi(x) \in C^{0,\alpha_0}[-1,1] \cap C^{0,\alpha_0}(-1,1), \quad \psi_0(-1) = 0, \quad \psi_1(c) = 0.$$

Shuni ta’kidlaymizki, (3) shart σ_0 egri chiziqda berilgan Dirixle sharti hisoblanadi, (4) va (5) shartlar esa mos ravishda chegara xarakteristikasi AC_0 va ichki xarakteristika EC_1 da berilgan Gellerstedt shartlaridir. $c = -1$ yoki $c = 1$ bo’lganda TG_0 masalasidan Trikomi masalasi [1, 128-b.] kelib chiqadi.

2. TG_0 **masalasi yechimining yagonaligi.** D^- sohada (1) tenglama uchun quyidagi boshlang'ich ma'lumotli Koshi masalasining yechimini beruvchi Darbu formulasidan

$$u(x,0)=\tau(x),\quad x\in\overline{I};\quad \lim_{y\to-0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in I,$$

(4) va (5) chegara shartlarini inobatga olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\nu(x)=\gamma D^{1-2\beta}_{-1,x}\tau(x)+\psi_0(x),\quad x\in(-1,c). \tag{6}$$

va

$$\nu(x)=\gamma D^{1-2\beta}_{c,x}\tau(x)+\psi_1(x),\quad x\in(c,1). \tag{7}$$

mos ravishda, bu yerda $D^{1-2\beta}_{-1,x}$ va $D^{1-2\beta}_{c,x}$ – kasr tartibli differensiallash operatorlari [5],

$$\psi_0(x)=\frac{(2/(m+2))^{1-2\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}(1+x)^{\beta}D^{1-\beta}_{-1,x}\psi_0\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

$$\psi_1(x)=\frac{(2/(m+2))^{1-2\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}(x-c)^{\beta}D^{1-\beta}_{c,x}\psi_1\left(\frac{x+c}{2}\right),$$

$$\gamma=2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)((m+2)/4)^{2\beta}/\Gamma(1-2\beta)\Gamma(\beta),\quad \gamma_1=\frac{2^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},$$

$$\gamma_2=-\frac{2^{2\beta-1}\Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)}.$$

(6) va (7) tengliklar $y=0$ o'qining mos ravishda $(-1,c)$ va $(c,1)$ intervallariga D^- sohadan keltirib chiqarilgan noma'lum $\tau(x)$ va $\nu(x)$ funksiyalar orasidagi birinchi funksional munosabatlar hisoblanadi.

TG_0 masalasi uchun A.V. Bitsadzening ekstremum prinsipining [6, 301-b.] analogi quyidagicha bo'ladi:

1-Teorema. $\psi_0(x)\equiv 0$, $\psi_1(x)\equiv 0$ shartlar bajarilganda TG_0 masalasining $u(x,y)$ yechimi yopiq $\overline{D}^+$ sohada o'zining eng katta musbat qiymatini yoki eng kichik manfiy qiymatini faqatgina σ_0 normal egri chiziq nuqtalarida qabul qiladi.

1-teoremaning isboti [2] ishdagi usul bilan amalga oshiriladi:

Adabiyotlar

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М.: Высшая школа. 1985. - 304 с.
2. **Мирсабуров М., Бегалиев О., Хуррамов Н.** *Об одном обобщении задачи Трикоми* // Дифференциальные уравнения. 2019, том 55 №8, С.1117-1126.
3. **Хуррамов Н.Х.** *Об одном обобщении задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа* // Бюллетень Института математики 2020, №3, стр. 183-198.
4. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005. "Universitet "Yangiyo'l poligraf servis"224 с.
5. **Нахушев А.М.** *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа.* // Дифференц. уравнения. 1969, т 5, No1. с. 44-59.
6. **Бицадзе А.В.** *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М., 1981. 448 с.

UDK 517.923

Fundamental solution and uniqueness of solution to the Cauchy problem for a third-order fractional derivative equation

Zunnunov R.T.[1], Matmuratov M.N.[2]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; zunnunov@mail.ru
[2]University of Exact and Social Sciences, Tashkent, Uzbekistan; matmuratov.m.n1992@gmail.com

Fractional differential equations represent one of the most rapidly developing fields in modern mathematics. In modeling physical processes across diverse fields such as anomalous diffusion, viscoelasticity, signal processing, biological systems, and financial mathematics, equations with fractional derivatives yield more accurate results compared to traditional integer-order equations, as they allow for accounting for the "memory"properties of processes.

Third-order evolution equations, particularly Korteweg–de Vries (KdV)-type equations, play an important role in fluid dynamics, plasma physics, and nonlinear wave theory. The inclusion of fractional derivatives enables the representation of even more complex and realistic physical properties of these processes.

We consider the following equation:

$$D_{0y}^{\alpha}u(x,y) - u_{xxx}(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

where D_0^{α} is the fractional derivative Riemann–Liouville of order $\alpha \in (0,1)$.

Equation (1) belongs to the class of evolution equations with a fractional time derivative. In [1], a fundamental solution was constructed for an odd-order partial differential equation with a fractional time derivative, the solution to the Cauchy problem was derived, and a uniqueness theorem was proved in a class of functions satisfying an analogue of the Tikhonov condition. Furthermore, among equations of this type, fractional diffusion and diffusion-wave equations (i.e., equations with second-order spatial derivatives) are the most widely studied.

Third-order equations (i.e., the integer-order special case of equation (1) where $\alpha = 1$) are also under intensive study. The primary approaches to studying third-order evolution equations and detailed information on this topic can be found in [2, 3].

We seek a solution to equation (1) in the domain $\Omega := (a,b) \times (0,T)$ satisfying the following conditions:

$$\lim_{y\to\infty} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) = \tau(x), \quad a < x < b \tag{2}$$

$$u(a,y) = \varphi_a(y), \quad u_x(a,y) = \phi_a(y), \quad u(b,y) = \varphi_b(y), \quad 0 < y < T \tag{3}$$

We aim to solve problem (1) subject to conditions (2) and (3) based on the general case presented in [1]. In [1], the existence of a solution was proved via a constructive method, namely, by constructing a fundamental solution, expressing the solution to the Cauchy problem in integral form, and verifying that it satisfies the required conditions. In Section 3 of the paper, a special function $G_{\sigma,n}^{\mu}(x,y)$ is introduced via the Wright function $\phi(\delta,\varepsilon;z)$. The properties of this function (its derivatives, fractional integration, and asymptotic bounds at infinity) are proved (Lemmas 3.3–3.5). Consequently, the function $\Gamma_{\sigma,n}(x,y;s,t) = G_{\sigma,n}^{\sigma-\lambda}(x-s,y-t)$ is shown to be the fundamental solution of the equation considered (Formula 3.21).

The uniqueness theorem (Theorem 5.1) is proved within a class of functions with exponential growth of the Tikhonov type.

References

1. **A. Pskhu**, Fundamental solutions and Cauchy problems for an odd-order partial differential equation with fractional derivative, *Electron. J. Differ. Equ.*, 2019(21), 1–13.
2. **S. Abdinazarov**, *Boundary-Value Problems for Equations with Multiple Characteristics*, Doctoral Thesis (Physics and Mathematics), Tashkent, 1992. (in Russian)
3. **Y. P. Apakov**, On a Method for Solving Boundary Problems for a Third-order Equation with Multiple Characteristics, *Operator Theory: Advances and Applications*, 216 (2011), 65–78.

УДК 517.95

Формулы приведения для гипергеометрических функций и их применения к исследованию свойств решений сингулярных эллиптических уравнений

Аббасова М.О.[1], Джураев Н.[2], Эргашев Т.Г.[3]

[1]Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан; : abbasovamunira21@gmail.com
[2]Каршинский государственный технический университет, Карши, Узбекистан; norqul.djuraev@mail.ru
[3]Национальный исследовательский университет ''ТИИИМСХ'', Ташкент, Узбекистан; ergashev.tukhtasin@gmail.com

В данном сообщении известный набор формул приведения для гипергеометрических функций Гаусса F и Аппеля F_2 дополняются новыми формулами, полученными при нулевых значениях параметров как числителя, так и знаменателя этих функций, а также впервые установливаются формулы приведения для гипергеометрической функции Лауричелла $F_A^{(n)}$ от трех и более переменных. Приводятся применения полученных результатов.

Гипергеометрические функции могут быть выражены через элементарные функции при одновременном обращении в нуль одинакового количества параметров числителя и знаменателя.

Теорема 1. При $|x|<1$ для функции Гаусса F справедливы формулы приведения:

$$\lim_{b\to 0} F\left(a,b;kb;x\right)=\frac{1}{k}\left[(1-x)^{-a}+k-1\right],\ \ k\neq 0;$$

$$\lim_{b\to 0} F\left(a+\lambda,b+\lambda;kb+\lambda;x\right)=(1-x)^{-a-\lambda},\ \ k\neq 0,\ \ \lambda\neq 0.$$

Теорема 2. При $|x|+|y|<1$ для функции Аппеля F_2 справедливы формулы приведения:

$$F_2\left(a,b,b';kb,k'b';x,y\right)\big|_{b=b'=0}=\frac{1}{kk'}\left[(k-1)(k'-1)+\frac{k'-1}{(1-x)^a}+\frac{k-1}{(1-y)^a}+\frac{1}{(1-x-y)^a}\right],$$

если $k\neq 0,\ k'\neq 0$;

$$F_2\left(a+1,1,b;2,kb;x,y\right)\big|_{b=0}=-\frac{1}{akx}\left[k-1-\frac{k-1}{(1-x)^a}+\frac{1}{(1-y)^a}-\frac{1}{(1-x-y)^a}\right],$$

если $a\neq 0,\ k\neq 0$;

$$F_2\left(1,1,b;2,kb;x,y\right)\big|_{b=0}=-\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{1}{kx}\ln\left(1+\frac{xy}{1-x-y}\right).$$

Теорема 3. При $|x_1| + ... + |x_n| + |y| < 1$ для функции Лауричелла $F_A^{(n+1)}$ от $n+1$ переменных справедливо равенство

$$F_A^{(n+1)}(a+1, \mathbf{b}, 1; \mathbf{c}, 2; \mathbf{x}, y) = -\frac{1}{ay} F_A^{(n)}(a, \mathbf{b}; \mathbf{c}; \mathbf{x}) + \frac{1}{ay(1-y)^a} F_A^{(n)}\left(a, \mathbf{b}; \mathbf{c}; \frac{\mathbf{x}}{1-y}\right),$$

если $a \neq 0$; $b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$, $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_0$, где $\mathbf{b} := (b_1, ..., b_n)$, $\mathbf{c} := (c_1, ..., c_n)$, $\mathbf{x} := (x_1, ..., x_n)$.

Следствие 1. Если $a \neq 0, -1, ..., -(n-1)$; $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0$, то при $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| + |y| < 1$ справедлива формула приведения

$$F_A^{(n+1)}\left(a+n, \underbrace{1, ..., 1}_{n}, b; \underbrace{2, ..., 2}_{n}, c; \mathbf{x}, y\right) = \frac{(-1)^n}{(a)_n \Pi(\mathbf{x}_n)} \sum_{I \subseteq \{1,...,n\}} \frac{(-1)^{|I|}}{(1-X_I)^a} F\left(a, b; c; \frac{y}{1-X_I}\right).$$

Здесь I обозначает любое из 2^n подмножеств множества первых n натуральных чисел $\{1, 2, ..., n\}$; $X_I = \sum\limits_{i \in I} x_i$, $X_\emptyset = 0$; $|I|$ – число элементов множества I, $|\emptyset| = 0$; $\Pi(\mathbf{x}_k) = \prod\limits_{i=1}^{k} x_i$ – произведение первых k переменных рассматриваемой функции Лауричелла ($1 \leq k \leq n$).

Примеры.

$$F_A^{(n)}\left(a+n, \underbrace{1, ..., 1}_{n}; \underbrace{2, ..., 2}_{n}; \mathbf{x}\right) = \frac{(-1)^n}{(a)_n \Pi(\mathbf{x}_n)} \sum_{I \subseteq \{1,...,n\}} \frac{(-1)^{|I|}}{(1-X_I)^a},$$

$$F_A^{(n)}\left(n, \underbrace{1, ..., 1}_{n}; \underbrace{2, ..., 2}_{n}; \mathbf{x}\right) = \frac{(-1)^n}{(n-1)! \Pi(\mathbf{x}_n)} \sum_{I \subseteq \{1,...,n\}} (-1)^{|I|} \ln \frac{1}{1-X_I}.$$

Теорема 4. При $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| < 1$ и $k_1 \neq 0$,..., $k_n \neq 0$ для функции Лауричелла $F_A^{(n)}$ справедлива формула приведения:

$$F_A^{(n)}\left(\begin{array}{c} a, b_1, ..., b_n; \\ k_1 b_1, ..., k_n b_n; \end{array} \mathbf{x}\right)\Bigg|_{b_1=0,...,b_n=0} = \frac{1}{k_1 k_2 ... k_n} \sum_{I \subseteq \{1,...,n\}} \frac{1}{(1-X_I)^a}.$$

Применения. Известно, что многомерное сингулярное эллиптическое уравнение

$$E_\alpha^{(m,n)}(u) \equiv \Delta u + \sum_{j=1}^{n} \frac{2\alpha_j}{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \;\; 0 < \alpha_1, ..., \alpha_n < \frac{1}{2}, \quad \Delta u \equiv \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \tag{1}$$

в области $\Omega_n = \{(x_1, ..., x_m) : x_1 > 0, ..., x_n > 0, n \leq m\}$ (в $1/2^n$-ой части евклидова пространства R_m) имеет 2^n фундаментальных решения, которые явно выражаются через функцию Лауричелла $F_A^{(n)}$ от n переменных (за подробностями см. [1]).

Теорема 5. Если $q_I^{(\alpha)}(x; \xi)$ суть совокупность всех фундаментальных решений уравнения (1), то их среднее арифметическое значение при $\alpha_1 \to 0$, ..., $\alpha_n \to 0$ равно фундаментальному решению $q(x; \xi)$ уравнения Лапласа:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{I} q_I^{(\alpha)}(x; \xi)\Bigg|_{\alpha_1=0,...,\alpha_n=0} = q(x; \xi),$$

где $(\alpha) := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $x := (x_1, ..., x_m)$, $\xi := (\xi_1, ..., \xi_m)$.

Далее справедливы теоремы, которые сравнивают решения задач Дирихле, Неймана и Хольмгрена для уравнений Лапласа и эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами в бесконечной и конечной областях.

Литература

1. **Ergashev T.G.** *Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients.* Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, Vol.16(1), p. 48–57, 2020.

УДК 517.956

Краевая задача с конормальной производной для уравнения смешанного типа второго рода с условием сопряжения типа Франкля

Абдуллаев А.А.[1], Саттаров У.У.[2]
[1,2]Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Ташкент, Узбекистан;
[1] a.abdullayev@tiiame.uz, [2] sattarov.u.u@gmail.com

Аннотация. В работе исследуется краевая задача с конормальной производной для уравнения смешанного типа второго рода с условием сопряжения типа Франкля. Уравнение рассматривается в области, состоящей из эллиптической и гиперболической частей, линия вырождения которых является характеристикой. Доказаны теоремы единственности и существования решения. Единственность установлена на основе нового принципа экстремума, учитывающего нелокальное условие Франкля. Существование доказано сведением задачи к сингулярному интегральному уравнению нормального типа и последующей регуляризацией к уравнению Фредгольма второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -1 < m < 0, \tag{1}$$

в конечной односвязной области $D = D_1 \cup D_2 \cup J$, где $D_1 = D \cap \{y > 0\}$ — эллиптическая часть, ограниченная гладкой кривой σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком $J = \{(x,0) : 0 < x < 1\}$; $D_2 = D \cap \{y < 0\}$ — гиперболическая часть, ограниченная отрезком J и характеристиками уравнения (1):

$$AC: \quad x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \qquad BC: \quad x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1.$$

Вводится параметр

$$2\beta = \frac{m}{m+2}, \qquad -\frac{1}{2} < \beta < 0. \tag{2}$$

Линия вырождения J разбивается точкой $E(c,0)$, $0 < c < 1$, на два интервала:

$$J_1 = \{(x,0) : 0 < x < c\}, \qquad J_2 = \{(x,0) : c < x < 1\}.$$

Обозначим через C_0 точку пересечения характеристики AC с характеристикой, выходящей из точки $E(c,0)$.

Задача TF. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C_x^1(D_1 \cup \sigma) \cap C_y^1(D_1 \cup \sigma \cup J_1 \cup J_2) \cap C_y^1(D_2 \cup J_1 \cup J_2)$, причем производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в точках $A(0,0)$, $E(c,0)$, $B(1,0)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D_1 и обобщенным решением из класса R_2 в области D_2;

3) на линии вырождения выполняется условие склеивания:

$$\lim_{y \to 0+} u_y(x,y) = -\lim_{y \to 0-} u_y(x,y), \qquad (x,0) \in J_1 \cup J_2; \tag{3}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\{q(s)A_s[u] + \rho(s)u\}_\sigma = \varphi(s), \qquad 0 < s < l, \tag{4}$$

где $A_s[u] = y^m \frac{dy}{ds} u_x - \frac{dx}{ds} u_y$ — конормальная производная, s — длина дуги кривой σ, отсчитываемая от точки $B(1,0)$;

$$u(x,y)\big|_{AC_0} = \psi(x), \qquad x \in \left[0, \frac{c}{2}\right]; \tag{5}$$

на линии вырождения задается нелокальное разрывное условие сопряжения типа Франкля:

$$u(p(x),0) = \mu u(x,0) + f(x), \qquad (x,0) \in \overline{J}_1, \quad u(c,0) = 0, \tag{6}$$

где $0 < \mu < 1$, $p(x) = \delta - kx$, $p'(x) < 0$, $p(c) = c$, $p(1) = 0$, $k = c/(1-c)$, $\delta = c/(1-c)$.

Предполагается, что заданные функции удовлетворяют условиям гладкости:

$$\rho(s)q(s) \geq 0, \quad q(s) \neq 0, \quad \rho(s), q(s), \varphi(s) \in C[0,l],$$

$$\psi(x) \in C^2\left[0, \frac{c}{2}\right], \quad f(x) \in C^2(\overline{J}_1), \quad \psi(0) = 0, \quad f(0) = f(c) = 0.$$

Ключевым этапом исследования является вывод функциональных соотношений между следами решения на линии вырождения:

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad \lim_{y \to 0\pm} u_y(x,y) = \nu^{\pm}(x), \qquad (x,0) \in J.$$

Обобщенное решение задачи Коши в области D_2 представляется в виде [1, с. 230]:

$$u(\xi,\eta) = \int_0^\xi (\eta - t)^{-\beta}(\xi - t)^{-\beta} T(t)dt + \int_\xi^\eta (\eta - t)^{-\beta}(t - \xi)^{-\beta} N(t)dt, \tag{7}$$

где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},$$

$$N(t) = \frac{T(t)}{2\cos\pi\beta} - \gamma_1 \nu^-(t), \quad \gamma_1 = [2(1-2\beta)]^{2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)^{-2\beta} T(t)dt. \tag{8}$$

Из условия на характеристике (5), полагая $\xi = 0$, $\eta = x$ в (7), получаем первое функциональное соотношение:

$$T(x) = \gamma_2 \nu^-(x) + \frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)} x^\beta D_{0x}^{1-\beta}\psi(x), \qquad (x,0) \in J_1, \tag{9}$$

где $\gamma_2 = 2\gamma_1 \cos\pi\beta$, а $D_{0x}^{1-\beta}$ — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля.

Решение вспомогательной задачи DK в области D_1 с условиями (4) и (8) существует, единственно и представимо через функцию Грина. Дифференцируя по y и переходя к пределу при $y \to 0+$, с учетом (8) получаем второе функциональное соотношение:

$$\nu^+(x) = -\frac{\pi k_2 \operatorname{tg}\beta\pi}{1-2\beta} T(x) - \frac{k_2}{1-2\beta}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-2\beta} \left[\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{x+t-2xt}\right] T(t)dt$$

$$+ \int_0^1 T(t)dt \int_t^1 (z-t)^{-2\beta} \frac{\partial^2 H_2(z,0;x,0)}{\partial\eta\,\partial y} dz - \frac{2k_2}{1-2\beta}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-2\beta} \frac{T(t)dt}{1-2x}$$

$$+ \int_0^l \frac{\partial q_2(\xi(s),\eta(s);x,0)}{\partial y}\chi(s)ds, \qquad (x,0) \in J. \tag{10}$$

Для доказательства единственности используется аналог принципа экстремума А.В. Бицадзе, основанный на следующей лемме.

Лемма. Пусть $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^{(1,k)}(0,1)$, $k > -2\beta$, и функция $\tau(x)$ в точке $x_0 \in (0,1)$ достигает наибольшего положительного (или наименьшего отрицательного) значения. Тогда функция

$$T(x) = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)$$

в точке $x = x_0$ представима в виде

$$T(x_0) = \frac{\sin 2\beta\pi}{\pi}\left[x_0^{2\beta-1}\tau(x_0) + (1-2\beta)\int_0^{x_0} \frac{\tau(x_0)-\tau(t)}{(x_0-t)^{2-2\beta}}dt\right], \tag{11}$$

причем

$$T(x_0) < 0 \quad (\text{для НПЗ}), \qquad T(x_0) > 0 \quad (\text{для НОЗ}). \tag{12}$$

Теорема 1 (принцип экстремума). Если выполнены условия (2) и $0 < \mu < 1$, то решение однородной задачи TF (при $\psi \equiv 0$, $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$) не может достигать своего наибольшего положительного и наименьшего отрицательного значений внутри D_1 и на открытых участках $J_1 \cup J_2$. Экстремум достигается только на кривой σ. Теорема доказывается с помощью принципу экстремума.

Теорема 2 (единственность). Пусть выполнены условия теоремы 1, условия (2), (6), а функции $\rho(s)$, u_x, u_y, $q(s)$ вблизи точек A и B удовлетворяют условиям:

$$\rho(0) \neq 0, \quad \rho(l) \neq 0,$$

$$|u_x| \le CR_j^{\delta-1}, \quad |u_y| \le CR_j^{\delta-1}, \quad 0 < \delta < 1,$$

$$R_j^2 = (\theta - x)^2 + \frac{2}{m+2}y^{m+2}, \quad \theta = 0\ (j=1),\ \theta = 1\ (j=2),$$

$$|q(s)| \le C[s(l-s)]^{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 > -m + \frac{m+2}{2}(1-\delta).$$

Тогда в области D не может существовать более одного решения задачи TF.

Для доказательства существования исключаем ν^- и ν^+ из соотношений (9) и (10), используя условие склеивания (3). В результате получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $T(x)$:

$$T(x) - \gamma_3 \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-2\beta} \left[\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{x+t-2xt}\right] T(t)dt$$

$$+ \int_0^1 Q_1(x,t)T(t)dt = \Phi_1(x), \qquad x \in (0,c), \tag{13}$$

где

$$\gamma_3 = \frac{\cos\beta\pi}{\pi(1-\sin\beta\pi)},$$

$$Q_1(x,t) = 2\pi\gamma_1\gamma_3 \int_t^1 (z-t)^{-2\beta} \frac{\partial^2 H_2(z,0;x,0)}{\partial\eta\,\partial y}dz - \frac{2\gamma_3}{1-2x}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-2\beta},$$

$$\Phi_1(x) = 2\pi\gamma_1\gamma_3 \int_0^l \frac{\partial q_2(\xi(s),\eta(s);x,0)}{\partial y}\chi(s)ds + \frac{2\pi\gamma_3}{\Gamma(1-\beta)}x^\beta D_{0x}^{1-\beta}\psi(x).$$

Исследование ядра $Q_1(x,t)$ показывает, что оно непрерывно в квадрате $0 \le x,t \le 1$, за исключением точки $(1,1)$, где имеет логарифмическую особенность. Правая часть $\Phi_1(x)$ принадлежит классу $C(0,1] \cap C^2(0,1)$ и обращается в бесконечность порядка меньше -2β при $x \to 0$, а при $x \to 1$ ограничена.

Используя нелокальное условие Франкля (6) и представление (8), получаем дополнительное соотношение:

$$T(x) = \frac{k^{1-2\beta}}{\mu}T(p(x)) - \frac{1}{\mu\Gamma(1-2\beta)}D_{0x}^{1-2\beta}f(x). \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13) и выполняя замену переменной $t = p(s) = \delta - ks$ в интеграле по $(c,1)$, приходим к уравнению, содержащему сингулярный оператор с изолированной особенностью первого порядка. Далее вводится замена переменных:

$$z = \frac{x^2}{1-2cx+2cx^2}, \qquad \zeta = \frac{t^2}{1-2ct+2ct^2},$$

которая преобразует уравнение к сингулярному интегральному уравнению нормального типа на отрезке $[0,1]$:

$$\nu(z) + \frac{\gamma_4}{\pi}\int_0^1 \frac{\nu(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int_0^1 Q_4(z,\zeta)\nu(\zeta)d\zeta = \Phi_5(z), \tag{15}$$

где $\gamma_4 = -\pi\gamma_3$, $1 + \gamma_4^2 \ne 0$. Уравнение (15) имеет нулевой индекс и, согласно методу регуляризации Карлемана–Векуа [2], сводится к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Разрешимость полученного уравнения следует из доказанной единственности исходной задачи. После нахождения решения обратными заменами определяется $T(x)$, затем по формуле (8) восстанавливается $\tau(x)$, а по формулам (9) и (10) —

$\nu^{\pm}(x)$. Далее решение задачи TF восстанавливается как решение задачи DK в D_1 и как обобщенное решение задачи Коши в D_2.

Теорема 3 (существование). Если выполнены условия (2), (6), (8), (9), то в области D существует решение задачи TF.

Литература

1. **Смирнов М.М.** Уравнения смешанного типа. - М.: Высшая школа. - 1985. - 304 с.
2. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука. 1968. 512с.

УДК 517.95

Нелокальная краевая задача для линейного параболического уравнения смешанного типа в ограниченной области

Акбарова С. Х.[1], Хамрокулова Н. П.[2]
[1]Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан; akbarovasx1969@gmail.com
[2]Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан; 440700nh@gmail.com

В данной статье изучается краевая задача с нелокальными условиями для уравнения вида

$$u_{xx} + a(x,t)u_x + c(x,t)u = sgnxu_t \tag{1}$$

в ограниченной области $D = D^+ \cup I \cup D^-$, где

$$D^+ = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\},$$

$$D^- = \{(x,t) : -1 < x < 0, 0 \leq t < 1\},$$

$$I = \{(x,t) : x = 0, 0 < t < 1\},$$

и $a(x,t), c(x,t)$ - коэффициенты, заданные функции, причем

$$a(x,t) \in C^1(D), c(x,t) \in C^{(0,h)}(D), c(x,t) \leq 0$$

в D.

Задача. Определить функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:
1) $u(x,t) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^1(D)$;
2) $u(x,t) \in C^{2,1}(D^+ \cup D^-)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях D^+, D^-;
3) выполняются нелокальным краевым условиям:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

$$u(x,1) = \varphi_2(x), -1 \leq x \leq 0, \tag{3}$$

$$u(1,t) + u_x(1,t) + \alpha(t)u(\beta(t),t) = \mu_1(t), 0 \leq t \leq 1, \tag{4}$$

$$u(-1,t) = \mu_2(t), 0 \leq t \leq 1, \tag{5}$$

где $\varphi_i(x), \mu_i(t)(i = 1,2), \alpha(t), \beta(t)$– заданные достаточно гладкие функции.

Следует отметить работы[1-3], в которых изучены локальные и нелокальные краевые задачи для смешанно-параболических уравнений.

Теорема. Если выполнено условие $|\alpha(t)| \leq 1$, то решение задачи существует и единственно.

Литература

1. **Керефов А.А.** *Об одной краевой задаче Жевре для параболического уравнения со знакопеременным разрывом первого рода у коэффициента при производной по времени.* Дифф.уравнения. -1974. - Т.X. №1. - С. 69-77.
2. **Акбарова М.Х.** *Краевая задача с нелокальными условиями для линейного смешанно-параболического уравнения.* Докл. АН РУ. - 1994. №7. - С. 5-7.
3. **Ўринов А.?.** *Параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.* MUMTOZ SO'Z . T., 2015

УДК 517.95

Задачи Трикоми с параллельными плоскостями вырождения с разрывными условиями склеивания в R^3

Апаков Ю. П.[1], Абдунабиев С. И.[2]
[1]Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан;
[2]Наманганский государственный университет, магистр, Наманган, Узбекистан;
[1]yusupjonapakov@gmail.com;
[2]abdunabiyevsamandarofficial@gmail.com.

Краевые задачи сопряжения для уравнений параболо-гиперболического типа имеют многочисленные приложения. Первые результаты в этом направлении содержатся в работе М.И. Гельфанда [1], где рассмотрена задача о движении газа в канале, окруженном пористой средой.

Задача Трикоми для эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве с помощью метода интегрального преобразования Фурье впервые исследована А.В. Бицадзе [2].

Краевые задачи для смешанных уравнений параболо-гиперболического типа в трехмерном пространстве с использованием интегральных преобразований рассматривались в работе [3].

Пусть Ω - бесконечная цилиндрическая область трехмерного евклидова пространства переменных x, y, z, ограниченная поверхностью $S = \bigcup\limits_{n=1}^{6} S_n$, где при $-\infty < z < +\infty$

$$\begin{array}{ll} (S_1) \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 1, & (S_2) \quad y - \frac{2}{m_2+2}(x-1)^{\frac{m_2+2}{2}} = 0, \\ (S_3) \quad y + \frac{2}{m_2+2}(x-1)^{\frac{m_2+2}{2}} = 1, & (S_4) \quad y = 1, \ 0 \le x \le 1, \\ (S_5) \quad y + \frac{2}{m_1+2}(-x)^{\frac{m_1+2}{2}} = 1, & (S_6) \quad y - \frac{2}{m_1+2}(-x)^{\frac{m_1+2}{2}} = 0, \end{array}$$

а

$$\Omega_1 = \Omega \cap (x < 0, \quad 0 < y < 1), \quad \Omega_0 = \Omega \cap (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1),$$
$$\Omega_2 = \Omega \cap (x > 1, \quad 0 < y < 1), \quad D_i = \Omega_i \cap (z = 0), \quad i = 0, 1, 2,$$
$$\sigma_i = S_i \cap (z = 0), \quad i = \overline{1,6}, \quad \overline{I_1} = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_0}, \quad \overline{I_2} = \overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_2},$$
$$J_k = I_k \cap (z = 0), \quad k = 1, 2.$$

Для уравнения

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y + U_{zz}, & \Omega_0, \\ U_{xx} - (-x)^{m_1}(U_{yy} + U_{zz}), & \Omega_1, \\ U_{xx} - (x-1)^{m_2}(U_{yy} + U_{zz}), & \Omega_2, \quad m_i > 0, \quad i = 1, 2, \end{cases} \tag{1}$$

рассмотрим следующую задачу.

Задача T. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω_i обладающее следующими свойствами:

$$1)\ \ U(x,y,z) \in C\left(\overline{\Omega_k}\right) \bigcap C^1(\Omega_k) \bigcap C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_0) \bigcap C^2\left(\Omega_1 \bigcup \Omega_2\right), \quad k = 0,1,2;$$

причем первые производные непрерывны вплоть до границы области $\Omega_j, \quad j = 1,2;$

2) удовлетворяет граничным условиям

$$U|_{S_1} = \Phi_1(x,z), \quad 0 \le x \le 1, \quad -\infty < z < +\infty, \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} U|_{S_2} = \Psi_2(y,z), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \quad -\infty < z < +\infty, \\ U|_{S_6} = \Psi_1(y,z), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \quad -\infty < z < +\infty, \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\lim_{z \to \pm\infty} U(x,y,z) = \lim_{z \to \pm\infty} U_z(x,y,z) = 0 \tag{4}$$

3) удовлетворяет условиям склеивания

$$\begin{array}{c} U(-0,y,z) = a_1 U(+0,y,z), \\ U_x(-0,y,z) = b_1(y) U_x(+0,y,z) + c_1(y) U(+0,y,z) + P_1(y,z), \\ U(1-0,y,z) = a_2 U(1+0,y,z), \\ U_x(1-0,y,z) = b_2(y) U_x(1+0,y,z) + c_2(y) U(1+0,y,z) + P_2(y,z), \end{array} \tag{5}$$

Следуя идее А.В. Бицадзе [2], решение поставленной задачи будем искать в классе интегралов Фурье, т.е. в виде

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,y,\lambda)\ e^{-i\lambda z} d\lambda\ . \tag{6}$$

Применяя преобразование Фурье получим уравнение

$$0 = \left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} - u_y - \lambda^2 u, & D_0, \\ u_{xx} - (-x)^{m_1} u_{yy} + \lambda^2 (-x)^{m_1} u, & D_1, \\ u_{xx} - (x-1)^{m_2} u_{yy} + \lambda^2 (x-1)^{m_2} u, & D_2. \end{array} \right. \tag{7}$$

Задача T_λ. Найти регулярное решение уравнения (7) в областях $D_k,\ k = 0,1,2,$ обладающее следующими свойствами:

$$1)\ \ u(x,y,\lambda) \in C\left(\overline{D_k}\right) \bigcap C^1(D_k) \bigcap C^{2,1}_{x,y}(D_0) \bigcap C^2\left(D_1 \bigcup D_2\right), \quad k = 0,1,2,$$

причем первые производные непрерывны вплоть до границы области $D_j, \quad j = 1,2;$

2) удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{\sigma_1} = \varphi(x,\lambda), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} u|_{\sigma_2} = \psi_2(y,\lambda),\ 0 \le y \le \frac{1}{2}, \\ u|_{\sigma_6} = \psi_1(y,\lambda),\ 0 \le y \le \frac{1}{2}, \end{array}\right\}$$

3) удовлетворяет условиям склеивания

$$u(-0,y,\lambda) = a_1 u(+0,y,\lambda),$$

$$u_x(-0,y,\lambda) = b_1(y)\,u_x(+0,y,\lambda) + c_1(y)\,u(+0,y,\lambda) + p_1(y,\lambda),$$
$$u(1-0,y,\lambda) = a_2 u(1+0,y,\lambda),$$
$$u_x(1-0,y,z) = b_2(y)\,u_x(1+0,y,z) + c_2(y)\,u(1+0,y,z) + p_2(y,z).$$

Единственность решения задачи доказана методом априорных оценок, а существование решения задачи сведено к разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гельфанд И.М.** *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений.* Успехи мат. наук., 1956. Т.14, вып. 3(87). С. 3-19.
2. **Бицадзе А.В.** *Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми.* Сибир. мат. журн. 1962. Т.3. С. 642-644.
3. **Джураев Т.Д., Апаков Ю.П.** *Задача Геллерстедта для параболо- гиперболического уравнения в трехмерном пространстве.* Дифф. уравн. Минск. 1990. Т.26. №3. С. 438-448.

УДК 517.95

Об одном краевой задаче для вырождающегося уравнения третьего порядка с кратной характеристикой

Апаков Ю. П.[1], Иброхимов Х. К.[2]
[1,2]Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан;
[1]Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан;
[1]yusupjonapakov@gmail.com;
[2]xusniddin571@mail.ru.

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка представляют собой одно из актуальных направлений современной математической физики. Они находят широкое применение при решении задач нелинейной акустики, в гидродинамической теории космической плазмы, а также при моделировании процессов фильтрации жидкости в пористых средах [1].

Учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы уравнений Навье-Стокса было выведено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени [2]:

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y}u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const}.$$

При $\nu = 1$ данное уравнение описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ плоскопараллельный поток [3].

В области $D = \{(x,y) : 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$, рассмотрим уравнения третьего порядка в виде:

$$L[u] = u_{xxx} + y^m u_{yy} + \mu u = g(x,y), \quad 0 < m < 1, \quad \mu \le 0, \tag{1}$$

где $p, q > 0$, а $g(x,y)$ - достаточно гладкая функция.

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0) = u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p; \tag{2}$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\ u_x(0,y)=\psi_2(y),\ u_{xx}(p,y)=\psi_3(y),\quad 0\le y\le q. \tag{3}$$

$\psi_i(y)$, $i=\overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции.

Теорема. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два различных решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$y^{-m}u\,L[u]\equiv y^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx}-\frac{1}{2}\,u_x^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\,u_y\right)-u_y^2+\mu y^{-m}u^{\,2}=0. \tag{4}$$

Проинтегрируем тождество (4) по области $D_\varepsilon=\{(x,y):\ 0<x<p,\ \varepsilon<y<q\}$, $\varepsilon>0$, имеем

$$\int\limits_0^p\int\limits_\varepsilon^q\left[y^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx}-\frac{1}{2}\,u_x^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\,u_y\right)\right]dxdy-\int\limits_0^p\int\limits_\varepsilon^q u_y^2dxdy+\mu\int\limits_0^p\int\limits_\varepsilon^q y^{-m}u^{\,2}dxdy=0.$$

Учитывая краевые условия (3), получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_0^q y^{-m}\,u_x^2\,(p,y)\,dy-\int\limits_0^p\left[u\,(x,q)\ u_y\,(x,q)-u\,(x,\varepsilon)\ u_y\,(x,\varepsilon)\right]dx\\ +\int\limits_0^p\int\limits_0^q u_y^2\,(x,y)\,dxdy-\mu\int\limits_0^p\int\limits_0^q y^{-m}u^2\,(x,y)\,dxdy=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon\to+0$, тогда $D_\varepsilon\to D$. В силу условий задачи $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, функции $u\,(x,y)$ и $u_y\,(x,y)$ непрерывны. В результате при $\varepsilon\to+0$ из (5) получаем равенство:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^q y^{-m}\,u_x^2\,(p,y)\,dy+\int\limits_0^p\int\limits_0^q u_y^2\,(x,y)\,dxdy-\mu\int\limits_0^p\int\limits_0^q y^{-m}u^2\,(x,y)\,dxdy=0. \tag{6}$$

Здесь из условия $0<m<1$ следует, что $y^{-m}>0,\ y\in(0,q)$, а также

$$\int\limits_0^q y^{-m}dy=\frac{q^{1-m}}{1-m}<\infty.$$

Пусть $\mu<0$, тогда из третьего слагаемого получаем $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{D}$. Если $\mu=0$, то из равенства нулю второго слагаемого получаем $u_y(x,y)=0$. Отсюда следует, что $u(x,y)=f(x)$, где $f(x)$ - функция, удовлетворяющая уравнению (1) и краевым условиям задачи A. Учитывая краевое условие (2) $u(x,q)=0$, находим $f(x)=0$. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$, в $\overline{D}$.

Теорема доказана.

Существование решения задачи доказано с помощью метода разделения переменных. Найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции и доказана полнота собственной функции в $L_2(0,q)$. Решения указанной задачи найдена в виде бесконечного ряда. Показана найденное решение является регулярным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Юлдашев Т. К.** *Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - №1(34). - С.56-65.
2. **Рыжов О. С.** *Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа.* Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.
3. **Диесперов В.Н.** *О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения.* Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - №5. - С. 1265-1279.

УДК 517.956.6

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ГЕРАСИМОВА–КАПУТО

Ахмадов И. А.[1], Караматов Б.Т.[2]
[1,2]Навоийский государственный университет, Навои, Узбекистан.
ahmadov.ilhom@mail.ru, bulatbek.karamatov@gmail.com.

В последние годы значительно возрос интерес к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа, в частности с участием операторов дробного порядка. Подобные задачи находят широкое применение в моделировании процессов, где наблюдается как диффузионный, так и волновой характер распространения, а также эффекты памяти и наследственности.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка и интегральным условием сопряжения. Доказано существования и единственность классического решения задачи A_α для уравнения смешанного типа дробного порядка. Изучены спектральные свойства задачи A_α для уравнения смешанного типа с производной дробного порядка в смысле оператора Герасимова–Капуто.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками $AA_0 = \{x = 0,\ 0 \le y \le 1\}$, $A_0B_0 = \{y = 0,\ 0 < x < 1\}$, $BB_0 = \{x = 1,\ 0 < y < 1\}$, а при $y < 0$ - характеристиками $AN:\ x + y = 0,\ BN:\ x - y = 1$, уравнения

$$g(x;y) = Lz(x,y) \equiv \begin{cases} {}_cD^{\alpha}_{0x} z(x,y) - z_{yy}(x,y), & y \ge 0, \\ z_{xx}(x,y) - z_{yy}(x,y), & y < 0, \end{cases}$$

где ${}_cD^{\alpha}_{0x}\,[\bullet]$ — оператор дробного порядка α в смысле Герасимова–Капуто [5]:

$${}_cD^{\alpha}_{0x} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt, & 0 < \alpha < 1, \\ f'(x), & \alpha = 1, \end{cases}$$

Задача A_α. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$z(x,y)|_{AA_0} = 0,\ z_y(x,y)|_{A_0B_0} = 0,$$

$$a_1 \left[z_x(x,y) + z_y(x,y)\right]|_{AN} + a_2 \left[z_x(x,y) - z_y(x,y)\right]|_{BN} = a_3\, z(x,y)|_{A_0B_0},$$

и условию сопряжения

$$z(x,+0) = z(x,-0),\ z_y(x,+0) = a_4 z_y(x,-0) - a_5 \int_0^x z_y(t,-0)\,dt, \quad 0 < x < 1,$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$, причем $a_1^2 + a_2^2 > 0$, $a_4^2 + a_5^2 > 0$.

Через $H^l(\Omega)$ обозначим пространство С. Л. Соболева с нормой $\|\cdot\|_l$, $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ - пространство квадратично суммируемых функций на [0,1], $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Определение 1. Классическим решением задачи A_α назовем функцию $z(x, y)$ из класса

$$Q_1 = \{z(x, y) : \ z(x, y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C_y^2(\Omega_0) \cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_1)\},$$

удовлетворяющую условиям (3), (4), (5) и обращающую уравнение (1) в тождество.

Определение 2. Функцию $z(x, y) \in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи A_α, если существует последовательность функций $\{z_n(x, y)\}$, $z_n(x, y) \in Q_1$, удовлетворяющих условиям (3), (4), (5) задачи A_α, такая, что последовательности $z_n(x, y)$ и $Lz_n(x, y)$ сходятся в L_2 к функциям $z(x, y)$ и $g(x, y)$ соответственно,т.е.

$\| z_n(x, y) - z(x, y)\|_0 \to 0$, $\| Lz_n(x, y) - g(x, y)\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. Для любой функции $g(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$, $g(0, y) = 0$, существует единственное классическое решение $z(x, y) \in Q_1$ задачи A_α, удовлетворяющее неравенству

$$\|z(x, y)\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_1 \|g(x, y)\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Теорема 2. Пусть $2/3 < \alpha \le 1$. Тогда для любой функции $g(x, y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $z(x, y)$ задачи A_α. Это решение принадлежит классу

$$Q_2 = \left\{z(x, y) : z(x, y) \in H^1(\Omega) \cap H_y^2(\Omega_0) \cap C(\overline{\Omega})\right\}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|z(x, y)\|_{L_2(\Omega)} \le C_2 \|g(x, y)\|_{L_2(\Omega)}$$

и может быть представлено в виде

$$z(x, y) = \iint_\Omega K(x, y; x_1, y_1) g(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1,$$

где $K(x, y; x_1, y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Теорема 3. Пусть $2/3 < \alpha \le 1$, $a_4 > 0$, $a_5 < 0$. Тогда существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что уравнение $Lz(x, y) = \lambda z(x, y)$ имеет нетривиальное решение $z(x, y) \in Q_1$.

Литература

1. Kal'menov T.Sh. On the spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation. // Differential Equations. 1977. 13(8). P. 1418–1425.

2. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. On the spectral theory of equations of mixed type. Tashkent: Mumtoz suz, 2005. 356 p.

3. Sadybekov M.A., Dildabek G., Ivanova M.B. Spectral properties of a Frankl type problem for parabolic-hyperbolic equations. // Electronic Journal of Differential Equations. 2018.. 2018(65). P. 1–11.

4. Sabitov K. B. , Karamova A. A. Spectral properties of solutions of the Tricomi problem for equations of mixed type with two lines of degeneracy, and their applications. // Russian Mathematics,. 2001. 65(4). P.769–785.

5. Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order. Moscow: Nauka, 2005. 200 p.

6. Ahmadov I.A. Об одной задаче со смещением для параболо-гиперболического уравнения с оператором Герасимова–Капуто в области с отходом от характеристики // Uzbek Mathematical Journal. 2023. Vol. 71(2). P. 41–50.

7. Islomov B. I., Akhmadov I. A. A nonlocal boundary value problem with the Frankl condition for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the fractional Gerasimov–Caputo operator. // Lobachevskii J Math.. 2022. 43(3). P. 755–761.

8. Islomov B. I., Akhmadov I.A. Unique Solvability and Existence of Eigenvalues for a Boundary Value Problem with a Deviation out Characteristics for a Parabolic-Hyperbolic Type Equation with a Fractional Derivative // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. 46(7). P. 3332-3349.

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ДРОБНОГО ПОРЯДКА В СМЫСЛЕ КАПУТО

Ахметов К. Н.
Ташкентский институт текстильной и лёгкой промышленности, г.Ташкент, Узбекистан;
don10061992@gmail.com

Уравнения смешанного типа, в которых линия вырождения является огибающей семейства характеристик и сама также является характеристикой, в литературе принято называть уравнениями смешанного типа второго рода.

Заметим, что в работах М.С. Салахитдинова и С.С. Исамухамедова [1], Ю.М. Крикунова [2], Р.С. Хайруллина [3] изучены классические решения видоизменённой задачи Коши и Трикоми для уравнений гиперболического и смешанного типов второго рода.

В работе И.Л.Кароля получено представление обобщённого решения класса R_2 задачи Коши для гиперболического уравнения второго рода, удобное для дальнейших исследований. Воспользовавшись найденным представлением, в работах М.С.Салахитдинова, А.К.Уринова, Б.И. Исломова, Н.К. Мамадалиева, Т.Г. Эргашева, А.А. Абдуллаева, А.Б.Окбоева, Н.Б.Исламова исследованы локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода. А.А. Самарский и А.М. Нахушев выяснили, что такие задачи возникают при изучении различных проблем математической биологии и решении проблем физики плазмы.

Несмотря на имеющиеся многочисленные работы по краевым задачам для смешанных уравнений второго рода, до сих пор остаётся неисследованной задача типа Трикоми для вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа второго рода дробного порядка в смысле Капуто.

В настоящей работе исследуется краевая задача с нелокальным условием на характеристиках для вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа второго рода, когда параболическое уравнение содержит оператор дробного порядка в смысле Капуто.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - x^p {}_cD^{\alpha}_{0y} u, & (x,y) \in \Omega_1, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, & (x,y) \in \Omega_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $m,\ p,\ \alpha-$ любые действительные числа, причем

$$0 < m < 1, \quad p > m/(2-m), \quad 0 < \alpha \le 1, \tag{2}$$

здесь Ω_1−область, ограниченная отрезками AB, AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=0$, $x=1$, $y=h$, соответственно при $y>0$, а Ω_2 −характеристический треугольник, ограниченный характеристиками $AC: x-(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=0$, $BC: x+(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=1$, $AB: \ 0<x<1, \quad y=0$, уравнения (1) при $y<0$, $C\left[1/2; -((2-m)/4)^{2/(2-m)}\right]$, здесь $2\beta=m/(m-2)$, причем

$$-1<2\beta<0, \tag{3}$$

а ${}_cD^{\alpha}_{0y}$−оператор дробного дифференцирования по y в смысле Капуто порядка $\alpha\in(0,\,1]$ (см. [Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987]).

Введем следующие обозначения:

$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup AB$, $J_1=\{(x,y): 0<x<c,\ y=0\}$, $J_2=\{(x,y): c<x<1,\ y=0\}$, $J=\{(x,y): 0<x<1,\ y=0\}$, $E(c,0)\in AB$, $c\in AB$, $C_2\in BC$, $C_1\in AC$,
$EC_1:\ x+(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=c, \quad EC_2:\ x-(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=c,$

$$\Theta_j(x)=\frac{x}{2}-i\left[\frac{x}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}, \quad \Theta^*(x)=\frac{x+c}{2}-i\left[\frac{x-c}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta},$$

$\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ $[\Theta^*(x)]$ - точки пересечения характеристики AC $[EC_2]$ соответственно с характеристикой выходящей из точки $M_1(x,0)$, $x\in[0;c]$ и $M_2(x,0)$, $x\in[c;1]$. Через Ω_{21},Ω_{22} и Ω_{23} соответственно обозначим характеристические треугольники AC_1E, EC_2B и четырехугольник EC_2CC_1.

В области D для уравнения (1) исследуется аналог задачи Трикоми.

Задача $Noloc(\Omega)$. Найти в области Ω функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами: 1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$; 2) $u(x,y)\in C^2_x(\Omega_1)$, ${}_cD^{\alpha}_{0y}u\in C(\Omega_1)$ и является регулярным решением уравнения (1) в области Ω_1; 3) $u(x,y)$ - обобщенное решение уравнения (1) из класса R_2 в области $\Omega_{2k}(k=\overline{1,3})$; 4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{AA_0}=\varphi_1(y), \qquad u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_2(y), \quad 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}u\left[\Theta_1(x)\right]+a(x)u(x,0)=b(x), \qquad (x,0)\in J_1, \tag{5}$$

$$u\left[\Theta_2(x)\right]=\mu\, u\left[\Theta^*(x)\right]+\rho(x), \qquad (x,0)\in \bar{J}_2, \tag{6}$$

5) ${}_cD^{\alpha}_{0y}u(x,y)\in C\left(\Omega_1\cup J_1\cup J_2\right)$, $u_y\in C\left(\Omega_2\cup J_1\cup J_2\right)$ и на интервалах J_j $(j=1,2)$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to-0}u_y(x,y)=p(x)\lim_{y\to+0}{}_cD^{\alpha}_{0y}u(x,y)+q(x), (x,0)\in J_1\cup J_2, \tag{7}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$−заданные функции, причем

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0, \quad b(0)=b(c)=0, \quad \rho'(c)=0, \tag{8}$$

$$\mu=const<0, \quad a(x)\ge 0, \quad a'(x)\ge 0, \ \forall\, x\in[0,c], \ p(x)<0, \quad \forall\, x\in[0,1] \tag{9}$$

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C\left[0,h\right]\cap C^1(0,h), \tag{10}$$

$$a(x),\ b(x)\in C^2\left[0;c\right], \quad \rho(x)\in C^2\left[0;1\right], \ \ p(x), \ \ q(x)\in C\left(\bar{J}_j\right)\cap C^2\left(J_j\right). \tag{11}$$

Теорема. Если выполнены условия (2), (3), (8), (9), (10) и (11), то решение задачи $Noloc(\Omega)$ в области Ω существует и единственно.

Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума для параболических и гиперболических уравнений, существование — методом интегральных уравнений.

Литература

1. **Салахитдинов М.С., Исамухамедов С.С.** *Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода.*Сердика. Бьлгарско математическо списанае. 1977. Т.3. С. 181-188.
2. **Крикунов Ю.М.** *Видоизмененная задача Трикоми для уравнения* $u_{xx} + yu_{yy} + (-n + +1/2)u_y = 0$.Изв. вузов, серия Мат. 1979. №9. С.21-28.
3. **Хайруллин Р.С.** *Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода.* Казань: изд-во Казан. ун-та. 2020. 356 с.

УДК 517.95

Разрешимость начально-граничной задачи для уравнения четвертого порядка с характеристическим вырождением

Бекиев П.А.
Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан
perxatbekiev@gmail.com

В данной работе рассмотрена начально-граничная задача для уравнения четвертого порядка переменными коэффициентами в прямоугольной области.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p,\ 0 < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv t^m u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + bt^{m-1} u_t + r^2 u = 0,$$

где a, b, p, β, m, r, -заданные действительные числа, причем $0 < b < 1$, $0 < m < b + 1$. Задача 1. Найти в области Ω функцию $u(x,t)$ удовлетворяющие условиям:

1)
$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\Omega) \cap C^{2,0}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right),\ \ t^b u_t(x,t) \in C\left(\bar{\Omega}\right); \tag{1}$$

2)
$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in \Omega; \tag{2}$$

3) функция $u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \lim_{t\to 0} t^b u_t(x,t) = \psi(x),\ 0 \le x \le p, \tag{3}$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = u(p,t) = 0,\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(p,t) = 0,\ \ 0 \le t \le \beta, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданные непрерывные функции.

Такие краевые задачи для уравнений второго порядка в частных производных переменными коэффициентами исследуются в работах [1-2].

Под классическим решением задачи (1)–(4) понимаем функцию $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\Omega) \cap C^{2,0}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяющую условиям (1)–(4) в обычном смысле.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\varphi(x),\ \psi(x) \in C^5[0,p],\ \ \varphi^{(2i)}(0) = \varphi^{(2i)}(p) = 0,$$

$$\psi^{(2i)}(0) = \psi^{(2i)}(p) = 0, i = 0,1,2.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)-(4).

Введем следующие нормы:

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,p]} = \left(\int_0^p |u(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \ \|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{\bar{\Omega}} |u(x,t)|.$$

Теорема 2.. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда для решения задачи 1 справедливы оценки:

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,p]} \leq c_1 \left[\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} \right],$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c_2 \left[\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} \right]$$

где c_1, c_2 - положительные постоянные.

Литература

1. Сабитова Ю.К. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 622–645.

2. Сабитова Ю. К. *Первая граничная задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением.* Изв. вузов. Матем., 2020, номер 11, 46–64.

УДК 517.956.32

АНАЛОГ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Бектошева Ш. А.[1],Нишонов Н. Н.[2]

[1]Кокандский государственный университет, Коканд,Узбекистан;
Bektoshevashohsanam2@gmail.com

[2]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
Nishonovn0102@gmail.com

В последние несколько десятилетий в основном благодаря ее приложениям в многочисленных областях науки и техники, теория дифференциальных уравнений с дробными производными прибрела значительную популярность и важность. В последние десятилетия после работы М.Х. Геккиевой [1], активно развивается другое направление в исследовании модельных уравнений смешанного типа первого рода, содержащих производные дробного порядка, например см. [2-3], поэтому актуальным остается вопрос рассмотрения краевых задач в неограниченных областях для уравнений смешанного типа второго рода. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D_{0y}^{\alpha} u, y > 0 \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, y < 0 \end{cases}$$

Здесь $0 < m < 1$, а D_{0y}^{α}- частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$ от функции $u(x,y)$ по второй переменной [1].

Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_2 = \{(x,y) : -\infty < x < \infty, y > 0\}$ а Ω_2 - область, ограниченная при $y < 0$ характеристиками : $AC : x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0$ и $BC : x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1$ и отрезком $\overline{J} = [0,1]$ прямой $y = 0$. Введем обозначение $\theta_0(x)$ - аффикс точки пересечения

характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in J$, с характеристикой AC: $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left(\frac{1}{1-2\beta}\frac{x}{2}\right)^{1-2\beta}\right)$ где $\beta = \frac{m}{2(m-2)}, -\frac{1}{2} < \beta < 0$.

Задача BS. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ удовлетворяющее краевым условиям.

$$y^{1-\alpha}u\,|_{y=0} = 0, -\infty < x \le 0, 1 \le x < \infty\,,$$

$$u[\theta_0(x)] = au(x;0) + \gamma(x), \forall x \in \overline{J},$$

где $a \le 1$, $\gamma\,(x) = x \cdot \gamma^*\,(x)$,$\gamma^*\,(x) \in C^1\left(\overline{J}\right) \cap C^2\,(J)$.

На линии $y = 0$ выполняются условия сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,y) = \lim_{y\to 0-} u(x,y),$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y = \lim_{y\to 0-} u_y(x,y), 0 < x < 1.$$

Исследуемая задача BS имеет единственное решение такое, что $y^{1-\alpha}u(x,y) \in (\overline{\Omega_1})$,

$y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y \in C(\Omega_1 \cup \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\})$, $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega_2}\right)$, $u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $u_{yy} \in C\left(\overline{\Omega_2}\right)$. Единственность решения задачи следует из принципа экстремума, а при доказательстве существования решения применяется теория дифференциальных уравнений.

Литература

1. **С.Х. Геккиева** *"Аналог задача Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной"* // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 2001, N 2, С 78-80.

2. **А.А. Килбас, О.А.Репин** *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной.* – Дифференциальные уравнения, 2003, том 39, N 5, с. 638-644.

3. **Ruziev, M., Parovik, R., Zunnunov, R., Yuldasheva N.** *Non-Local Problems for the Fractional Order Diffusion Equation and the Degenerate Hyperbolic Equation.* // Fractal Fract. 2024, 8, 538. https://doi.org/10.3390/fractalfract8090538.

UDK 517.957

Об одной линейной обратной задачи для уравнения смешанного типа второго рода с дополнительным интегральным условием

С.З.Джамалов[1], Б.К.Сипатдинова[2]

[1]Институт математики имени В. И. Романовского при Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; siroj63@mail.ru

[2]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Каракалпакстан, Узбекистан; sbiybinaz@mail.ru

В данной работе рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи с полунелокальным краевым условием для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с дополнительным интегральным условием в ограниченном параллелепипеде. Для данной задачи методами ε-регуляризации, априорных оценок, последовательных приближений и сжимающихся отображения с применением метода Фурье

доказаны теоремы существования и единственности обобщённого решения в анизотропном пространстве Соболева [1].

В области $G = (0,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell)$ рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа второго рода второго порядка:

$$Lu = K(t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x,t)u = \psi(x,t,y), \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ - оператор Лапласа, и пусть $K(0) = K(T) = 0$. Здесь $\psi(x,t,y) = g_1(x,t,y) + h(x,t)f_1(x,t,y)$, $g_1(x,t,y)$ и $f_1(x,t,y)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит к определению.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0,T]$ не налагается никаких ограничений [2].

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x,t,y),\ h(x,t)\}$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие что, функция $u\,(x,t,y)$ удовлетворяет следующим полунелокальным краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0, \tag{4}$$

где $\gamma-$некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже, кроме того, для нахождения функции $h(x,t)$, решение задачи (1)-(4) удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_0^\ell \omega(y)u(x,t,y)\,dy = \varphi(x,t), \tag{5}$$

и функции $u(x,t,y)$ и $h(x,t)$ принадлежат классу

$$U = \{(u,h) \mid u \in W_2^{2,3}(G);\ h \in W_2^2(Q)\}.$$

Здесь через $W_2^{2,3}(G)-$ обозначено анизотропная пространства Соболева с нормой

$$[u]_{2,3}^2 \equiv \|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\mu_k^2\right)^3 \|u_k\,(x,t)\|^2_{W_2^2(Q)}, \tag{A}$$

где $W_2^2(Q)$- пространство Соболева, $u_k\,(x,t)$-есть коэффициент Фурье функции $u(x,t,y)$, по системам $Y_k(y) = \left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\mu_k y\right\}$, $\mu_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2$, $k = 1,2,3,...$

Определение. Обобщённым решением задачи (1)-(5) будем называть функцию удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду с условиями (2)-(5).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части и заданной функции;

Условие 1:

1. нелокальное условие: $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$, $\gamma \cdot g_1(x,0,y) = g_1(x,T,y)$, $\gamma \cdot f_1(x,0,y) = f_1(x,T,y)$.

2. гладкость: $[f_{1k}(x,t) \in C_{x,t}^{0,1}(\overline{Q})$, $|f(x,t)| = \left|\int_0^\ell \omega(y)f_1(x,t,y)dy\right| \geq \rho > 0$; $f_1 \in W_2^{3,3}(G)$,

$g_1 \in W_2^{3,3}(G)$.

3. $2a - |k_t| + \lambda k \geq \delta_1 > 0$, $\lambda c - c_t > \delta_2 > 0$ для всех $(x,t) \in Q$, где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$.

Условие 2: $\varphi(x,t) \in W_2^3(Q)$; $\quad \gamma D_t^q \varphi|_{t=0} = D_t^q \varphi|_{t=T}$, $q = 0,1,2$; $\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = 0$.

Введем следующее обозначения:

$$q \equiv M\,[f]_{2,3}^2\,, \quad \text{где} \quad M = 480 c_1 c_{23} \lambda^2 \delta_0^{-2} \rho^{-2} m \|\omega\|_{L_2[0,T]}, \quad m = \sqrt{mes(\overline{Q})}.$$

Здесь через $c_i (i = \overline{0,3})$ обозначено коэффициенты из теорем вложения Соболева:

Теорема. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполняются вышеуказанные условия 1 и 2, и пусть выполнено следующая неравенства: $q < 1$. Тогда существует единственное решение задачи (1) - (5) из указанного класса U.

Литература

1. **Джамалов С.З.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* Монография. Ташкент, 2021. с.176.

2. **Врагов В.Н.** *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: НГУ, 1983.

УДК 517.956.6

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА, ВИРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Жураев Ф. М.
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
fjm1980@mail.ru

Краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М. Нахушева [1], В.М.Казиева [2], Б. Исломова и Ф.Жураева [3]. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям.

Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию локальных краевых задач, для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в плоскости переменных x, y , ограниченная кривыми:

$$S_j : (-1)^{j-1}x = 1,\ (j = 1,2),\ 0 < y < 1,\ S_3 :\ 0 < x < 1, \quad y = 1,\ S_4 :\ -1 < x < 0, \quad y = 1,$$

$$\Gamma_j :\ (-1)^{j-1}x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad \Gamma_{j+2} :\ (-1)^{j-1}x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1,\ \ y \leq 0,$$

причем $m < 0$.

Введем обозначения $\quad \Omega_1^+ = \Omega \cap \{(x,y) :\ x > 0,\ y > 0\}$,

$$\Omega_2^+ = \Omega \cap \{(x,y) :\ x < 0,\ y > 0\},\ \Omega_1^- = \Omega \cap \{(x,y) :\ x > 0,\ y < 0\},$$

$$\Omega_2^- = \Omega \cap \{(x,y) :\ x < 0,\ y < 0\},\ \ I_1 = \{(x,y) :\ 0 < x < 1,\ y = 0\},$$

$$I_2=\{(x,y):\ -1<x<0,\ y=0\},\ I_3=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<1\},$$
$$\Omega_j=\Omega_j^+\cup\Omega_j^-\cup J_j,\ \Omega_3=\Omega_1^+\cup\Omega_2^-\cup J_3,\ A_j((-1)^{j+1},0)=\bar{I}_j\cap\bar{S}_j,$$
$$C_j\left[(-1)^{j+1}\frac{1}{2};\ -\left((-1)^{j+1}\frac{2-m}{4}\right)^{2/(2-m)}\right]=\bar{\Gamma}_j\cap\bar{\Gamma}_{j+2},\ (j=1,2),$$
$$O(0,0)=\bar{I}_1\cap\bar{I}_2,\ B_1(1,1)=\bar{S}_1\cap\bar{S}_3,\ B_2(-1,1)=\bar{S}_2\cap\bar{S}_4,\ B_0(0,1)=\bar{S}_3\cap\bar{S}_4.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases}u_{xx}-((-1)^{j-1}x)^p u_y-\rho_j u(x,0), & (x,y)\in\Omega_j^+,\\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\mu_j u(x,0), & (x,y)\in\Omega_j^-,\end{cases}\tag{1}$$

где $m,\quad p,\quad \rho_j,\quad \mu_j\ (j=1,2)$−любые действительные числа, причем

$$m<0,\ \ p>1,\ \ \rho_j>0,\ \ \mu_j<0,\ (j=1,2).\tag{2}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуются следующие задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^1(\Omega)\cap C^{2,1}_{x,y}\left(\Omega_1^+\cup\Omega_2^+\right)\cap C^2\left(\Omega_1^-\cup\Omega_2^-\right)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (**??**) в областях Ω_j^+ и $\Omega_j^-\ (j=1,2)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{S_j}=\varphi_j(y),0\le y\le 1,\tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_j}=\psi_j(x),\quad 0\le(-1)^{j+1}x\le\frac{1}{2},\ (j=1,2);\tag{4}$$

4) на линии вырождения $I_i\ (i=\overline{1,3})$ выполняется условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\ (x,0)\in I_j,\ (j=1,2),\tag{5}$$

$$\lim_{x\to+0}u_x(x,y)=\lim_{x\to-0}u_x(x,y),\ (x,0)\in I_3;\tag{6}$$

где $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\psi_1(x),\psi_2(x)$ −заданные функции, причем $\psi_1(0)=\psi_2(0)=0$,

$$\varphi_j(y)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\tag{7}$$

$$\psi_1(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad \psi_2(x)\in C^1\left[-\frac{1}{2},0\right]\cap C^3\left(-\frac{1}{2},0\right).\tag{8}$$

Задача 2(3). Найти функцию $u(x,y)$, обладающую всеми свойствами задачи 1 кроме условий (4), которые заменяются условиями

$$u|_{\Gamma_1}=g_1(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2},\ u|_{\Gamma_4}=g_2(x),\quad -1\le x\le-\frac{1}{2},$$
$$\left(u|_{\Gamma_2}=f_1(x),\quad -\frac{1}{2}\le x\le 0,\quad u|_{\Gamma_3}=f_2(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1\right),$$

где $g_1(x),\ g_2(x),\ (f_1(x),\ f_2(x))$ − заданные функции, причем $g_1(-1)=\varphi_2(0)=0,\ (f_2(1)=\varphi_2(0)=0)$,

$$g_1(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\ g_2(x)\in C^1\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(f_1(x) \in C^1\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cap C^3\left(-\frac{1}{2}, 0\right),\ f_2(x) \in C^1\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap C^3\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right).$$

Доказаны следующие теореммы.

Теорема. *Если выполнены условия (2), (7), (8), то в области* Ω *решение задачи для уравнения (1) существует и единственно.*

При доказательство единственности решения задачи 1 важную роль играет следующая лемма.

Леммы. *Если* $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0$, $\forall y \in [0,1]$, $\psi_1(x) \equiv 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, *и* $\psi_2(x) \equiv 0$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, *то*

$$\tau_j(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_j \quad (j = 1, 2).$$

Лемма доказывается с помощью метода интегралов энергии.

Доказательство теоремы существования решения задачи 1 основана на теории вольтерских и фредгольмских интегральных уравнений.

Замечание. Точно также как выше изложено, можно доказать теоремы единственность и существования решения задачи 2(3).

Литература

1. **Нахушев А.М.** *О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка.* Дифференциальные уравнения. **12**(1). - 1976. - 103-108 с.

2. **Казиев В.М.** *О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка.* Дифференциальные уравнения. **14**(1) - 1978. - 181-184 с.

3. **Исломов Б., Джураев Ф.** *Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа.* Узбекский математический журнал. **2** - 2011. - 75-85 с.

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Д.У. Жўраева[1]

[1]**Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан; jorayevadilnavoz683@gmail.com**

Обозначим через D область, ограниченную линиями $x - t = 0$, $x + t = 1$ и $t = 0$. В области D рассмотрим уравнение гиперболического типа с сингулярным коэффициентом

$$u_{tt} + \frac{2\beta}{t}u_t - u_{xx} - \frac{2\gamma}{x}u_x + \lambda u = f(x,t), \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – неизвестная функция, $\beta, \gamma, \lambda \in R$, причём $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$.

Для уравнения (1) рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача. Требуется найти функцию $u(x,t)$, принадлежащую классу u, $t^{2\beta}u_t \in C(\overline{D})$, u_{tt}, $u_{xx} \in C(D)$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и условиям

$$u(x,0) + \alpha\int_0^x u(1-\xi, 0)d\xi = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad \left[t^{2\beta}u_t(x,t)\right]\Big|_{t=0} = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $\varphi(x), \nu(x)$ – заданные функции, α – заданное отличное от нуля действительное число.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Если* $|\alpha| < 1$, $\varphi(x) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$, $\nu(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$ *и* $f(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, *то решение задачи существует, единственно и имеет вид*

$$u(x,t) = x^{-\gamma} \int_0^1 \big[x - t(1-y)\big]^{\gamma} \tau\big[x - t(1-y)\big]\, \Xi_2(\gamma, 1-\gamma; \beta; \omega, \sigma)\, dy -$$

$$- \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} 2^{-2\beta} t^{1-2\beta} x^{-\gamma} \int_0^1 \big[x - t(1-y)\big]^{\gamma} \nu\big[x - t(1-y)\big] \big[y(1-y)\big]^{-\beta} \times$$

$$\times\ \Xi_2(\gamma, 1-\gamma, 1-\beta; \omega, \sigma)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(\xi_1, s)(\xi_1/x)^{\gamma} (s/t)^{\beta}\, B_2^{(3)}(\gamma, \beta, 1-\gamma, 1-\beta, 1; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\, d\xi_1,$$

где

$$\omega = y(1-y)t^2 \Big/ \big\{x\big[x - t(1-y)\big]\big\}, \qquad \sigma = \theta y(1-y)(2t)^2,$$

$$B_2^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma; x, y, z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_2)_n (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma)_{m+n+p}\, m!\, n!\, p!}\, x^m y^n z^p,$$

$$\sigma_1 = -\frac{r^2}{4x\xi_1}, \qquad \sigma_2 = \frac{r^2}{4ts}, \qquad \sigma_3 = \frac{\lambda^2 r^2}{4}, \qquad r^2 = (\xi_1 - x)^2 - (s-t)^2,$$

$$\tau(x) = \varphi(x) + \alpha\, \frac{\cos(\alpha - \alpha x) - \sin(\alpha x)}{\cos\alpha} \int_0^1 \sin(\alpha s)\varphi(s)\, ds +$$

$$+ \frac{\alpha}{\cos\alpha} \int_x^1 \big[\sin(\alpha x)\cos(\alpha - \alpha s) - \sin(\alpha s)\cos(\alpha - \alpha x)\big]\varphi(s)\, ds +$$

$$- \frac{\alpha}{\cos\alpha} \int_{1-x}^1 \big[\sin(\alpha x)\sin(\alpha s) + \cos(\alpha - \alpha x)\cos(\alpha - \alpha s)\big]\varphi(s)\, ds.$$

Замечание. Если $\lambda = \beta = \gamma = 0$, то отсюда следует результат работы [1]; если $\lambda = \gamma = 0$ – результат работы [2].

Литература

1. **Usmonov D., Jurayeva D.** *Direct and inverse problems with integral conditions for the string vibration equation*, Acta NUUz, 2026, 2/2, pp. 198–208.

2. **Усмонов Д.А., Жўраева Д.У.** *Singulyar koeffitsiyentli giperbolik tipdagi tenglama uchun integral shartli masala* // Материалы научной конференции на тему «Современные проблемы теории математического анализа и дифференциальных уравнений». – Андижан, 2026. – 1 июня.

УДК 517.956.32

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И С МЛАДШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

Зуннунов Р. Т.[1,2], Паровик Р. И.[3], Худаёров А. А.[1,4]

[1]Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз, Ташкент,Узбекистан;

[2]Филиал РГУ Нефти и Газа (НИУ) имени И.М. Губкина в г. Ташкенте, Ташкент,Узбекистан;

zunnunov@mail.ru

[3]Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения РАН, Петропавлоск-Камчатский, Россия;

parovik@ikir.ru

[4]Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент,Узбекистан;

anvarxudoyorov1984@gmail.com

Исследованию краевых задач модельных уравнений смешанного типа первого рода, содержащих производные дробного порядка посвящены немало работ, например [1-3]. Поэтому актуальным остается вопрос рассмотрения краевых задач в неограниченных областях для уравнений смешанного типа второго рода с дробной производной и с младшей производной в гиперболической части.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D^{\gamma}_{0+,y}u, (y > 0, 0 < \gamma < 1) \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \alpha(-y)^{m-1}u_y, (y < 0, 0 < m < 1) \end{cases}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : y > 0,\ 0 < x < 1\}$, а Ω_2 - область полуплоскости , ограниченная отрезком $AB = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, y = 0\}$ и характеристиками $AC:\ x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0$, $BC:$ $x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1$, уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$. Здесь $D^{\gamma}_{0+,y}$- частная дробная производная Римана-Лиувилля [1].

Введем обозначения:

$J = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}, \beta = \frac{2\alpha - m}{2(2-m)}, -\frac{1}{2} < \beta < 0, m - 1 < \alpha < \frac{m}{2}$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача T. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(1,y) = \varphi_2(y), 0 \le y < +\infty,$$

$$u|_{AC} = \psi(x), x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{y \to 0+} y^{1-\alpha}u(x,y) = \lim_{y \to 0-} u(x,y), x \in \overline{J}$$

$$\lim_{y \to 0+} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y = \lim_{y \to 0-} u_y(x,y), x \in J,$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi(x)$ - заданные функции, причем $\psi(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^2(J), y^{1-\gamma}\varphi_1(y), y^{1-\gamma}\varphi_2(y) \in C\left(\overline{\Omega_2}\right)$ и выполнено условие согласования $\varphi(0) = \psi(0)$.

Решение $u(x,y)$ поставленной задачи будем искать в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций в области Ω таких что $\lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y)=0, y^{1-\alpha}u(x,y)\in\left(\overline{\Omega_1}\right), u(x,y)\in\left(\overline{\Omega_2}\right), y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y = C\left(\Omega_1\cup J\right), u_{xx}\in C\left(\Omega_1\cup\Omega_2\right), u_{yy}\in C\left(\Omega_2\right), (-y)^{\alpha}u_y\in C\left(\overline{\Omega_2}\right)$ Единственность решения задачи следует из принципа экстремума, а при доказательстве существования решения применяется теория дифференциальных уравнений дробного порядка. Проведена численная вуализация решения.

Литература

1. **С.Х. Геккиева** *"Аналог задача Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной"* // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 2001, N 2, С 78-80.

2. **А.А. Килбас, О.А.Репин** *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной.* – Дифференциальные уравнения, 2003, том 39, N 5, с. 638-644.

3. **Ruziev, M., Parovik, R., Zunnunov, R., Yuldasheva N.** *Non-Local Problems for the Fractional Order Diffusion Equation and the Degenerate Hyperbolic Equation.* // Fractal Fract. 2024, 8, 538. https://doi.org/10.3390/fractalfract8090538.

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Б. И. Исломов [1], Х. Г. Абсоатова [2]

[1]Национальный Университет Узбекистана имени М. Улугбека;
islomovbozor@yandex.com

[2]Наманганский Государственный Университет, г.Наманган, Узбекистан;
rhmtvfarhod@gmail.com

Благодарности. *Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект* ***Ф3-202009211, ТерГУ****).*

Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа целого порядка в прямоугольной области впервые были рассмотрены К.Б.Сабитовым [1], а уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка изучены в работах [2–3].

В данной работе для уравнения смешанного типа дробного порядка в смысле Капуто со спектральным параметром исследована краевая задача с граничным условием второго рода в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения поставленной задачи. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда, и доказана его сходимость в классе регулярных решений данного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$0=Lu\equiv\begin{cases} u_{xx}-{}_cD^{\alpha}_{0y}u-\lambda^2u, & (x,y)\in\Omega_1, \quad 0<\alpha\le 1,\\ u_{xx}-{}_cD^{\beta}_{y0}u-\lambda^2u & (x,y)\in\Omega_2, \quad 1<\beta\le 2\end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega=\{(x,y): 0<x<l, -p<y<q\}$, где $p>0, q>0$, l, $\lambda-$ заданные действительные числа, $\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y): 0<x<l, 0<y<q\}$,
$\Omega_2=\Omega\cap\{(x,y): 0<x<l, -p<y<0\}$, $J_0=\{(x,y): 0<x<l, y=0\}$,

$J_1 = \{(x,y) : x = 0,\ -p < y < q\}$, $J_2 = \{(x,y) : x = l,\ -p < y < q\}$, $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup J_0$, а ${}_cD^{\gamma}_{0y}-$ оператор дробного порядка в смысле Капуто [2, с. 14]:

$$ {}_cD^{\gamma}_{ay} f(y) = (sign(y-a))^k D^{\gamma-k}_{ay} f^{(k)}(y), \quad k-1 < \gamma \le k,\ \ k \in \mathrm{N}, \tag{2}$$

здесь $D^{\delta}_{ay} g(y)-$ интегро-дифференциальный оператор Римана-Лиувилля[2] порядка $\delta \in C$.

Класс C^{k}_{θ}**.** Через $C^{k}_{\theta}(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производных по θ до $k-$го порядка включительно в области M.

Задача SK_{λ}**.** Требуется найти функции $u(x,y)$ со следующими свойствами:

$$\begin{array}{l} u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{1}_{x}(\Omega \cup J_1 \cup J_2) \cup C^{2}_{x}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C^{2}_{y}(\Omega_2), \quad {}_cD^{\alpha}_{0y} u \in C(\Omega_1), \\ {}_cD^{\beta}_{0y} u \in C(\Omega_2),\ \ y^{1-\alpha} u_y(x,y) \in\ C(\Omega_1 \cup J_0), \quad u_y(x,y) \in\ C(\Omega_2 \cup J_0)\ , \end{array} \tag{3}$$

$$Lu(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{4}$$

$$u_x(0,y) = 0, \qquad u_x(l,y) = 0, \qquad -p \le y \le q\,, \tag{5}$$

$$u(x,-p) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l\,, \tag{6}$$

$$u(x,+0) = u(x,-0), \quad (x,0) \in \bar{J}_0, \quad \lim_{y\to+0} y^{1-\alpha} u_y(x,y) = \lim_{y\to+0} u_y(x,y), \quad (x,0) \in J_0, \tag{7}$$

где $\psi(x)$ $-$заданная достаточно гладкая функция, при этом $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Теперь найдем решения задачи SK_{λ}. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$u_0(y) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l u(x,y)dx, \qquad u_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x,y) cos\mu_n x dx,\ \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{8}$$

так как соответствующая одномерная спектральная задача по переменной x имеет систему собственных функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}},\ \sqrt{\frac{2}{l}} cos\mu_n x \right\}_{n=1}^{+\infty}. \tag{9}$$

Заметим, что система функций (9) полна и образует ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,l]$.

Аналогично как работе [3] для функций $u_n(y),\ \ n \in \mathrm{N}_0$ с учетом (1), (5) и (8), получаем следующую краевую задачу на сопряжение:

$${}_cD^{\alpha}_{0y} u_n(y) + \rho_n^2 u_n(y) = 0, \qquad 0 < y < q, \tag{10}$$

$${}_cD^{\beta}_{y0} u_n(y) + \rho_k^2 u_n(y) = 0, \qquad -p < y < 0, \tag{11}$$

$$u_n(0+0) = u_n(0-0), \quad u_n'(0+0) = u_n'(0-0), \tag{12}$$

$$u_0(-p) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l \psi(x)dx = \psi_0, \qquad u_n(-p) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) cos\mu_n x dx = \psi_n, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{13}$$

где $\rho_n = \sqrt{\mu_n^2 + \lambda^2}$, $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\alpha} u_{ny}(y) = u_n'(0+0)$, $n \in \mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \{0\}$.

Единственное решение задачи (10) $-$ (13) существует и определяется по формуле

$$u_n(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha)\psi_n}{\Delta_n(p,\beta)} E_{\alpha,1}(-\rho_n^2 y^{\alpha})\ , & 0 < y < q, \\ \frac{\Gamma(\alpha)\psi_n}{\Delta_n(p,\beta)} \left[\Gamma(\alpha) E_{\beta,1}(-\rho_n^2(-y)^{\beta}) - \rho_n^2 y E_{\beta,2}(-\rho_n^2(-y)^{\beta})\right], & -p < y < 0 \end{cases} \tag{14}$$

при условии, что при всех $\lambda > 0$ и $n \in \mathrm{N}_0$

$$\Delta_n(p,\beta) \equiv \Gamma(\alpha)E_{\beta,1}(-\rho_n^2 p^\beta) + \rho_n^2 p E_{\beta,2}(-\rho_n^2 p^\beta) \neq 0, \tag{15}$$

а при $\lambda = 0$ и $n = 0$ функция $u_0(y)$ имеет вид

$$u_0(y) = \psi_0, \quad -p \le y \le q, \tag{16}$$

где $E_{\omega,\gamma}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\omega n+\gamma)}$, z, δ, $\gamma \in C$, $Re(\omega) > 0$, $Re(\gamma) > 0$ функцией типа Миттаг – Леффлера [3].

Тогда решение задачи SK_λ можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{l}}\, u_0(y) \;+\; \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) cos\mu_n x \;, \tag{17}$$

где $u_n(y)$ определяются соответственно по формулам (14) и (16).

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи SK_λ, то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (15) при всех $n \in \mathrm{N}_0$.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,3$ и $\Delta_n(p,\beta) \ge c > 0$ при всех $n \in N$, а при $n = 0$ $\Gamma(\alpha)E_{\beta,1}(-\lambda p^\beta) + \lambda p E_{\beta,2}(-\lambda p^\beta) \neq 0$, то существует единственное решение задачи SK_λ и оно определяется рядом (17) принадлежащий к классу (3).*

С использованием методов общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, математического и спектрального анализа доказываются теоремы 1 и 2 (см. [1], с. 81–87).

Литература

1. **Сабитов К.Б.** *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболи-ческого типа.* Москва. 2016. "Наука". 271 с.

2. **Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh.** *On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain.* Lobachevskii J. of Math. 2020. **41**(9). P. 1801–1810.

3. **Исломов Б. И., Абсоатова Х. Г.** *Краевая задача для уравнения смешанного типа дробного порядка со спектральным параметром.* БухДУ илмий ахбороти. 2025. №12(129). С.179-184.

4. **Псху А.В.** *Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка.* Нальчик. 2005. 186 с.

UDC 517.958

Обратная задача определения функции источника для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

Исмоилов А. И.[1], Хайдаров И. У.[1]

[1] Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
ismoilovaxrorjon@yandex.com, ibrohim0902@gmail.com

Многие вырождающиеся дифференциальные уравнения и уравнения гиперболического типа с сингулярными коэффициентами посредством соответствующей замены независимых переменных сводятся к уравнениям типа Эйлера–Пуассона–Дарбу. В связи с этим исследование начальных и краевых задач для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу занимает важное место в теории вырождающихся дифференциальных уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами.

Задачи Коши, Дарбу и Коши–Гурса для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу исследовались во многих работах. В частности, использование функции Римана–Адамара в характеристическом треугольнике позволяет получить интегральные представления решений соответствующих задач [1–4].

В настоящей работе рассматривается обратная задача определения неизвестной функции источника, входящей в правую часть неоднородного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Правая часть уравнения рассматривается в виде $f(\xi)g(\eta)$, где функция $g(\eta)$ задана, а функция $f(\xi)$ подлежит определению. С использованием дополнительного краевого условия задача определения неизвестной функции $f(\xi)$ сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Устанавливаются существование и единственность решения полученного интегрального уравнения и однозначная разрешимость обратной задачи.

Пусть $0 < a < 1$ и $\Delta_a = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < a, \xi < \eta < 1\}$, $\overline{\Delta_a} = \{(\xi,\eta) : 0 \le \xi \le a, \xi \le \eta \le 1\}$, а $OA_a = \{(\xi,\eta) : \eta = \xi, \quad 0 \le \xi \le a\}$.

В области Δ_a рассмотрим уравнение

$$L(u) = u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\xi-\eta}(u_\xi - u_\eta) = f(\xi)g(\eta), \tag{1}$$

где $0 < \beta < 1/2$, $g \in C^1[0,1]$ — заданная функция, причем $g(z) \neq 0$, $z \in [0,1]$, а $u(\xi,\eta)$ и $f(\xi)$ — неизвестные функции.

Задача D_a**.** Найти пару функций $u \in C(\overline{\Delta_a}) \cap C^1(\Delta_a \cup OA_a)$, $f \in C[0,a]$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Δ_a и условиям

$$\lim_{\eta\to\xi+0}(\eta-\xi)^{2\beta}(u_\xi - u_\eta) = 0, \qquad 0 < \xi < a, \tag{2}$$

$$u(0,\eta) = 0, \qquad 0 \le \eta \le 1, \tag{3}$$

$$u(\xi,1) = w(\xi), \qquad 0 \le \xi \le a, \tag{4}$$

где $w \in C^1[0,a]$ — заданная функция, причем $w(0) = 0$.

Примем функцию $f(\xi)$ временно известной. Тогда задача (1)–(3) представляет собой прямую задачу Коши–Гурса для неоднородного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.

Воспользуемся представлением решения задачи Коши–Гурса, полученным методом Римана в работах [2, 3]. В рассматриваемом случае $\alpha = \beta$, $\nu(\xi) \equiv 0$, $\varphi(\eta) \equiv 0$ и правая часть уравнения имеет вид $\mathcal{F}(\xi,\eta) = f(\xi)g(\eta)$.

Поэтому из общей формулы решения следует

$$u(\xi,\eta) = \int_0^\xi f(t)\left[\int_t^\eta g(z)V(t,z;\xi,\eta)\,dz\right]dt, \tag{5}$$

где $V(t,z;\xi,\eta)$ — функция Римана–Адамара для уравнения (1) [2,3].

Подчиним представление (5) дополнительному условию (4). Тогда

$$w(\xi) = \int_0^\xi f(t)\left[\int_t^1 g(z)V(t,z;\xi,1)\,dz\right]dt. \tag{6}$$

Положим

$$Q(\xi,t)=\int\limits_t^1 g(z)V(t,z;\xi,1)\,dz,\qquad 0\le t\le\xi<a. \tag{7}$$

Тогда равенство (6) принимает вид

$$\int\limits_0^\xi Q(\xi,t)f(t)\,dt=w(\xi). \tag{8}$$

Таким образом, относительно неизвестной функции $f(\xi)$ получено интегральное уравнение Вольтерра первого рода.

Лемма 1. *Пусть* $0<\beta<1/2$, $g\in C^1[0,1]$ *и* $g(z)\ne0$ *для всех* $z\in[0,1]$. *Тогда*

$$V(\xi,z;\xi,1)=\left(\frac{z-\xi}{1-\xi}\right)^\beta,\qquad \xi\le z\le1,\quad 0\le\xi<1. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\bar g(\xi)=Q(\xi,\xi)=(1-\xi)^{-\beta}\int\limits_\xi^1 g(z)(z-\xi)^\beta\,dz, \tag{10}$$

причем $g\in C^1[0,1]$ *— заданная вещественнозначная функция, причем* $g(z)\ne0$ *для всех* $z\in[0,1]$.

Здесь $W_0(t,z;\xi,1)$ и $\widetilde{W}_0(t,z;\xi,1)$ — соответствующие ветви вспомогательной функции Римана–Адамара V_0, определенные в [2,3].

Лемма 2. *Пусть* $0<\beta<1/2$, $0<a<1$, $g\in C^1[0,1]$ *и* $g(z)\ne0$ *на* $[0,1]$. *Тогда функция* $Q(\xi,t)$, *определенная равенством (7), имеет непрерывную производную по* ξ *в* $D_a=\{(\xi,t):0\le t\le\xi\le a\}$, *причем*

$$Q_\xi(\xi,t)=G(\xi,t), \tag{11}$$

где

$$G(\xi,t)=\int\limits_t^\xi[g(z)+(z-t)g'(z)]\frac{\partial\widetilde{W}_0(t,z;\xi,1)}{\partial\xi}\,dz$$

$$+\int\limits_\xi^1[g(z)+(z-t)g'(z)]\frac{\partial W_0(t,z;\xi,1)}{\partial\xi}\,dz. \tag{12}$$

В частности, $Q,Q_\xi\in C(D_a)$.

В силу леммы 2 функцию $Q(\xi,t)$ можно дифференцировать по ξ. Дифференцируя равенство (8) и применяя формулу Лейбница, получим

$$Q(\xi,\xi)f(\xi)+\int\limits_0^\xi Q_\xi(\xi,t)f(t)\,dt=w'(\xi). \tag{13}$$

Следовательно,

$$\bar g(\xi)f(\xi)+\int\limits_0^\xi G(\xi,t)f(t)\,dt=w'(\xi). \tag{14}$$

Так как по лемме 1 $\bar{g}(\xi) \neq 0$, $0 \leq \xi < 1$, то из (14) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$f(\xi) + \int_0^{\xi} K(\xi, t) f(t)\, dt = F(\xi), \qquad 0 \leq \xi \leq a, \tag{15}$$

где

$$K(\xi, t) = \frac{G(\xi, t)}{\bar{g}(\xi)}, \tag{16}$$

$$F(\xi) = \frac{w'(\xi)}{\bar{g}(\xi)}. \tag{17}$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < a < 1$, $0 < \beta < 1/2$, $g \in C^1[0,1]$, $g(z) \neq 0$, $z \in [0,1]$, *и* $w \in C^1[0,a]$,$w(0) = 0$. *Тогда интегральное уравнение Вольтерра второго рода (15), где ядро* $K(\xi,t)$ *и свободный член* $F(\xi)$ *определены формулами (16), (17), имеет единственное решение* $f \in C[0,a]$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < a < 1$, $0 < \beta < 1/2$, $g \in C^1[0,1]$, $g(z) \neq 0$, $z \in [0,1]$, *и* $w \in C^1[0,a]$,$w(0) = 0$. *Тогда обратная задача* D_a *имеет единственное решение* $\{u(\xi,\eta), f(\xi)\}$, *где* $f \in C[0,a]$, *а функция* $u(\xi,\eta)$ *определяется формулой (5). При этом* $u(\xi,\eta)$ *удовлетворяет уравнению (1), условиям (2), (3) и дополнительному условию*

$$u(\xi, 1) = w(\xi), \qquad 0 \leq \xi \leq a.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уринов А.К., Исмоилов А.И.** *Задачи Дарбу и принцип абсолютного экстремума для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу* // Доклады АН РУз.. -2011, № 5, -С. 20-23.
2. **Ismoilov A.I.** *A Cauchy-Goursat problem for nonhomogeneous Euler-Poisson-Darboux equation, Bulletin of the Institute of Mathematics, 2021, Vol. 4, No. 4, pp. 93–105*
3. **Уринов А. К. , Исмоилов А. И.** *Задача Коши-Гурса для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и свойства её решения* Узбекский математический журнал, 2012, N2, -с.130-139.
4. **Исмоилов А.И.** *Задача Дарбу для неоднородного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу* // Бюллетень Института математики. 2022-г.-Vol. 5, №1,–С. 56-65.

УДК 517.957

Исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле с комплексным параметром

Исхоков С.А.[1], Рахмонов Б.А.[1]
[1]Институт математики им. академика А.Джураева НАНТ, Душанбе, Таджикистан;
sulaimon@mail.ru, bakhtovar-1989@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k. Обозначим через $u^{(k)}(x)$ обобщенную в смысле С.Л. Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k. Пусть $d(x) = (1+|x|^2)^{-1/2}$, r – натуральное, α, δ, p – вещественные числа и $1 \leq p < \infty$. Символом $W^r_{p,\alpha,\delta}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\left\| u;\, W^r_{p,\,\alpha,\,\delta}(\mathbb{R}^n) \right\| = \left\{ \left\| u;\, L^r_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^n) \right\|^p + \| u;\, L_{p,\,\delta}(\mathbb{R}^n) \|^p \right\}^{1/p},$$

Здесь и далее в этой работе в интегралах по всему пространству $\mathbb{R}^n$ мы опускаем символ $\mathbb{R}^n$.

Далее предположим, что $\delta \leq \alpha+r$, и для удобства записи символом $\overset{\circ}{H}_+$ обозначим замыкание класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в норме пространства $H_+ = W^r_{2,\alpha,\delta}(\mathbb{R}^n)$, а символом $\overset{\circ}{H}_-$ – пополнение пространства $H_0 = L_{2,\delta}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|f\|_- = \sup_{0\neq u\in \overset{\circ}{H}_+} \frac{|(f,\, u)_\delta|}{\|u\|_+}.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|_+$ – норма в пространстве H_+, и

$$(f,\, u)_\delta = \int d^{2\delta}(x) f(x)\overline{u(x)}dx \, -$$

скалярное произведение в H_0. Норму в пространстве H_0 обозначим через $\|\cdot\|_\delta$. Элементы пространства $\overset{\circ}{H}_-$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\overset{\circ}{H}_+$. Действие функционала $F \in \overset{\circ}{H}_-$ на функцию $u \in \overset{\circ}{H}_+$ будем обозначать через $< F,\, u >$. Таким образом, мы получили тройку плотно вложенных пространств $\overset{\circ}{H}_+ \to H_0 \to \overset{\circ}{H}_-$. Эту тройку называют (см. [1, гл.1]) оснащенным гильбертовым пространством, $\overset{\circ}{H}_+$ – позитивным, а $\overset{\circ}{H}_-$ – негативным пространствами.

На функциях $u,\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|,|l|\leq r} \left(d^{-|k|}a_{kl}u^{(k)},\, d^{-|l|}v^{(l)}\right)_{\alpha+r}, \tag{1}$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются ограниченными комплекснозначными измеримыми функциями.

Рассмотрим следующую вариационную задачу Дирихле, связанную с формой (1).

Задача D_λ**.** Для заданного функционала $F \in \overset{\circ}{H}_-$ требуется найти решение $u(x) \in \overset{\circ}{H}_+$ уравнения

$$B_\lambda[u,\, v] \overset{\text{def}}{=} B[u,\, v] + \lambda\,(u,\, v)_\delta =< F,\, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Отметим, что любое решение уравнения (2) называется обобщенным решением дифференциального уравнения

$$\sum_{|k|,|l|\leq r} (-1)^{|l|}\left(d^{2r+2\alpha-|k|-|l|}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\right)^{(l)} + \lambda d^{2\delta}(x)u(x) = F, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Наряду с формой (1) вводим следующую функцию

$$A(x,\, \zeta) = \sum_{|k|,|l|\leq r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l},$$

определенную для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leq r}$.

Предположим, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leq r}$ выполнены условия

$$|\arg A(x,\, \zeta)| < \varphi, \tag{3}$$

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \leq M_1 \mathrm{Re}\,\{\gamma(x)A(x,\, \zeta)\}, \tag{4}$$

где φ – некоторое число из интервала $(\pi/2,\ \pi)$, $\gamma(x)$ – всюду непрерывная, отличная от нуля комплекснозначная функция со следующим свойством: для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu \tag{5}$$

для всех $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| > R_\nu$, $|y| > R_\nu$.

Здесь и далее считается, что функция $\arg z$ принимает значения из $(-\pi,\ \pi]$.

Основным результатом работы является:

Теорема. *Пусть $\delta \le \alpha + r$ и выполнены условия (3) – (5). Тогда для любого замкнутого сектора $S \subset \{z \in C : |arg\, z| < \pi - \varphi\} \cup \{0\}$ с вершиной в нуле найдется положительное число σ такое, что если $\lambda \in S$ и $|\lambda| \ge \sigma_0$, то для любого заданного функционала $F \in \mathring{H}_-$ задача D_λ имеет единственное решение, и при этом справедлива оценка*

$$\|u\|_+ \le M_2 \|F\|_- ,$$

где число $M_2 > 0$ не зависит от $\lambda \in S$ и функционала F.

В сформулированных выше условиях полуторалинейная интегро-дифференциальная форма (1) в общем случае не является коэрцитивной относительно пространств $\mathring{H}_+$ и H_0. Исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивными формами, сопряжено со многими техническими трудностями, и сравнительно мало изучено (см. [2-5] и имеющуюся в них библиографию).

Разрешимость задачи D_λ в случае $\delta = r + \alpha$ и вещественных значений λ ранее изучалась в работе авторов [6].

Литература

1. **Березанский Ю.М.** *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* Киев: Наукова Думка, 1965.

2. **Бойматов К.Х.** *Обобщенная задача Дирихле, связанная с некоэрцитивной билинейной формой.* Доклады Академии наук (Россия). 1993, Т. 330, №3, С. 285–290.

3. **Бойматов К.Х., Исхоков С.А.** *О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой.* Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 1997, Т. 214, С. 107–134.

4. **Исхоков С.А.** *Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами.* Доклады Академии наук (Россия), 2003, Т. 392, №5, С. 606–609.

5. **Рахмонов Б.А.** *О гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной формой во всем пространстве.* Доклады АН РТ, 2018, Т. 61, № 9-10. С. 736–741.

6. **Исхоков С.А., Рахмонов Б.А.** *О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве.* Доклады АН РТ, 2018, Т. 61, № 3. С. 224–230.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА КЕЛДЫША ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Каримов К. Т.[1,2], **Азимова Т. Э.**[3]

[1]**Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;**

[2]Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан; e-mail: karimovk80@mail.ru

[3]Кокандский университет, Коканд, Узбекистан; e-mail: azimovatoyibaxon@gmail.com

В параллелепипеде

$$\Omega = (0,a)\times(-b_0,b)\times(0,c), \qquad a,b_0,b,c>0,$$

рассматривается нагруженное уравнение смешанного типа

$$\left(B^x_{\alpha-1/2} + \operatorname{sgn} y\, B^y_{\beta-1/2} + B^z_{\gamma-1/2}\right) u(x,y,z) + C(y)u(x,0,z) = 0, \tag{1}$$

где

$$B^s_q = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2q+1}{s}\frac{\partial}{\partial s}, \qquad 0<\beta<\frac{1}{2}, \quad \alpha,\gamma\ge\frac{1}{2},$$

а $C(y) = C_1(y)$ при $y>0$ и $C(y) = C_2(y)$ при $y<0$. Требуется найти функцию u, ограниченную при $x\to 0+$ и $z\to 0+$, удовлетворяющую уравнению (1), условиям

$$\begin{aligned} u(a,y,z) &= 0, \qquad u(x,y,c) = 0,\\ u(x,-b_0,z) &= f_1(x,z), \qquad u(x,b,z) = f_2(x,z) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y,z) = \lim_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(x,y,z). \tag{3}$$

и естественным условиям Келдыша

$$\lim_{x\to0+} x^{2\alpha}u_x = 0, \qquad \lim_{z\to0+} z^{2\gamma}u_z = 0. \tag{4}$$

Положим $\nu = \alpha - \frac{1}{2}$, $\varkappa = \gamma - \frac{1}{2}$. Ограниченность на сингулярных гранях выделяет регулярные ветви бесселевых решений. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} X_n(x) &= N_{\alpha n}^{-1/2} x^{-\nu} J_\nu\left(\frac{j_{\nu,n}}{a}x\right), \quad \mu_n = \left(\frac{j_{\nu,n}}{a}\right)^2,\\ Z_m(z) &= N_{\gamma m}^{-1/2} z^{-\varkappa} J_\varkappa\left(\frac{j_{\varkappa,m}}{c}z\right), \quad \eta_m = \left(\frac{j_{\varkappa,m}}{c}\right)^2, \end{aligned} \tag{5}$$

где $j_{\sigma,k}$ — k-й положительный нуль функции J_σ,

$$N_{\alpha n} = \frac{a^2}{2}J^2_{\nu+1}(j_{\nu,n}), \qquad N_{\gamma m} = \frac{c^2}{2}J^2_{\varkappa+1}(j_{\varkappa,m}).$$

Система $\{X_n(x)Z_m(z)\}$ полна и ортонормирована в пространстве $L_2((0,a)\times(0,c); x^{2\alpha}z^{2\gamma})$.

Разлагая искомое решение по этой системе и обозначая $\lambda_{nm} = \mu_n + \eta_m$, получаем для каждой моды уравнение

$$\operatorname{sgn} y\left(Q''_{nm} + \frac{2\beta}{y}Q'_{nm}\right) - \lambda_{nm}Q_{nm} + C(y)Q_{nm}(0) = 0. \tag{6}$$

Пусть $\delta = \frac{1}{2} - \beta$ и $\rho = \sqrt{\lambda}$. При $y>0$ однородная часть (6) имеет фундаментальную систему $y^\delta I_{\beta-1/2}(\rho y)$, $y^\delta K_{\beta-1/2}(\rho y)$, а при $y<0$ — систему $(-y)^\delta J_{\beta-1/2}(\rho(-y))$, $(-y)^\delta \overline{Y}_{\beta-1/2}(\rho(-y))$, где

$$\overline{Y}_{\beta-1/2}(s) = \frac{\pi}{2\cos\pi\beta}[J_{\beta-1/2}(s) + J_{1/2-\beta}(s)].$$

Метод вариации постоянных с вольтерровыми интегралами, содержащими C_1 и C_2, даёт два решения Φ_λ, Ψ_λ, которые непрерывны при $y = 0$ и удовлетворяют условию сопряжения (3).

Для $\lambda = \lambda_{nm}$ введём обозначения

$$\begin{array}{ll} P_{nm} = \Phi_{\lambda_{nm}}(b), & Q_{nm} = \Psi_{\lambda_{nm}}(b), \\ R_{nm} = \Phi_{\lambda_{nm}}(-b_0), & S_{nm} = \Psi_{\lambda_{nm}}(-b_0), \end{array} \qquad \Delta_{nm} = P_{nm}S_{nm} - Q_{nm}R_{nm}. \tag{7}$$

При $\Delta_{nm} \neq 0$ положим

$$H^{(1)}_{nm}(y) = \frac{P_{nm}\Psi_{\lambda_{nm}}(y) - Q_{nm}\Phi_{\lambda_{nm}}(y)}{\Delta_{nm}}, \quad H^{(2)}_{nm}(y) = \frac{S_{nm}\Phi_{\lambda_{nm}}(y) - R_{nm}\Psi_{\lambda_{nm}}(y)}{\Delta_{nm}}. \tag{8}$$

Тогда $H^{(1)}_{nm}(-b_0) = 1$, $H^{(1)}_{nm}(b) = 0$, $H^{(2)}_{nm}(-b_0) = 0$, $H^{(2)}_{nm}(b) = 1$.

Коэффициенты граничных данных определяются равенствами

$$f_{j,nm} = \int_0^a \int_0^c f_j(x,z) X_n(x) Z_m(z) x^{2\alpha} z^{2\gamma}\, dz\, dx, \qquad j = 1, 2. \tag{9}$$

Теорема. Пусть $\Delta_{nm} \neq 0$ для всех $n, m \geq 1$ и существуют постоянные $d_0 > 0$, $\chi \geq 0$ такие, что

$$|\Delta_{nm}| \geq d_0 e^{\sqrt{\lambda_{nm}}b}(1 + \sqrt{\lambda_{nm}})^{-\chi}.$$

Если граничные функции удовлетворяют условиям согласования и

$$\sum_{n,m\geq 1} (1 + \sqrt{\lambda_{nm}})^{\alpha+\gamma+\chi+8}(|f_{1,nm}| + |f_{2,nm}|) < \infty,$$

то задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение

$$u(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z)\big[f_{1,nm}H^{(1)}_{nm}(y) + f_{2,nm}H^{(2)}_{nm}(y)\big]. \tag{10}$$

Доказательство. Разложение по системе (5) сводит задачу к независимым задачам (6), определители которых равны Δ_{nm}. Оценка снизу компенсирует малые знаменатели, а условие на $f_{j,nm}$ обеспечивает по признаку Вейерштрасса равномерную сходимость ряда (10) вместе с необходимыми производными. Полнота системы (5) даёт условия (2), а $\Delta_{nm} \neq 0$ — единственность решения.

Если $\Delta_{nm} = 0$ для конечного числа пар индексов, задача разрешима тогда и только тогда, когда для каждой резонансной пары выполнено условие $P_{nm}f_{1,nm} = R_{nm}f_{2,nm}$. В этом случае к частному решению можно добавить соответствующую конечную линейную комбинацию нетривиальных решений однородной задачи.

Литература

1. **Келдыш М. В.** *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области.* Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77, № 2. – С. 181–183.

2. **Каримов К. Т.** *Задача Келдыша для трёхмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами.* Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2021. – Т. 34, № 1. – С. 29–46.

3. **Каримов К. Т., Шокиров А.** *Задача для трёхмерного уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* International Journal of Applied Mathematics. – 2024. – Т. 37, № 1. – С. 73–92.

УДК 517.948

Коэрцитивные оценки и разделимость для оператора шестого порядка

Каримов О.Х.[1], Набиев Дж.И.[1]
[1]Институт математики им. академика А.Джураева НАНТ, Душанбе, Таджикистан;
karimov_olim@mail.ru

Термин "Разделимость"ввели английские математики В.Н.Эверитт и М.Гирц. Они очень подробно изучали разделимость оператора Штурма - Лиувилля и его степеней (см. [1-2] и имеющиеся там ссылки). В данной работе рассматривается дифференциальный оператор в частных производных шестого порядка в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$ и обобщаются результаты работы [3] в случае операторов более высокого порядка.

В пространстве $L_2(R^n)$ рассмотрим дифференциальный оператор следующего вида

$$L[u]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^6 u(x)}{\partial x_i^6}+V(x)u(x),\qquad u(x)\in W_{2,loc}^6(R^n), \tag{1}$$

где $V(x)$ - положительная функция.

Определение. Будем говорить, что функция $V(x)$ принадлежит классу $N_{\sigma_1,\sigma_2}^{\sigma_3}$, если выполняются следующие условия для всех $x\in R^n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|V^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial^3 V(x)}{\partial x_i^3}V^{-1}(x)\right\|\le\sigma_1,$$

$$\left\|V^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i^2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|\le\sigma_2\left\|V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x_i^3}\right\|,$$

$$\left\|V^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right\|\le\sigma_3\left\|V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x_i^3}\right\|.$$

Сформулируем основной результат работы. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть функция $V(x)$ принадлежит классу $N_{\sigma_1,\sigma_2}^{\sigma_3}$. Тогда при выполнении условий*

$$\sigma_1+3\sigma_2+3\sigma_3<2\ \ ,$$

уравнение (1) разделяется в пространстве $L_2(R^n)$, и для всех решений $u(x)\in L_2(R^n)\cap W_{2,loc}^6(R^n)$ уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^6 u(x)}{\partial x_i^6}+V(x)u(x)=f(x)$$

с правой частью $f(x)\in L_2(R^n)$ выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^6 u(x)}{\partial x_i^6};L_2(R^n)\|+\|V(x)u(x);L_2(R^n)\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\|V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u^3(x)}{\partial x_i^3};L_2(R^n)\|\le M\|f(x);L_2(R^n)\|,$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

Литература

1. **Everitt W.N.,Gierz M.** *On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions.* Proc.London Math.Soc., 1972, v.24, pp.149-170.
2. **Everitt W.N.,Gierz M.** *Inequalities and separation for Schrodinger type operators in* $L_2(R^n)$. Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A, 1977, v.79 pp.149-170.
3. **Каримов О.Х., Набиев Дж.И.** *Коэрцитивные оценки и разделимость для оператора четвертого порядка в весовом пространстве.* Доклады Национальной академии наук Таджикистана, 2024, №68(6), с.528-536.

UDK 517.956.3

Задача Коши для уравнения, распадающегося на волновые множители, с оператором Бесселя

Karimov Sh. T. [1], **Ismoilov M. X.** [2]
[1]**Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;**
[1]**shaxkarimov@gmail.com;**
[2]**Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;**
[2]**ismoilovmuxtorjon50@gmail.com**

В области $\Omega = \{(x,y)\ x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ рассмотрим уравнение, распадающееся на два волновых множителя с оператором Бесселя, в виде

$$L_{\delta_2} L_{\delta_1} u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

где

$$L_{\delta_i} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\delta_i}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = B^{(y)}_{\delta_i} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \delta_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,$$

причём $\delta_i > 0$.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\left(B^{(y)}_{-\frac{1}{2}+\delta_2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(B^{(y)}_{-\frac{1}{2}+\delta_1} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Задача Коши для уравнения (1) ставится в следующей формулировке.

Задача Коши. Найти в области Ω решение $u \in C^3(\widetilde{\Omega}) \cup C^4(\Omega)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$u|_{y=0} = \tau_1(x), \quad y^{\delta_1} u_y|_{y=0} = \nu_1(x), \quad u_{yy}|_{y=0} = \tau_2(x), \quad y^{\delta_2} u_{yyy}|_{y=0} = \nu_2(x), \tag{2}$$

где $\widetilde{\Omega} = \{(x,y)\ x \in \mathbb{R},\ y \geq 0\}$.

В силу линейности уравнения (1) решение ищем в виде $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$, где $u_1(x,y)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_1|_{y=0} = \tau_1(x), \quad u_{1y}|_{y=0} = 0, \quad u_{1yy}|_{y=0} = \tau_2(x), \quad u_{1yyy}|_{y=0} = 0, \tag{3}$$

а функция $u_2(x,y)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_2|_{y=0} = 0, \quad y^{\delta_1} u_{2y}\Big|_{y=0} = \nu_1(x), \quad u_{2yy}|_{y=0} = 0, \quad y^{\delta_2} u_{2yyy}|_{y=0} = \nu_2(x). \tag{4}$$

Сначала решим задачу (1),(3). Решение уравнения (1) будем искать в виде двукратного оператора Эрдейи–Кобера:

$$u(x,y) = I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} v(x,y), \tag{5}$$

где $v\,(x,y)$ — неизвестная функция, $I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_i}$ — оператор Эрдейи–Кобера, который имеет вид

$$I^{(y)}_{\eta,\delta_i} f\,(x,y) = \frac{2y^{-2(\eta+\delta_i)}}{\Gamma\,(\delta_i)} \int\limits_0^y \left(y^2-\xi^2\right)^{\delta_i-1} \xi^{2\eta+1} f\,(x,\xi)\,d\xi.$$

Равенство (5) можно представить в виде

$$u(x,y) = \frac{2}{\Gamma(\delta_1+\delta_2)} \int\limits_0^1 (1-\sigma^2)^{\delta_1+\delta_2-1}\, {}_2F_1\left(\delta_1,\delta_2;\delta_1+\delta_2;1-\sigma^2\right) v(x,y\sigma)\,d\sigma. \tag{6}$$

Теперь, подставляя выражение (5) в уравнение (1), получаем

$$\left(B^{(y)}_{-\frac{1}{2}+\delta_2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[B^{(y)}_{\frac{1}{2}+\delta_1} u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right] = 0.$$

Обозначим $w = I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} v$, $\;u_1 = I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} w$, тогда

$$\left(B^{(y)}_{-\frac{1}{2}+\delta_2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2}\left(I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} B^{(y)}_{-\frac{1}{2}} v(x,y)\right) - I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2}\left(I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,y)\right)\right] = 0,$$

$$B^{(y)}_{-\frac{1}{2}+\delta_2} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} v_{yy}(x,y) - B^{(y)}_{-\frac{1}{2}+\delta_2} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} v_{xx}(x,y)$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial x^2} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} v_{yy}(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} v_{xx}(x,y) = 0,$$

$$I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} B^{(y)}_{-\frac{1}{2}} v_{yy}\,(x,y) - I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} B^{(y)}_{-\frac{1}{2}} v_{xx}\,(x,y)$$

$$- I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{yy}\,(x,y) + I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{xx}\,(x,y) = 0,$$

$$I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2}\left[B^{(y)}_{-\frac{1}{2}} v_{yy}\,(x,y) - B^{(y)}_{-\frac{1}{2}} v_{xx}\,(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{yy}\,(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{xx}\,(x,y)\right] = 0,$$

$$I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_1} I^{(y)}_{-\frac{1}{2},\delta_2}\left[\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right] = 0.$$

Отсюда получаем следующее:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 v(x,y) = 0. \tag{7}$$

Теперь, подчиняя выражение (6) условиям (3), получаем условия относительно $v(x,y)$. Для этого при $y=0$ рассмотрим последовательно u, u_y, u_{yy}, u_{yyy}:

$$u\big|_{y=0} = \frac{2}{\Gamma(\delta_1+\delta_2)}\int_0^1 (1-\sigma^2)^{\delta_1+\delta_2-1}\,{}_2F_1(\delta_1,\delta_2;\delta_1+\delta_2;1-\sigma^2)\,v(x,0)\,d\sigma = \tau_1(x),$$

откуда, вычисляя интеграл,

$$v(x,0) = \frac{1}{\pi}\Gamma\left(\delta_1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\delta_2+\frac{1}{2}\right)\tau_1(x) = \widetilde{\tau}_1(x);$$

аналогично

$$v_y(x,0) = 0,$$
$$v_{yy}(x,0) = \frac{4}{\pi}\Gamma\left(\delta_1+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\delta_2+\frac{3}{2}\right)\tau_2(x) = \widetilde{\tau}_2(x);$$
$$v_{yyy}(x,0) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: найти решение уравнения

$$v_{yyyy}(x,y) - 2v_{xxyy}(x,y) + v_{xxxx}(x,y) = 0 \tag{8}$$

при условиях

$$v(x,y)\big|_{y=0} = \widetilde{\tau}_1(x), \qquad v_{yy}(x,y)\big|_{y=0} = \widetilde{\tau}_2(x), \tag{9}$$

$$v_y(x,y)\big|_{y=0} = 0, \qquad v_{yyy}(x,y)\big|_{y=0} = 0, \tag{10}$$

где

$$\widetilde{\tau}_1(x) = \frac{1}{\pi}\Gamma\left(\delta_1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\delta_2+\frac{1}{2}\right)\tau_1(x), \qquad \widetilde{\nu}_1(x) = 0,$$
$$\widetilde{\tau}_2(x) = \frac{4}{\pi}\Gamma\left(\delta_1+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\delta_2+\frac{3}{2}\right)\tau_2(x), \qquad \widetilde{\nu}_2(x) = 0.$$

Решение задачи (8),(9),(10) имеет следующий вид:

$$v(x,y) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\tau}_1(x+y)+\widetilde{\tau}_1(x-y)\right] - \frac{1}{4}y\left[\widetilde{\tau}_1'(x+y)-\widetilde{\tau}_1'(x-y)\right] + \frac{1}{4}y\int_{x-y}^{x+y}\widetilde{\tau}_2(t)\,dt. \tag{11}$$

Для решения задачи (1),(4) воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Если $u_1(x,y;1-\delta_1)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям (3), в котором δ_1 заменена на $1-\delta_1$, то функция $u_2(x,y;\delta_2) = y^{1-2\delta_2}u_1(x,y;1-\delta_2)$ при $0<\delta_2<\frac{1}{2}$ будет решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям (4).

Литература

1. **Уринов А.К., Ситник С.М., Шишкина Э.Л., Каримов Ш.Т.** Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения): учебное пособие. — Фергана: изд-во «Фаргона», 2022. — 192с.

2. **Kiryakova V.** [название работы не указано в исходном материале]. Institute of Mathematics — Bulgarian Academy of Sciences, P.O. Box 373, Sofia – 1090, Bulgaria.

3. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688с.

УДК 517.9

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ

Косимова М. Ш.[1]
[1]**Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;**
e-mail: marjonakasimova14@gmail.com

Уравнения с производными дробного порядка применяются при моделировании аномальной диффузии. Основные определения и свойства дробных производных приведены в [1]. Для периодических по времени процессов естественно использовать дробную производную Вейля. В работах [2,3] исследована задача Коши для однородного уравнения с производной Вейля и установлена связь ее разрешимости с классами Жевре.

В настоящих тезисах рассматривается неоднородное уравнение

$$\partial_t^\alpha u(x,t) = u_{xx}(x,t) + F(x,t), \qquad 0 < x < d, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

с условиями Коши

$$u(0,t) = f(t), \qquad u_x(0,t) = g(t). \tag{2}$$

Предполагается, что $0 < \alpha < 2$, а функции f, g и $F(x,\cdot)$ являются 2π-периодическими по переменной t. Через $H^0 = H^0[-\pi,\pi]$ обозначим пространство функций из $L_2[-\pi,\pi]$ с нулевым средним. Если

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

то дробная производная Вейля порядка α определяется равенством

$$\partial_t^\alpha h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \left[a_k \cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]. \tag{3}$$

Положим $h_k = (a_k, b_k)$, $T_k(t) = (\cos kt, \sin kt)$ и введем матрицу

$$J^\beta = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi\beta}{2} & \sin\dfrac{\pi\beta}{2} \\ -\sin\dfrac{\pi\beta}{2} & \cos\dfrac{\pi\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда формулу (3) можно записать в виде

$$\partial_t^\alpha h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha (J^\alpha h_k) \cdot T_k(t). \tag{4}$$

Разложим правую часть и решение уравнения (1) в ряды Фурье:

$$F(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) \cdot T_k(t), \qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) \cdot T_k(t).$$

Обозначая

$$A_k = k^{\alpha/2} J^{\alpha/2},$$

для каждого номера k получаем матричную задачу Коши

$$U_k''(x) - A_k^2 U_k(x) = -F_k(x), \qquad U_k(0) = f_k, \quad U_k'(0) = g_k. \tag{5}$$

Для выделения влияния правой части введем оператор $Q_{\alpha,d}$, задаваемый по коэффициентам Фурье равенством

$$(Q_{\alpha,d}F)_k(x) = \frac{1}{2}A_k^{-1}\int_0^d e^{-|x-s|A_k}F_k(s)\,ds. \tag{6}$$

Так как при $0 < \alpha < 2$

$$\cos\frac{\pi\alpha}{4} > 0,$$

матрица e^{-rA_k} при $r > 0$ содержит экспоненциально убывающий множитель

$$\exp\left\{-rk^{\alpha/2}\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right\}.$$

Поэтому при достаточной регулярности функции F ряд, определяемый формулой (6), сходится в соответствующих пространствах Соболева. Непосредственным дифференцированием получаем

$$\partial_t^\alpha(Q_{\alpha,d}F) = \partial_x^2(Q_{\alpha,d}F) + F. \tag{7}$$

Если

$$I_k(F) = \int_0^d e^{-sA_k}F_k(s)\,ds,$$

то следы частного решения при $x = 0$ имеют вид

$$(Q_{\alpha,d}F)_k(0) = \frac{1}{2}A_k^{-1}I_k(F), \qquad \frac{d}{dx}(Q_{\alpha,d}F)_k(0) = \frac{1}{2}I_k(F). \tag{8}$$

Положим

$$w(x,t) = u(x,t) - Q_{\alpha,d}F(x,t).$$

В силу (7) функция w удовлетворяет однородному уравнению

$$\partial_t^\alpha w = w_{xx}. \tag{9}$$

Используя (2) и (8), для коэффициентов Фурье граничных данных функции w получаем

$$w_k(0) = f_k - \frac{1}{2}A_k^{-1}I_k(F), \qquad w_k'(0) = g_k - \frac{1}{2}I_k(F). \tag{10}$$

Следовательно, условие согласования, определяющее разрешимость задачи, задается коэффициентами

$$\Psi_k = f_k + A_k^{-1}g_k - A_k^{-1}\int_0^d e^{-sA_k}F_k(s)\,ds. \tag{11}$$

Положим

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k\cdot T_k(t). \tag{12}$$

В неоднородном случае в условие Жевре входит также интегральный вклад правой части F. При $\sigma \geq 1$ функцию h будем относить к классу Жевре $G_2^\sigma[-\pi,\pi]$, если существуют постоянные $C > 0$, $M > 0$ такие, что для всех $\beta > 0$

$$\|\partial_t^\beta h\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leq CM^\beta[\Gamma(\beta+1)]^\sigma. \tag{13}$$

Для уравнения (1) естественный показатель Жевре равен

$$\sigma = \frac{2}{\alpha}. \tag{14}$$

Введем величину

$$M_{\alpha,d} = \left(\frac{2}{\alpha d \cos(\pi\alpha/4)} \right)^{2/\alpha}. \tag{15}$$

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 2$, $\sigma = 2/\alpha$, функции $f, g \in H^0[-\pi, \pi]$, а

$$F \in C([0,d]; G_2^\sigma[-\pi,\pi]),$$

причем оценки Жевре для $F(x,\cdot)$ выполняются равномерно по $x \in [0,d]$. Если функция Ψ, определенная формулами (11), (12), принадлежит $G_2^\sigma[-\pi,\pi]$ и оценка (13) для нее выполняется с некоторым параметром

$$M < M_{\alpha,d}, \tag{16}$$

то задача (1), (2) имеет единственное 2π-периодическое по t решение на интервале $0 < x < d$ в рассматриваемом классе. Обратно, существование такого решения влечет принадлежность функции Ψ классу $G_2^{2/\alpha}[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Формула (6) задает частное решение неоднородного уравнения. После замены $w = u - Q_{\alpha,d}F$ задача (1), (2) сводится к однородной задаче (9), (10). Для явного оператора типа Пуассона след, соответствующий второму граничному условию, на k-й гармонике равен $-A_k^{-1}w_k'(0)$. Поэтому функция согласования для однородной задачи имеет коэффициенты

$$w_k(0) + A_k^{-1}w_k'(0) = \Psi_k.$$

Далее применяются оценки матричной экспоненты и критерий разрешимости однородной задачи в классах Жевре, полученный в [2,3]. Условие (16) эквивалентно неравенству

$$d < \frac{2}{\alpha M^{\alpha/2}\cos(\pi\alpha/4)},$$

которое обеспечивает сходимость рядов Фурье решения и его необходимых производных на каждом компактном подынтервале $(0,d)$. Единственность следует из единственности решения матричной задачи для каждой гармоники Фурье. Необходимость получается тем же сведением к однородной задаче. Теорема доказана.

Таким образом, неоднородность сохраняет показатель Жевре $2/\alpha$ и порог $M_{\alpha,d}$, изменяя условие согласования интегральным вкладом F. При $F \equiv 0$ получаем однородный случай.

Литература

1. **Samko St.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** *Fractional integrals and derivatives: theory and applications.* New York: Gordon and Breach, 1993. 976 p.

2. **Алимов Ш.А.** *О разрешимости в классах Жевре задачи Коши для уравнения с дробной производной Вейля.* Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 523. С. 27–30.

3. **Alimov S.A.** *On the solvability of the Cauchy problem in Gevrey classes for the equation with Weyl fractional derivative.* Uzbek Mathematical Journal. 2025. Vol. 69. Issue 2. P. 10–22.

УДК 517.927

Двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения, вырождающегося внутри области

Каримов К. Т.[1], Олимова Д. С.[2]
[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан; karimovk80@mail.ru,
[2]Ферганский военно-академический лицей Министерства обороны школа Темурбеков, Фергана, Узбекистан; dilfuzaolimova406@gmail.com

Требуется найти решение $Q(y)$ уравнения

$$Q''(y) + \frac{2\beta}{y}Q'(y) - \big(d\operatorname{sgn} y + \lambda\big)Q(y) = 0,\ y \in (-a,0)\cup(0,b), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$Q(0+0) = Q(0-0), \qquad \lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}Q'(y) = \lim_{y\to+0} y^{2\beta}Q'(y), \tag{2}$$

$$Q(-a) = f_1, \qquad Q(b) = f_2, \tag{3}$$

где $\beta \in (0,1/2)$, $a,b,d,\lambda \in \mathbb{R}^+$, $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$ произвольны.

Уравнение (1) вырождается в точке $y = 0$, и в силу множителя $\operatorname{sgn} y$ имеет разный характер при $y > 0$ и $y < 0$; такие задачи относятся к неклассическим. Ниже задача (1)-(3) решается отдельно для случаев $\lambda > d$, $\lambda = d$ и $0 < \lambda < d$.

Лемма. *При $y > 0$ уравнение (1) не зависит от знака $\lambda - d$ и его решение, ограниченное вместе с $y^{2\beta}Q'$ при $y \to 0$, есть*

$$Q(y) = y^{1/2-\beta}\big[A_1 I_{\beta-1/2}(\sigma_1 y) + A_2 I_{1/2-\beta}(\sigma_1 y)\big], \quad \sigma_1 = \sqrt{\lambda + d}, \quad y \in (0,b), \tag{4}$$

причём, используя $I_\nu(z) \sim (z/2)^\nu/\Gamma(\nu+1)$ при $z \to 0$,

$$Q(0+0) = A_1 K_1(\sigma_1),\ \lim_{y\to+0} y^{2\beta}Q'(y) = A_2 K_2(\sigma_1),$$

$$K_1(\sigma) = \frac{(\sigma/2)^{\beta-1/2}}{\Gamma(\beta+\frac{1}{2})},\ K_2(\sigma) = \frac{2(\sigma/2)^{1/2-\beta}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\beta)}. \tag{5}$$

При $t = -y \in (0,a)$ уравнение, получаемое из (1), есть $P'' + \frac{2\beta}{t}P' - (\lambda - d)P = 0$, $P(t) = Q(-t)$, а его общее решение

$$P(t) = \begin{cases} t^{1/2-\beta}\big[B_1 I_{\beta-1/2}(\sigma_2 t) + B_2 I_{1/2-\beta}(\sigma_2 t)\big], & \lambda > d,\ \ \sigma_2 = \sqrt{\lambda - d}, \\ B_1 + B_2 t^{1-2\beta}, & \lambda = d, \\ t^{1/2-\beta}\big[B_1 J_{\beta-1/2}(\tau t) + B_2 J_{1/2-\beta}(\tau t)\big], & \lambda < d,\ \ \tau = \sqrt{d - \lambda}. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда условие (2) равносильно (здесь $r = \sigma_2/\sigma_1$ или τ/σ_1)

$$A_1 = B_1 r^{\beta-1/2},\ A_2 = -B_2 r^{1/2-\beta}\ (\lambda \neq d); \tag{7}$$

$$A_1 = B_1/K_1(\sigma_1),\ A_2 = -(1-2\beta)B_2/K_2(\sigma_1)\ (\lambda = d). \tag{8}$$

а (3) (записанное как $P(a) = f_1$, $Q(b) = f_2$) равносильно системе

$$p_1 B_1 + p_2 B_2 = f_1,\ \ q_1 B_1 + q_2 B_2 = f_2, \tag{9}$$

с

$$(p_1,p_2)=\begin{cases}\big(a^{1/2-\beta}I_{\beta-1/2}(\sigma_2 a),\, a^{1/2-\beta}I_{1/2-\beta}(\sigma_2 a)\big), & \lambda>d,\\ (1,\, a^{1-2\beta}), & \lambda=d,\\ \big(a^{1/2-\beta}J_{\beta-1/2}(\tau a),\, a^{1/2-\beta}J_{1/2-\beta}(\tau a)\big), & \lambda<d,\end{cases}\tag{10}$$

$$(q_1,q_2)=\begin{cases}\big(b^{1/2-\beta}r^{\beta-\frac12}I_{\beta-\frac12}(\sigma_1 b),\, -b^{1/2-\beta}r^{\frac12-\beta}I_{\frac12-\beta}(\sigma_1 b)\big), & \lambda\neq d,\\ \Big(\dfrac{b^{1/2-\beta}I_{\beta-\frac12}(\sigma_1 b)}{K_1(\sigma_1)},\, -\dfrac{(1-2\beta)b^{1/2-\beta}I_{\frac12-\beta}(\sigma_1 b)}{K_2(\sigma_1)}\Big), & \lambda=d.\end{cases}\tag{11}$$

Доказательство - прямая подстановка (4), (6) в (2)–(3) с учётом асимптотики (5) (и её аналога для J_ν [1], совпадающей с точностью до главного члена).

Теорема 1. *Если $\lambda>d$, задача (1)–(3) однозначно разрешима при любых f_1,f_2: $p_1,p_2,q_1>0$, $q_2<0$ (т.к. $I_\nu(x)>0$ при $x>0$), поэтому $\Delta=p_1q_2-p_2q_1<0$ и по правилу Крамера*

$$B_1=\frac{f_1q_2-f_2p_2}{\Delta},\qquad B_2=\frac{p_1f_2-q_1f_1}{\Delta},\tag{12}$$

после чего A_1,A_2 находятся из (7), а решение - из (4), (6).

Теорема 2. *Если $\lambda=d$, задача (1)-(3) однозначно разрешима при любых f_1,f_2: $p_1,p_2,q_1>0$, $q_2<0$ по-прежнему (т.к. $K_1,K_2>0$), поэтому $\Delta=p_1q_2-p_2q_1<0$, и по формулам (12) находятся B_1,B_2, по (8) - A_1,A_2, а решение - из (4) и $P(t)=B_1+B_2t^{1-2\beta}$.*

Теорема 3. *Пусть $0<\lambda<d$. Так как $J_\nu(\tau a)$ осциллирует, $\Delta=\Delta(\tau)=p_1q_2-p_2q_1$ может обращаться в нуль.*

а) Если $\Delta(\tau)\neq0$ - задача однозначно разрешима: B_1,B_2 находятся из (12) (с $\Delta(\tau)$ вместо Δ), A_1,A_2 - из (7), а решение - из (4), (6).

б) Если $\Delta(\tau)=0$, то однородная задача (с $f_1=f_2=0$) имеет решение, единственное с точностью до множителя:

$$Q_0(y)=\begin{cases}y^{1/2-\beta}\big[p_2r^{\beta-1/2}I_{\beta-1/2}(\sigma_1 y)-p_1r^{1/2-\beta}I_{1/2-\beta}(\sigma_1 y)\big], & y\in(0,b),\\ (-y)^{1/2-\beta}\big[p_2J_{\beta-1/2}(\tau(-y))-p_1J_{1/2-\beta}(\tau(-y))\big], & y\in(-a,0),\end{cases}$$

а неоднородная задача (1)-(3) разрешима тогда и только тогда, когда $q_1f_1=p_1f_2$; в этом случае решение определено с точностью до слагаемого $C\cdot Q_0(y)$, $C\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Пункт а) - как в Теореме 1. В б): при $\Delta(\tau)=0$ строки матрицы системы (9) пропорциональны; $(B_1,B_2)=(p_2,-p_1)$ обращает в нуль обе однородные строки (проверяется подстановкой с учётом $p_1q_2=p_2q_1$), что даёт (13); левый нулевой вектор матрицы есть $(q_1,-p_1)$, откуда система (9) совместна $\iff q_1f_1-p_1f_2=0$, а общее решение - частное плюс $C(p_2,-p_1)$.

Литература

1. **Ватсон Г. Н.** *Теория бесселевых функций.* М.:Т.1.Изд. ИЛ. –1949. -798 с.

УДК 517.956.6

Краевая задача с разрывными условиями склеивания для уравнения второго порядка гиперболо-гиперболического типа

Мадрахимова З. С.[1], Хамракулова Д. А.[2]

[1]Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;

zilolaxonmadrahimova@gmail.com
[2]Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
dilnozahamroqulova2003@gmail.com

Краевые задачи для уравнения второго порядка гиперболо-гиперболического типа изучены в работах [1], [2].

В данной работе исследуется краевая задача с разрывными условиями склеивания для уравнения второго порядка с сингулярным коэффициентом гиперболо-гиперболического типа.

Рассмотрим уравнение

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} - \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \tag{1}$$

где

$$m > 0, \quad -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1. \tag{2}$$

Пусть Ω ограничена характеристиками

$$AC_j : x - \frac{2}{m+2}\Big((-1)^j y\Big)^{\frac{m+2}{2}} = -1, \quad BC_j : x + \frac{2}{m+2}\Big((-1)^j y\Big)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке C_1 и C_2 соответственно. Через M_j и N_j $(j=1,2)$ обозначим, соответственно, точки пересечения характеристик AC_j и BC_j с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in (-1,1)$.

Введем обозначения: $I = \{(x,y) : -1 < x < 1,\ y = 0\}$, $I_1 = \{(x,y) : 0 < x < c,\ y = 0\}$, $I_2 = \{(x,y) : c < x < 1,\ y = 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (y < 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$.

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача T_p**.** Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}\right)$, 2) $u(x,y) \in C^{2,2}_{x,y}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_j $(j=1,2)$; 3) $y^{\beta_0} u_y(x,y) \in C(\Omega_1 \cup I_1 \cup I_2)$, $(-y)^{\beta_0} u_y(x,y) \in C(\Omega_2 \cup I_1 \cup I_2)$ и на интервалах I_j $(j=1,2)$ выполняются условия склеивания

$$\lim_{y \to +0} u(x,y) = a_1(x) \lim_{y \to -0} u(x,y) + b_1(x), \quad (x,0) \in \bar{I},$$

$$\lim_{y \to +0} y^{\beta_0} u_y(x,y) = a_2(x) \lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} u_y(x,y) + b_2(x), \quad (x,0) \in I_1 \cup I_2;$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{AM_j} = \varphi_j(x), \quad -1 \le x \le \frac{c-1}{2},$$

$$u[\theta_j(x)] = \mu_j u\left[\theta_j^*(x)\right] + \rho_j(x), \quad c \le x \le 1,$$

где $\theta_j(x)$, $\theta_j^*(x)$ – аффикс точки пересечения харатеристики AC_j (EN_j) с характеристикой, исходящей из точки $L(x_0,0)$, где $x_0 \in [c,1]$, $j=1,2$:

$$\theta_j(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i(-1)^j \left(\frac{m+2}{4}(x_0+1)\right)^{\frac{2}{m+2}}, \quad \theta_j^*(x_0) = \frac{x_0 + c}{2} - i(-1)^j \left(\frac{m+2}{4}(x_0 - c)\right)^{\frac{2}{m+2}}.$$

$\varphi_j(x)$, $a_j(x)$, $b_j(x)$, $\rho_j(x)$ $(j=1,2)$ – заданные функции, причем $\varphi_1(-1) = \varphi_2(-1) = 0$,

$$\mu_j = const < 0, \ \ a_1(x) > 0, \quad a_2(x) < 0, \quad \forall (x,0) \in \bar{I}, \tag{3}$$

$$a_j(x),\ b_j(x) \in C\left(\bar{I}\right) \cap C^2(I)\ \ (j=1,2),\ \rho(x) \in C^2[c;1], \tag{4}$$

$$\varphi_j(x) \in C^1\left[-1, \frac{c-1}{2}\right] \cap C^3\left(-1, \frac{c-1}{2}\right). \tag{5}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (2)–(5), то в области Ω задача T_p однозначно разрешима.

Литература

1. **Кумыкова С.К.** *Об одной задаче с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения смешанного типа.* Дифф. уравнения. 1974. Т. **10** (1). С. 78-88.

2. **Исломов Б.И., Юлдашева Н.Т.** *Соханинг ичида бузилиш чизигига эга булган сингуляр коэффициентли гиперболик типдаги тенглама учун нолокал масала.* Математик физика ва замонавий анализнинг турдош масалалари (26-27 ноябр 2015 й) республика илмий -амалий анжумани материаллари. 2015. 221-222 бетлар.

UDC 517.956

О задаче Коши для уравнения с двумя линиями вырождения второго рода

Маманазарова Ф.Ф.
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
feruzafozilova97@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$L(z) := x^n z_{xx} - (-y)^m z_{yy} + a(x,y)z_x + b(x,y)z_y + c(x,y)z = 0, \qquad 0 \le n < m < 1, \tag{1}$$

в области D, ограниченной линией $y=0$ и характеристическими кривыми уравнения (1)

$$\xi = \frac{2}{2-n}x^{\frac{2}{2-n}} - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2}{2-m}} = 0, \qquad \eta = \frac{2}{2-n}x^{\frac{2}{2-n}} + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2}{2-m}} = 1, \tag{2}$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $c(x,y)$ – заданные функции.

Для уравнения (1), исследуем следующую задачу:

Задача Коши. Требуется найти решение $z \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$z(x,0) = \tau_0(x), \quad x \in [0,1]; \quad z_y(x,0) = \nu_0(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

где $\tau_0(x)$ и $\nu_0(x)$– заданные функции.

После введения характеристических координат (2) уравнение (1) принимает канонический вид

$$L_1(z) := z_{\xi\eta} + \frac{q}{\eta+\xi}(z_\xi + z_\eta) + \frac{p}{\eta-\xi}(z_\xi - z_\eta) - D(z) = 0, \tag{4}$$

где

$$D(z) = -\left(\frac{2-n}{4}\right)^{-2q}(\eta+\xi)^{2q}\frac{a}{4}(z_\xi + z_\eta) - \left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2p}(\eta-\xi)^{2q}\frac{b}{4}(z_\xi - z_\eta) - \frac{cz}{4},$$

а параметры p и q определяются формулами

$$p = -\frac{m}{2(2-m)}, \qquad q = -\frac{n}{2(2-n)}.$$

При этом начальные условия (3) принимают вид

$$\lim_{\eta\to\xi} z(\xi,\eta)=\tau(\xi),\quad 0\le\xi\le 1, \tag{5}$$

$$\lim_{\eta\to\xi}[2(1+2p)]^{2p}(\eta-\xi)^{-2p}\,(z_\xi-z_\eta)=\nu(\xi),\quad 0<\xi<1. \tag{6}$$

Положим

$$L_0(z)\equiv z_{\xi\eta}+\left(\frac{q}{\eta+\xi}+\frac{p}{\eta-\xi}\right)z_\xi+\left(\frac{q}{\eta+\xi}-\frac{p}{\eta-\xi}\right)z_\eta.$$

Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$L_0(z)=D(z). \tag{7}$$

Предположим, что выполняется следующее условие:

Условие А. Пусть имеют место представления

$$\tau(x)=x^{-q}\int_0^x (x-t)^{-2p}F\left(q,1-q,1-p;-\frac{(x-t)^2}{4xt}\right)t^qT(t)\,dt,$$

где

$$T(t)=t^{-\alpha_1}(1-t)^{-\beta_1}\gamma(t),\qquad \nu(t)=t^{-\alpha_2}(1-t)^{-\beta_2}\delta(t),$$

при этом $0\le\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2<\min\{-p,-q\}$, а функции $\gamma(t),\delta(t)\in C[0,1]$.

После некоторых вычислений как и в работе [2], мы получим следующую интегральную уравнению

$$z(\xi,\eta)=z_0(\xi,\eta)-\int_\xi^\eta d\xi'\int_{\xi'}^\eta u_0(\xi,\eta;\xi',\eta')D[z(\xi',\eta')]\,d\eta', \tag{8}$$

где

$$z_0(\xi,\eta)=\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-q}\int_0^\xi(\eta-t)^{-p}(\xi-t)^{-p}t^qF(q,1-q,1-p;\sigma)T(t)\,dt$$

$$-\gamma\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-q}\int_\xi^\eta(\eta-t)^{-p}(t-\xi)^{-p}t^qF(q,1-q,1-p;\sigma)\nu(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2\cos(\pi p)}\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-q}\int_\xi^\eta(\eta-t)^{-p}(t-\xi)^{-p}t^qF(q,1-q,1-p;\sigma)T(t)\,dt,$$

где $F(a,b,c;z)$ –гипергеометрическая функция Гаусса и

$$\sigma=\frac{(\eta-t)(t-\xi)}{2t(\eta+\xi)},\quad \gamma=[2(1+2p)]^{2p+1}\Gamma(2+2p)/\Gamma^2(1+p),$$

а $u_0(\xi,\eta;\xi',\eta')$–функция Римана оператора L_0.

Если выполнены условия А, то функция $z_0(\xi,\eta)$ является обобщённым решением класса R уравнения [2] $L_0(z)=0$.

Таким образом, исходная задача Коши преобразуется в интегральное уравнение, допускающее дальнейшее исследование методами теории интегральных уравнений. Для получения решения применяется метод последовательных приближений. Решение представляется в виде ряда

$$z(\xi,\eta)=z_0(\xi,\eta)+\sum_{k=1}^{\infty}z_k(\xi,\eta),$$

для членов которого устанавливаются рекуррентные интегральные формулы. С использованием свойств гипергеометрических функций, функции Римана и соответствующих интегральных оценок получены необходимые оценки для последовательных приближений и их производных. На их основе доказана сходимость построенного ряда, а также возможность его почленного дифференцирования. В результате полученное решение удовлетворяет каноническому уравнению и начальным условиям (5)–(6), что даёт существование обобщённого решения задачи Коши в рассматриваемом классе.

Литература

1. **В.Ф.Волкодавов, В.А.Носов.** *Приенение метода Римана к решению задачи Коши для уравнения второго рода общего вида. Дифференциальные уравнения.* Труды пединститутов РСФСР. 1973 г. Вып.2.
2. **Кароль К. Л.** *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа* // ДАН СССР. — 1953. — Т. 88. — № 2.

УДК 517.956.6

Задача в неограниченной области с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

Маматмуминов Д. Т.[1], Мирсабурова У. М.[2]
[1] Термезский государственный университет;
dilshod310797mdt@mail.ru
[2] Институт технологий, менеджмента и коммуникации;
umirsaburova@gmail.com

Постановка задачи TF_1 (Трикоми-Франкля).

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z = x+iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \tag{1}$$

где m– положительная постоянная.

Обозначим через C_0 и C_1 соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками выходящих из точки $E(c,0)$, через C^*- обозначим точку пересечения характеристики EC_1 с характеристикой исходяшей из точки $E_1(c_1,0)$, где c, c_1- некоторые числа, принадлежащие интервалу $I = (-1,1)$ оси $y = 0$, причем $-1 < c < c_1 < 1$.

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R,0),\ B_R = B_R(R,0)$,

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = R^2,\ -R \le x \le R,\ 0 \le y \le ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $I = \{(x,y) : -1 < x < 1,\ y = 0\},\ I_1 = \{(x,y) : -\infty < x < -1,\ y = 0\},\ I_2 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty,\ y = 0\},\ D_R = D_R^+ \bigcup D^- \bigcup I,\ D_R$ -подобласть неограниченной области D.

Введем линейные функции $p(x) = a_1x - b_1$, $q(x) = a_2 - b_2x$, отображающие отрезок $x \in [c,1]$ на отрезки $[c,c_1] \ni p(x)$ и $[c_1,1] \ni q(x)$ соответственно, причем $p(c) = c$, $p(1) = c_1$, $q(c) = 1$, $q(1) = c_1$ где $a_1 = (c_1-c)/(1-c)$, $b_1 = c(c_1-1)/(1-c)$, $a_2 = (1-cc_1)/(1-c)$, $b_2 = (1-c_1)/(1-c)$, $a_1 + b_2 = 1$, $a_2 + b_1 = 1$.

В работе Трикоми [1,с.125] все точки характеристики AC были заняты краевым условием. В настоящей работе исследуется корректность задачи где характеристика AC произвольным образом разбита на два куска AC_0 и C_0C, и на AC_0 задана условие Трикоми, а C_0C освобождена от краевого условия и это недостающее условие Трикоми заменена аналогоми условия Франкля [2, 3] на внутренней характеристике EC_1 и на отрезке вырождения $EB \subset AB$

Задача TF_1 (Трикоми-Франкля). Требуется найти в области D функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяшую следующим условиям:

1. функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2. $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3. $u(x,y)$ является обобшенным решением класса R_1[1, с.104], [2, с.35] в области D^-;

4. на интервале вырождения I имеет место следуюшее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I\backslash\{c\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могуть иметь особенности порядка ниже единицы;

5. выполняются равенства

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [-1,(c-1)/2], \tag{4}$$

$$u[\theta^*(p(x))] - \mu u[\theta^*(q(x))] = \psi_1(x), \quad x \in [c,1], \tag{5}$$

$$u(p(x),0) - u(q(x),0) = f(x), \quad x \in [c,1], \tag{6}$$

где μ– постоянная, $\mu \in (0,1)$,

$$\theta^*(x_0) = (x_0+c)/2 - i[(m+2)(x_0-c)/4]^{2/(m+2)}$$

– аффикс точки пересечения характеристики EC_1 с характеристикой исходяшей из точки $M(x_0,0)$, где $x_0 \in (c,1)$ [3], $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $f(x)$ заданные функции, и

$$\varphi(x) \in C^{0,\alpha_0}(\overline{I}),\ \psi_0(x) \in C[-1,\ (c-1)/2] \cap C^{1,\alpha_0}(-1,\ (c-1)/2)$$

$$\psi_1(x),\ f(x) \in C[c,1] \cap C^{1,\alpha_0}(c,1),$$

причем

$$\varphi(x) = (1-x^2)\varphi_0(x),\ \varphi_0(x) \in C^{0,\alpha_0}(\overline{I}),\ \psi_0(-1) = 0,\ \psi_1(1) = 0,\ f(1) = 0.$$

Заметим, что условия (5) и (6) соответственно являются аналогами условия Франкля [3] на внутренной характеристике $EC_1 = EC^* \cup C^*C_1$ и на отрезке вырождения $EB = (EE_1 \cup E_1B) \subset AB$. Обозначим $u(x,0) = \tau(x)$, $x \in \overline{I}$, тогда условие (6) примет вид

$$\tau(p(x)) - \tau(q(x)) = f(x), \quad x \in [c,1]. \tag{6*}$$

2. Единственность решения задача TF_1.

Формула Даламбера, дающая в области D^- для уравнения (1) решение видоизменной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0)=\tau(x),\ x\in\overline{I};\ \lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\ x\in I$$

имеет вид [2,с.39]

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau\left(x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)+\tau\left(x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)\right]-$$

$$-\frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2}\int_{-1}^{1}\nu\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)dt. \tag{7}$$

С помощью формулы Даламбера из краевых условий (4) и (5) с учетом равенства (6*) соответственно имеем

$$\tau^{'}(x)-\nu(x)=\psi_0^{'}((x-1)/2)),\quad x\in(-1,c), \tag{8}$$

$$b_2(1-\mu)\tau^{'}(q(x))+a_1\nu(p(x))+\mu b_2\nu(q(x))=\psi_2(x),\quad x\in(c,1), \tag{9}$$

где $\psi_2(x)=f^{'}(x)-2\psi_1^{'}(x)$.

Соотношения (8) и (9)являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенными соответственно на интервалы $(-1,c)$ и $(c,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

Теорема 1. *Решение $u(x,y)$ задачи TF_1 при выполнении условий $\psi_0(x)\equiv 0$, $\psi_1(x)\equiv$ $\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$ своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в области $\overline{D}_R^+$ достигает на кривой σ_R.*

Теорема 1 доказывается методом работы [3,4].

Из теорема 1 вытекает

Следствие 1. *Решение $u(x,y)$ удовлетворяюшее условиям теоремы 1 в области D^+ тождественно равно нулю.*

Доказательство. Решение задачи TF_1 при выполнении условий теоремы 1 в области $\overline{D}_R^+$ достигает своих НПЗ и НОЗ в точках нормальной кривой σ_R. В силу (3) для $\forall\ \varepsilon>0$ сушествует такое $R_0=R_0(\varepsilon)$, что при $R>R_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|u(x,y)|<\varepsilon,\ (x,y)\in\sigma_R$, следовательно в силу теоремы 1

$$|u(x,y)|<\varepsilon,\ \forall(x,y)\in\overline{D}_R^+. \tag{10}$$

Отсюда в силу произвольности ε, при $R\to+\infty$ заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $D^+\cup I_1\cup I\cup I_2$. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Задача TF_1 при выполнении условий теоремы 1 имеет не более одного решения.*

Доказательство. В силу следствия 1 с учетом условия сопряжения (2) имеем

$$\lim_{y\to-0}u(x,y)\equiv 0,\ \forall\ x\in\bar{I};\ \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,\ x\in I. \tag{11}$$

Теперь в области D^- восстанавливая решение $u(x,y)$ с помощью формулы Дарбу с нулевыми данными (11) получим, что $u(x,y)\equiv 0$ и в области $\overline{D}^-$. Следствие 2 доказана.

Таким образом, единственность решения задачи TF_1 доказана.

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М.,1985.
2. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент. Университет. 2005. 224 с.
3. **Мирсабурова У.М.** *Задача с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения смешанного типа* Дифференц. уравнения. 2021. том 57. № 6. - С.735-751.
4. **Мирсабуров М., Эргашева С.Б.** *Задача с комбинированным условием Трикоми и Франкля на одной граничной характеристике для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* "Бюллетень Института Математики"журнали. 2023 6(3). стр. 59-97.

УДК 517.956

КОМБИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНЫМИ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗЛИЧНЫМИ ПОРЯДКАМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Мирсабуров М.[1], Махмудов А. К.[2]

[1,2] **Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан;**
mirsaburov@mail.ru, azam.maxmudov.87@mail.ru

1. Введение, постановка задачи. Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой σ_0: $x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$\begin{cases} y^l u_{xx} + u_{yy} + \frac{\delta_0}{y} u_y = 0, & y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $l, m > 0$ — положительные постоянные, $\delta_0 \in (-l/2, 1)$, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$, $l \neq m$, $\delta_0 \neq \beta$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D соответственно при $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходящими из точки $E(c, 0)$, где $c \in J = (-1, 1)$–интервал оси y=0.

В задаче Трикоми [1] значение искомой функции задается на всей характеристике AC. В настоящей работе характеристика AC произвольно разбивается на две части AC_0 и C_0C: на части AC_0 задается значение искомой функции (неполное условие Трикоми), а на внутренней характеристике EC_1 и отрезке EB — условие Бицадзе–Самарского [2].

Задача TBS. Найти в области D функцию $u(x, y) \in C(\overline{D})$, удовлетворяющую условиям:

1. $u(x, y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;
2. $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 [3, 4] уравнения (1) в D^-;
3. на интервале вырождения имеет место условие:

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\delta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in (-1, 1) \setminus \{c\}, \tag{2}$$

причем при $x \to \pm 1, x \to c$ пределы при $y \to +0$ может иметь особенность порядка ниже $1 - 2\delta$, а предел при $y \to -0$ — порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\delta = \frac{l+2\delta_0}{2(l+2)}$, $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$;

4. краевым условиям:

$$u|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$u|_{AC_0} = \psi_0(x), \quad -1 \le x \le (c-1)/2, \tag{4}$$

$$a(x)D^{\beta}_{c,x}(x-c)^{2\beta-1}u[\theta^*(x)] = b(x)u(x,0) + \psi_1(x), \quad c < x < 1, \tag{5}$$

где $\theta^*(x) = \frac{c+x}{2} - i\left(\frac{(m+2)(x-c)}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}$ — аффикс внутренней характеристики EC_1.

2. Единственность решения задачи TBS. В области D^- решение задачи Коши $u(x,0) = \tau(x)$, $\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y = \nu(x)$ дается формулой Дарбу [4, 5]:

$$u(x,y) = \gamma_1 \int_{-1}^{1} \tau\left[x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1-t^2)^{\beta-1}dt +$$

$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu\left[x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1-t^2)^{-\beta}dt, \tag{6}$$

где $\gamma_1 = \frac{2^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}$, $\gamma_2 = -\frac{2^{2\beta-1}\Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)}$.

Из формулы (6) с учетом условия (4) получаем соотношение на $(-1,c)$ из области D^-:

$$\nu(x) = \gamma D^{1-2\beta}_{-1,x}\tau(x) + F_0(x), \quad x \in (-1,c). \tag{7}$$

Из условия (5) в силу (6) на интервале $(c,1)$ получаем соотношение:

$$a(x)\gamma_2\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2\beta}\Gamma(1-\beta)\nu(x) = D^{1-2\beta}_{c,x}a_1(x)\tau(x) + D^{1-2\beta}_{c,x}(x-c)^{1-\beta}\psi_1(x), x \in (c,1) \tag{8}$$

где $a_1(x) = (x-c)^{1-\beta}b(x) - 2^{2\beta-1}\gamma_1 a(x)$.

Аналогом принципа экстремума А. В. Бицадзе является [2]:

Теорема 1. *Решение задачи TBS при выполнении условий $\psi_0(x) \equiv 0$, $\psi_1(x) \equiv 0$,*

$$a(x) < 0, \quad b(x) > 0, \quad a_1(x) > 0 \tag{9}$$

своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в области $\overline{D}^+$ принимает только в точках нормальной кривой σ_0.

Теорема 2. *Задача TBS при выполнении условий (9) может иметь не более одного решения.*

Теорема 3. *Решение задачи TBS при выполнении условий $\varphi(x) \in C^{0,\alpha}[-1,1]$, $\psi(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$ и*

$$\beta < \delta < 1/4 \tag{10}$$

существует.

Теоремы 1,2 и 3 доказывается методами работ [4,5].

Список литературы

1. **Трикоми Ф.** *О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа.* М.-Л., 1947. 192 с.

2. **Бицадзе А. В., Самарский А. А.** *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач* // ДАН СССР. 1969. Т. 185, No 4. С. 739–740.

3. **Смирнов М. М.** *Уравнения смешанного типа.* М., 1985. 304 с.

4. **Салахитдинов М. С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент: Университет, 2005. 224 с.

5. **Мирсабуров М., Махмудов А. К.** *Задача с условием смещения на внутренних характеристиках для одного класса уравнений смешанного типа с различными порядками вырождения* // Изв. вузов. Матем. 2026. No 1. С. 25–40.

УДК 517.956.6

Принцип экстремума и аналог принципа Заремба–Жиро для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

Мирсабурова Г. М. [1], Мирсабурова У. М. [2], Турдиев Х. Х.[3],
[1]Ташкентский государственный транспортный университет;
mirsaburovagulbahor26@gmail.com
[2]Институт технологий, менеджмента и коммуникации;
umirsaburova@gmail.com
[3]Термезский государственный университет;
xayrullaturdiyev1988@gmail.com

Рассмотрим уравнение Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

$$E(u) = y^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)\, u_y = 0, \quad y > 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $-m/2 < \beta_0 < 1$, в конечной односвязной области Ω комплексной плоскости $z = x + iy$ ограниченной простой дугой Жордана Γ с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$ лежащей в полуплоскости $y > 0$ и отрезком AB оси $y = 0$.

Задача TH. *Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1. $u(x,y) \in C(\overline{D})$;

2. $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3. $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 [2] в области D^-;

4. На интервале вырождения I имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I\setminus\{c\}\,, \tag{2}$$

причём эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m + 2)$;

5. Выполнены

$$u(x,y)\big|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$u\big|_{AC_0} = \psi(x), \quad -1 \le x \le (c-1)/2, \tag{4}$$

$$a_0(x)(1+x)^{\beta} D_{c,x}^{1-\beta} u\,[\theta_0(x)] + b_0(x)(1-x)^{\beta} D_{x,1}^{1-\beta} u\,[\theta_1(x)] = c_0(x), \quad c < x < 1, \tag{5}$$

здесь $D_{c,x}^{1-\beta}$, $D_{x,1}^{1-\beta}$ – операторы дробного дифференцирования порядка $1-\beta$; $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ соответственно аффиксы точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $M(x_0, 0)$, где $x_0 \in [c, 1]$:

При доказательстве единственности решения уравнения мы используем следующие принципы.

Принцип экстремума. *Любое регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{\Omega}$, своего положительного максимума и отрицательного минимума во внутренних точках области Ω не достигает* [2].

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\upsilon(x,y) = u(x,y)/A(y) \tag{6}$$

где

$$A(y) = e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon\, e^{y^{1-\beta_0}},$$

здесь $d-$ диаметр области Ω, $0<\varepsilon<1$. Непосредственным вычислением, нетрудно убедиться, что

$$E(u)=A(y)E_1(\vartheta)$$

где

$$E_1(\vartheta)=y^m\vartheta_{xx}+\vartheta_{yy}+\frac{1}{y}\left(\beta_0+2yA_y\right)\vartheta_y+\frac{1}{A}\left(\frac{\beta_0}{y}A_y+A_{yy}\right)\vartheta,$$

$$A_y=-\varepsilon(1-\beta_0)e^{y^{1-\beta_0}}y^{-\beta_0},\quad A_{yy}=-\varepsilon(1-\beta_0)^2e^{y^{1-\beta_0}}y^{-2\beta_0}+\varepsilon\beta_0(1-\beta_0)e^{y^{1-\beta_0}}y^{-\beta_0-1},$$

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\beta_0}{y}A_y+A_{yy}\right)=-\frac{\varepsilon}{A}(1-\beta_0)^2e^{y^{1-\beta_0}}y^{-2\beta_0}<0 \tag{7}$$

В силу неравенства (7), решение уравнения $E_1(\vartheta)=0$ во внутренних точках $(x_0,y_0)\in\Omega$ не может принимать своего положительного максимума. Действительно предположим обратное, пусть в точке (x_0,y_0) функция $\vartheta(x,y)$ достигает своего положительного максимума, тогда в этой точке

$$\frac{\partial\vartheta(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\vartheta(x_0,y_0)}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^2\vartheta(x_0,y_0)}{\partial x^2}\le 0,\ \frac{\partial^2\vartheta(x_0,y_0)}{\partial y^2}\le 0,$$

отсюда в силу (3) получим $E_1(\vartheta)<0$. А это противоречит равенству $E_1(\vartheta)=0$. Таким образом, решение $u(x,y)$ уравнения (1) своего положительного максимума во внутренних точках области Ω не достигает.

Аналогично как и выше можно показать, что регулярное решения уравнения (1), непрерывное в $\overline{\Omega}$, своего отрицательного минимума также не достигает во внутренних точках области Ω. Принцип экстремума доказан [3].

Пусть регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) своего положительного максимума в области $\overline{\Omega}$ достигает в точке $(b,0)$ для оси $y=0$.

Выведем неравенства в окрестности точки $(b,0)$ для функции

$$\nu(x)=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ \ x\in(-1,1). \tag{8}$$

1. Пусть в точке $(b,0)$ предел (8) существует.

Теорема 1. (Аналог принципа Заремба-Жиро). *Пусть:*

1) непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $E(u)\ge 0$ (≤ 0) и принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение в некоторой точке $(b,0)$, $b\in(-1,1)$;

2) значение $u(x,y)$ на кривой Γ меньше (больше), чем в точке $(b,0)$. Тогда

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}<0,\quad (>0), \tag{9}$$

при условии, что этот предел существует [1].

Доказательство. Рассмотрим случай положительного максимума. Очевидно, что неравенства

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u(b,y)}{\partial y}>0$$

не может быть.

Допустим, что

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u(b,y)}{\partial y}=0.$$

Не нарушая общности, положим $u(b,0)=1$. В силу условия теоремы $\max\limits_{(x,y)\in\Gamma}u(x,y)\le 1-\varepsilon$, где $0<\varepsilon<1$.

Как и выше рассмотрим функцию

$$\vartheta(x,y)=u(x,y)/A(y),$$

где

$$A(y) = e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon e^{y^{1-\beta_0}},$$

$d-$ диаметр области Ω, $0 < \varepsilon < 1$. На кривой Γ

$$\vartheta(x,y) \le \frac{1-\varepsilon}{e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon e^{y^{1-\beta_0}}} \le \frac{1-\varepsilon}{e^{d^{1-\beta_0}}(1-\varepsilon)} < \frac{1}{e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon},$$

на отрезке $[-1,1]$

$$\vartheta(x,0) \le \frac{1}{e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon}, \quad \vartheta(b,0) = \frac{1}{e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon}.$$

Функция $\vartheta(x,y)$ удовлетворяет неравенству $E_1(\vartheta) \ge 0$, кроме того, в силу нашего допущения

$$\lim_{y\to 0} y^{\beta_0} \frac{\partial \vartheta(b,y)}{\partial y} = \frac{\varepsilon(1-\beta_0)}{\left(e^{d^{1-\beta_0}} - \varepsilon\right)^2} > 0,$$

следовательно, функция $\vartheta(x,y)$ принимает наибольшее значение внутри области, Ω что невозможно в силу (7). Аналогично рассматривается случай отрицательного минимума.

Теорема 1. доказан.

Литература

1. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Задачи Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающегося гиперболических уравнений.* // Дифференциальные уравнения 2002. Т. 38. № 2. С. 271–276.

2. **Нахушев А.М.** *Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения. Вольтерра третьего рода.* // Дифференциальные уравнения 1974. Т. 10 № 1. С. 100–111.

3. **Мирсабуров М.** *Задача с недостающим условием Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа.* //Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 78–87.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА С ДАННЫМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Мирсабурова Д. М.[1]
[1]Термезский государственный университет;
dmirsaburova@mail.ru

В настоящей работе для вырождающегося уравнения эллиптико- гиперболического типа с сингулярными коэффициентами при младших членах уравнения, в неограниченной области, которая состоит из полуплоскости $y > 0$ и характеристического треугольника ABC, где $A(-1,0)$, $B(1,0)$, в полуплоскости $y < 0$, исследуется корректность задачи Геллерстедта–Моисеева (GM) с данными на части граничной и параллельной ей внутренней характеристиках. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи GM.

1. Постановка задачи GM (Геллерстедта–Моисеева).

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ — неограниченная область плоскости переменных x и y, где D^+ — полуплоскость $y > 0$, D^- — конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC, уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 |y|^{(m-2)/2} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходящими из точек $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и пересекающимися в точке $C(0,y_1)$, $y_1 = -\left((m+2)/2\right)^{2/(m+2)}$, и отрезком AB оси $y = 0$.

В уравнение (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < (m+2)/2$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

На плоскости параметров $\alpha_0 O \beta_0$ рассматривается треугольник $\Delta A_0 B_0 C_0$, ограниченный прямыми

$$A_0C_0:\ \beta_0+\alpha_0=-\frac{m}{2},\ B_0C_0:\ \beta_0-\alpha_0=-\frac{m}{2},\ A_0B_0:\ \beta_0=1. \tag{2}$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0,\beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай $P(\alpha_0,\beta_0)\in\Delta A_0B_0C_0$.

Пусть D_R^+ — конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой

$$\sigma_R:\quad x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=R^2,\qquad -R\le x\le R,\ 0\le y\le\left(\frac{(m+2)R}{2}\right)^{\frac{2}{m+2}},$$

где $R=\text{const}\ge 1$. Введем еще обозначения: $J=\{(x,y):-1<x<1,\ y=0\}$, $J_1=\{(x,y):-\infty<x<-1,\ y=0\}$, $J_2=\{(x,y):1<x<+\infty,\ y=0\}$; $C_0(C_1)$ — точки пересечения характеристик $AC(BC)$ с характеристиками, исходящими из точки $E(c,0)$, где произвольное фиксированное число $c\in(-1,1)$. $D_R=D_R^+\cup D^-\cup J$. Очевидно, что D_R — ограниченная подобласть неограниченной области D.

Задача GM (Геллерстедта–Моисеева). В неограниченной области D требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ непрерывна в любой ограниченной подобласти $\overline{D_R}$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области $D^-\setminus(EC_0\cup EC_1)$;

4) на интервале вырождения J имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\qquad x\in J\setminus\{c\}; \tag{3}$$

5) в области D^+ выполняется равенство

$$\lim_{R\to+\infty}u(x,y)=0, \tag{4}$$

где $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=\varphi_j(x),\qquad \forall x\in J_j,\quad j=1,2; \tag{5}$$

$$u(x,y)\big|_{AC_0}=\psi_0(x),\qquad x\in\left[-1,\frac{c-1}{2}\right], \tag{6}$$

$$u(x,y)\big|_{EC_1}=\psi_1(x),\qquad x\in\left[c,\frac{c+1}{2}\right]. \tag{7}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)-$ заданные достаточно гладкие функции.

2. Единственность решения задачи GM

2.1. Вывод первых функциональных соотношений между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

В области D^- решения уравнения (1) удовлетворяющее видоизмененным начальным условием Коши

$$\lim_{y\to0}u(x;y)=\tau(x),\ x\in\bar{J};\ \lim_{y\to0}|y|^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\ x\in J,$$

дается формулой Дарбу

$$u(x,y)=\gamma_1\int_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right]\ (1+t)^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt+\gamma_2y^{1-\beta_0}\cdot$$
$$\cdot\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right]\ (1+t)^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt,$$

где

$$0<\alpha,\ \beta<1,\ \alpha+\beta<1,\ \alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/2(m+2)$$

$$\beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/2(m+2),$$

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}2^{1-\alpha-\beta},\ \gamma_2=-\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}2^{\alpha+\beta-1}.$$

С помощью формулы Дарбу[1] из краевых условий (6) и (7) нетрудно получить соотношения

$$\nu(x)=\gamma D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\Psi_0(x),\qquad x\in(-1,c),\tag{8}$$

и

$$\nu(x)=\gamma D_{c,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\Psi_1(x),\qquad x\in(c,1).\tag{9}$$

где $D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}$ и $D_{c,x}^{1-\alpha-\beta}$ — операторы дифференцирования дробного порядка.

Равенства (8) и (9) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенными на интервалы $(-1,c)$ и $(c,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

Теорема 1. Пусть

$$\varphi_1(x)\equiv 0,\qquad \varphi_2(x)\equiv 0,\qquad \psi_0(x)\equiv 0,\qquad \psi_1(x)\equiv 0,\tag{10}$$

тогда решение задачи GM в области $D^+\cup J_1\cup J\cup J_2$ — тождественно равно нулю.

Доказательство теоремы 1 проводится методом работы [1].

3. Сушествование решения задачи GM

В полуплоскости $y\geq 0$, для уравнения (1) решение задачи Дирихле удовлетворяющее условиям

$$u(x,+0)=\tau(x),x\in(-\infty,+\infty),\quad \lim_{R\to+\infty}u(x,y)=0,\tag{11}$$

имеет вид

$$u(x,y)=k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau(t)(r_0^2)^{a_0-1}dt,\ -\infty<x<+\infty,\ y\geq 0,\tag{12}$$

где

$$k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\overline{\delta})}{\Gamma(2-\delta-\overline{\delta})},\quad r_0^2=(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}.$$

В силу (12) выпольнив стандартные вычисления имеем[2]

$$\nu(x)=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\int_{-1}^{1}\left[\tau'(t)(x-t)|x-t|^{2\alpha-2}\exp\left(-2b_0\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)\right]dt+$$

$$+\Phi(x),\qquad x\in(-1,1).\tag{23}$$

где

$$F_1(x)=\lim_{y\to+0}y^{\beta}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left(e^{b_0\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{\tau'(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\alpha}}-e^{-b_0\pi}\int_{x}^{\infty}\frac{\tau'(t)\,dt}{(t-x)^{1-2\alpha}}\right).$$

Равенство (13) есть второе функциональные соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенное на осы $y=0$ из области D^+. Заметим, что соотношение (23) справедлива для всего промежутка $I=(-1,1)$.

В силу функционального соотношения (13) из (8) и (9) исключая $\nu(x)$, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tau_0(x)=\tau(ax-b)$ и $\tau_1(x)=\tau(bx+a)$.

С применением теории сингулярных интегральных уравнений, теории уравнений Винера-Хопфа и теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода доказана однозначная разрешимость полученными системы интегральных уравнений и тем самым доказаны сушествование решения задачи GM

Литература

1. **Уринов А. К., Мирсабурова Д.М.** *Gellerstedt-Moiseev problem with data on parallel characteristics in the unbounded domain for a mixed type equation with singular coefficients* Lobachevskii journal of mathematics. 2024 т.45. No3.
2. **Мирсабурова У. М.** *Задача со смещением на внутренних характеристиках в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом* Известия вузов. Математика. 2022. No9. - С.70-82.

УДК 517.956.45

ЗАДАЧА С НЕПОЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО И ДОПОЛНЕНЬМ АНАЛОГОМ УСЛОВИЯ ФРАНКЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С РАЗЛИЧНЫМИ ПОРЯДКАМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Мирсабуров М.[1], Рузиева З.Ф [2] Гаффоров Х.А [3]

[1]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
[1]Денауский институт предпринимательства и педагогики, Денау, Узбекистан;
[3] Термезский государственный педагогичиский институт, Термез, Узбекистан;

В работе в некоторой смешанной области, для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с различными порядками вырождения и с сингулярными коэффициентами доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с недостающим условием Бицадзе-Самарского, на граничной характеристике и аналогом условия Франкля на разных частях краев разреза вдоль отрезка вырождения. На отрезке линии изменения типа уравнения задается общее условие сопряжения, а на границе области эллиптичности и отрезке вырождения задается условие Бицадзе-Самарского.

Введение и постановка задачи

Пусть $D-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0\,(y = \sigma_0(x))$ с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, заданной уравнением $x^2 + 4(m + 2)^{-2}y^{m+2} = 1$, а при $y < 0$- характеристиками AC и BC уравнения

$$G(u) = 0, \quad G(u) = \begin{cases} y^l u_{xx} + u_{yy} + \frac{\delta_0}{y} u_y = 0, \ при\ y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \ при\ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $l, m-$ положительные постоянные, $\delta_0 \in (-l/2, 1)\,,\ \beta_0 \in (-m/2, 1)\,$, причем $l \neq m$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 соответственно точки пересечения граниных характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходящими из точки $E(c, 0)$, где $c-$ некоторое число, принадлежашее интервалу J=(-1,1) оси $y = 0$.

Пусть $p(x) \in C^1[-1, c]-$ диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1, c]$ во множество точек отрезка $[c, 1]$, причем $p^{'}(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = d - kx$, где $k = (1 - c)\,/(1 + c)$, $b = 2c/(1 + c)$

Заметим, что уравнение (1) в верхней полуплоскости $y > 0$ является уранением эллиптического типа, а при $y < 0$ является уравнением гиперболического типа, причем порядок параболического вырождения этих уравнений на оси $y = 0$ разные [1].

В задачах типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа [2,с.223] нелокальное условие связывает значения дробной производной искомой функции на характеристике AC со значением искомой функции на отрезке вырождения AB. В настоящей работе в смешанной области D, для уравнения (1) исследуется корректность задачи, где граничная характеристика AC произвольным образом делится на две части: AC_0 и C_0C и на первой части $AC_0 \subset AC$ и на части отрезка вырождения $AE \subset AB$ задается нелокальное условие типа условия Бицадзе-Самарского . Здесь

вторая часть C_0C характеристики AC освобождена от условия Бицадзе-Самарского и которая заменена аналогом условия Франкля [3] на разных частях краев разреза вдоль отрезка вырождения . На кривой σ_0 и отрезке вырождения AB задается условие Бицадзе-Самарского .

Задача BSJ**.** (Бицадзе-Самарского,Жегалова) Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)-$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$;

2) функция $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2\left(D^+\right)$ и удовлетворяет уравнению 1 в области D^+ ;

3) функция $u(x,y)$ является в области D^- обобщенным решением класса R_1,[2.с.104]

4) на отрезке линии параболического вырождения уравнения (1) выполняется общее условие сопряжения В.И.Жегалова [4]

$$u(x,-0)=a(x)u(x,+0)+a_0(x), \quad x\in[-1,1], \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=b(x)\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x), \quad x\in(-1,1)\setminus\{c\}, \tag{3}$$

где $a(x),a_0(x),b(x),b_0(x)-$ заданные непрерывно $-$ дифференцируемые функции на $\overline{J}$, причем $a(x)\neq0$, $b(x)\neq0$, $\forall x\in\overline{J}$, $a_0(-1)=0$, а пределы $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}\left(\lim\limits_{y\to+0}y^{\delta_0}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ при $x=\pm1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta(1-2\delta)$, где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$, $(\delta=(l+2\delta_0)/2(l+2))$;

5) $u(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,\sigma_0(x))=\rho(x)u(x,+0)+\varphi_0(x),\ x\in[-1,1], \tag{4}$$

$$D^{\alpha}_{-1,x}(1+x)^{\alpha+\beta-1}u\left[\theta_0\left(x\right)\right]=a_1(x)u(x,0)+\psi(x)\ \ x\in(-1,c), \tag{5}$$

$$u(p(x),-0)=\mu(x)u(x,+0)+f(x),\ x\in[-1,c],p(x)\in[c,1] \tag{6}$$

где $\rho(x)$, $\varphi_0(x)$, $\psi(x)$, $\mu(x)$, $f(x)-$ заданные непрерывно-дифференцируемые функции в множестве их определения, причем $a(x)=(1-x^2)\tilde{a}(x)$, $a_0(x)=(1-x^2)\tilde{a}_0(x)$, $\psi(-1)=0$, $\mu(-1)=0$, $f(-1)=0$,

$$\rho(x)=(1-x^2)\tilde{\rho}(x),\ \varphi_0(x)=(1-x^2)\tilde{\varphi}_0(x),\ x\in[-1,1].$$

$D^{\alpha}_{-1,x}-$ оператор дробного дифференцирования [5].

Заметим, что условия (2) и (3) являются общими условиями сопряжения В.И.Жегалова , (4)-условием Бицадзе-Самарского связываюшее значения искомой функции $u(x,y)$ на кривой σ_0 и на отрезке вырождения AB, (5)-неполным условием Бицадзе-Самарского на части граничной характеристики $AC_0\subset AC$, (6)-аналог условия Франкля на разных краях разреза вдоль отрезка вырождения AB.

Введем обозначения

$$u(x,-0)=\tau^-(x),\ x\in[-1,1];\ \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu^-(x),\ x\in(-1,1), \tag{7}$$

$$u(x,+0)=\tau(x),\ x\in[-1,1];\ \lim_{y\to+0}y^{\delta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\ x\in(-1,1). \tag{8}$$

В силу обозначений (7) и (8) общее условия сопряжения В.И.Жегалова (2), (3) и аналог условия Франкля (6) соответственно запишем в виде

$$\tau^-(x)=a(x)\tau(x)+a_0(x),\ x\in[-1,1], \tag{9}$$

$$\nu^-(x)=b(x)\nu(x)+b_0(x),\ x\in(-1,1)/\{c\}, \tag{10}$$

и

$$\tau^-\left(p(x)\right)=\mu(x)\tau(x)+f(x),\ x\in[-1,c]. \tag{11}$$

В силу (9),(10) аналог условия Франкля (11) примет вид

$$\tau\left(p(x)\right) = \mu_1(x)\tau(x) + f_1(x),\ x \in [-1, c], \tag{12}$$

где

$$\mu_1(x) = \mu(x)/a\left(\left(p(x)\right)\right),\ f_1(x) = \left(f(x) - a_0\left(p(x)\right)\right)/a\left(p(x)\right).$$

Если в уравнение (1) $l = m,\ \beta_0 = \delta_0$, то (1) превратится в уравнение Геллерстедта с сингулярным коэфицциентом, для которого задача с аналогами условия Франкля (6) исследована в работа [5].

Теорема 1 *Задача BSJ при выполнении условий*

$$a_0(x) \equiv 0,\ b_0(x) \equiv 0, \varphi_0(x) \equiv 0,\ \psi(x) \equiv 0,\ f(x) \equiv 0,$$

$$0 < \mu_1(x) < 1,\ a_1(x) > 0,\ b(x) > 0,\ 0 < \rho(x) < 1,$$

где $\mu_1(x) = \mu(x)/a_1\left(p(x)\right)$ имеет только тривиальное (тождественно равное нулю) решение.

Доказательство Теоремы 1 проводится методом работы [7].

Литература

1. **Крикунов Ю.М.** *Задача Трикоми для одного частного случая уравнения $K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$.* Труды семинара по краевым задачам, Изд-во Казанского гос. ун-та. вып, 1967. 75— 89 с.
2. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* Наука, Москва, 1985.
3. **Франкль Ф.И.** *Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения.* Прикладная математика и механика.— 1956. — Т. 20, № 2. — С. 196–202.
4. **Жегалов В.И.** *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии.* Учен.зап.Казанск.ун-та — 1962. — Т. 122, № 3. — С. 3–14.
5. **А.М.Нахушев** *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа* ДУ.1969.Т. 5, № 1. — С. 44–59.

УДК 556.917

Обобщенная задача Геллерстедта с аналогом условия Франкля.

Мирсабуров М.[1], Сафарова А.Р.[2]

[1]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru
[2]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; safarovaadiba929@mail.com

1. Постановка задачи GF(Геллерстедта-Франкля).

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$ -неограниченная смешанная область плоскости независимых x, y, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-m/2}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

где $m-$ положительная постоянная, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через A_0 и B_0 (A_1 и B_1) точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками выходящих из точек $E_0(c_0, 0)(E(c, 0))$, где c_0 и $c-$ некоторые числа принадлежащие интервалу $J = (-1, 1)$ оси $y = 0$, причем $-1 < c_0 < c < 1$. Пусть $\omega(x) = b - ax-$ линейная функция отображающая отрезок $[-1, c_0]$ на отрезок $[c_0, c]$ т.е. $-1 \le x \le c_0,\ c_0 \le \omega(x) \le c$, причем $\omega(-1) = c,\ \omega(c_0) = c_0$, где $a = (c - c_0)/(1 + c_0),\ b = c_0(1 + c)/(1 + c_0),\ a + b = c,\ b - ac_0 = c_0$. В 1935 году С.Геллерстедт исследовал задачу для обобщенного уравнения Трикоми $y^{2n-1}u_{xx} + u_{yy} = 0,\ n \in N$, где краевые условия задаются на определенно подобранных кусках $AA_1 \in AC,\ BB_1 \in BC$, обеих граничных

характеристик или на внутренних характеристиках EA_1 и EB_1[1,с.186]. Характерной особенности задачи Геллерстедта было то, что длина кусков характеристик (носителей краевых данны) были специально подобранными т.е. они не были произвольными.

В настоящей работе исследуется корректность задачи, где A_0A_1 кускох граничной характеристике AC освобождено от условия Геллерстедта и это недостающие локальное условие дополнено аналогом нелокального условия Франкля[2] на отрезке вырождения AB.

Пусть D_R^+ конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R,0),\ B_R = B_R(R,0)$,

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = R^2,\ -R \le x \le R,\ 0 \le y \le ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $J_1 = \{(x,y) : -\infty < x < -1,\ y = 0\},\ J_2 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty,\ y = 0\}$, $D_R = D_R^+ \cup D^- \cup J,\ D_R$ - конечная подобласть неограниченной области D.

Задачи GF**.** В неограниченной области D требуется найти функцию $u(x,y)$ удовлетворяющим условиям :

1) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

2) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса $R_1[1,c.104],[3,c.35]$ в области D^-

3) на интервале вырождения AB имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x \in (-1,1)\setminus\{c_0\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x = \pm 1,\ x = c_0$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta = (m+2\beta_0)/2(m+2)$;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x)\ \ x \in \overline{J}_1,\ \ u(x,0) = \varphi_2(x)\quad x \in \overline{J}_2, \tag{3}$$

$$u(x,y)\mid_{AA_0} = \psi_0(x),\qquad x \in [-1,(c_0-1)/2], \tag{4}$$

$$u(x,y)\mid_{BB_1} = \psi_1(x),\qquad x \in [(c+1)/2,1], \tag{5}$$

$$u(\omega(x),0) - u(x,0) = f(x),\qquad x \in [-1,c_0],\ \omega(x) \in [c_0,c] \tag{6}$$

где $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \psi_0(x),\ \psi_1(x),\ f(x)-$ заданные непрерывно дифференцируемые функции в замыкании множества их определения, причем $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_1(x) = 0\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_2(x) = 0,\ \ \psi_0(-1) = 0,\ f(c_0) = 0,\ \psi_1(1) = 0.$

5) в области D^+ выполняется равенство

$$\lim_{R\to+\infty} u(x,y) = 0,$$

где

$$R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2}; \tag{7}$$

Заметим, что условие (6) является аналогом условия Франкля[4] на отрезке вырождения AE_0 и E_0E которое допольняет недостающее условие Геллерстедта на куске характеристике $A_0A_1 \in AC$

Формула Дарбу, определяющая в области D^- решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in [-1,1];\ \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x),\ x \in (-1,1),$$

имеет вид [3,с.34]:

$$u(x,y) = \gamma_1\int_{-1}^{1}\tau\left(x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)(1-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt +$$

$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)(1-t)^{-\beta}(1+t)^{-\alpha}dt, \tag{8}$$

где

$$\gamma_1=\frac{2^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},\ \gamma_2=-\frac{2^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha-\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}.$$

С помощью формулы (8), из краевых условий (4) и (5) нетрудно получить соотношения

$$\nu(x)=\gamma D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\Psi_0(x),\ x\in(-1,c_0), \tag{9}$$

$$\nu(x)=\gamma D_{x,1}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\Psi_1(x),\ x\in(c,1), \tag{10}$$

где $D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}, D_{x,1}^{1-\alpha-\beta}-$ операторы дифференцировании дробного порядка [3,с.20],

$$\gamma=\frac{2\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\alpha+\beta},\ \Psi_0(x)=-\frac{\gamma\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(1+x)^{\alpha}D_{-1,x}^{1-\beta}\psi((x-1)/2),$$

$$\Psi_1(x)=-\frac{\gamma\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(1-x)^{\beta}D_{x,1}^{1-\alpha}\psi((x+1)/2)$$

-известные функции.

Равенства (9) и (10) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенные на интервалы $(-1,c_0)$ и $(c,1)$ оси у $=0$ из области D^- на основе краевых условий (4) и (5).

Теорема 1. *Задачи GF при выполнении условий*

$$\psi_0(x)\equiv 0,\ \psi_1(x)\equiv 0,\ \varphi_1(x)\equiv 0,\ \varphi_2(x)\equiv 0\ \psi_1(x)\equiv 0,\quad f(x)\equiv 0, \tag{11}$$

однозначно разрешима.

Теорема 1 доказивается методами работи [2]

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* 1985,-304с.

2. **Мирсабуров М. Маматмуминов Д.Т.** *Задача с аналогами условия Франкля на граничной характеристике и на отрезке вырождения и с общими условиями сопряжения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* Бюллетень Института математики 2024, Т. 7, N 5, стр.93-104

3. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005. Университет -224 с.

4. **Мирсабуров М., Чориева С.Т.** *Задача с аналогом условия Франкля на характеристике для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.* Изв. вузов.Мат. 2017, N 11, С.39-45.

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Мирсабуров М. [1], Тураев Р.Н. [2], Мирзаев Ф.С. Оз. [3]

[1]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru

[2]Термезский государственный университет инженерии и агротехнологий, Термез, Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru [3]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; fayzullamirzayev95@gmail.com

Уравнения смешанного типа занимают важное место в теории дифференциальных уравнений в частных производных, поскольку при изменении знака коэффициента при старшей производной характер уравнения изменяется от эллиптического к гиперболическому. Одним из наиболее известных представителей данного класса является уравнение Геллерстедта, для которого характерно вырождение на линии смены типа. Теория краевых задач для уравнений смешанного типа, включая задачи Трикоми, Геллерстедта, Бицадзе–Самарского и Франкля, систематически изложена в монографии М.М. Смирнова [1].

Особый интерес представляют задачи, в которых значения искомого решения связываются не только на границе области, но и в точках, расположенных на различных кривых или характеристиках. Такие условия приводят к нелокальным краевым задачам. Одним из классических примеров являются задачи типа задачи Бицадзе–Самарского, в которых значения искомого решения на части границы связываются со значениями на внутренней кривой. Для уравнений смешанного типа существенное развитие этого направления связано с исследованием нелокальных условий на характеристиках.

В работе М. Мирсабурова [2] для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом исследована краевая задача с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках. Рассматриваемое в этой работе нелокальное условие связывает значения искомой функции на двух характеристиках, одна из которых является частью границы области, а другая расположена внутри характеристического треугольника. Такой подход позволяет рассматривать нелокальные условия как естественное обобщение локальных условий задач Трикоми.

В настоящей работе, развивая указанное направление, рассматривается краевая задача для уравнения Геллерстедта в смешанной области, геометрия которой определяется нормальной кривой в эллиптической части и характеристиками в гиперболической части. В отличие от классической постановки, на различных участках границы задаются локальные условия, а на характеристиках, связанных с точкой $E(c,0)$, вводится нелокальное условие типа Бицадзе–Самарского. Такая постановка позволяет объединить локальные граничные данные с нелокальной связью значений решения на параллельных характеристиках.

Постановка задачи.

Пусть D_a — область, ограниченная отрезком OB оси Oy, $0 \le y \le b$, дугой AB нормальной кривой $\sigma_a: \quad x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = a^2, \qquad x \ge 0, \quad y \ge 0$; здесь $O = O(0,0)$, $A = A(a,0)$, $B = B(0,b)$ и характеристиками

$$OC: \quad x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$$

и

$$AC: \quad x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = a$$

уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \left(\frac{\beta_0}{y}\right) u_y = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$, $b = \left(\frac{(m+2)a}{2}\right)^{\frac{2}{m+2}}$.

Через D_a^+ и D_a^- соответственно обозначим части области D_a, лежащие в верхней или нижней полуплоскостях.

Через $\theta(x)$ и $\theta^*(x)$ обозначим соответственно точки пересечения характеристики, выходящей из точки $M(x,0)$, с соответствующими характеристиками OC_0 и AC_0, $x \in [c,a]$.

Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D})$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в эллиптической части области D^+ и соответствующим обобщённым решением в гиперболической части D^-;

3) на участках границы области выполняются условия

$$u(x,y)\big|_{\sigma_0} = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le a, \tag{2}$$

$$u(x,y)\big|_{OB} = \psi_1(y), \qquad 0 \le y \le b, \tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{AC_0} = \psi_2(x), \qquad 0 \le x \le \frac{c}{2}; \tag{4}$$

4) на параллельных характеристиках, связанных с точкой $E(c,0)$, выполняется нелокальное условие Бицадзе–Самарского

$$u[\theta(x)] = \mu u[\theta^*(x)] + \rho(x), \qquad c \le x \le a. \tag{5}$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(x)$ и $\rho(x)$ — заданные функции, а μ — заданная постоянная. Условие (5) устанавливает нелокальную связь между значениями искомой функции на различных характеристиках.

При этом заданные функции предполагаются достаточно гладкими, а в точках пересечения соответствующих участков границы предполагаются выполненными необходимые условия согласования.

Таким образом, задача состоит в исследовании существования и единственности решения сформулированной краевой задачи и в получении соответствующего функционального соотношения для неизвестных граничных функций. Здесь $\theta(x)$ и $\theta^*(x)$ обозначают точки, расположенные соответственно на характеристиках, связанных с точкой $E(c,0)$, а $u[\theta(x)]$ и $u[\theta^*(x)]$ являются значениями искомой функции в этих точках. Таким образом, условие (5) нелокально связывает значения решения на двух характеристиках.

В качестве класса решения рассматривается функция $u(x,y)$, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, дважды непрерывно дифференцируемая в соответствующих внутренних частях D^+ и D^- и удовлетворяющая уравнению (1) в каждой из этих частей.

Для согласованности краевых условий предполагаются соответствующие условия согласования заданных функций $\varphi(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(x)$ и $\rho(x)$ в точках пересечения граничных участков.

Нелокальное условие (5) является существенной особенностью рассматриваемой задачи. При его отсутствии задача сводится к локальной постановке с заданием данных на отдельных участках границы. Введение условия (5) приводит к необходимости учитывать связь значений решения на различных характеристиках, что является характерной особенностью задач типа Бицадзе–Самарского.

Таким образом, сформулированная задача представляет собой обобщение классических краевых задач для уравнений смешанного типа, рассматриваемых в [1], с учётом нелокальной связи на параллельных характеристиках, исследованной в [2]. Основной целью дальнейшего исследования является установление условий существования и единственности решения поставленной задачи и получение соответствующего функционального соотношения для неизвестных граничных функций.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.

2. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках. Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1281–1284.

УДК 517.956.223

Единственность решения одной краевой задачи для уравнения с сингулярным коэффициентом в бесконечной области, ограниченной двумя параллельными плоскостями

Муродова М.Р.[1]

[1]**Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;**
mxalimova2112@mail.ru

В работе исследуется задача с условиями Дирихле и Неймана для трёхмерного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом. Доказана единственность решения поставленной задачи.

1. Постановка задачи

В области $\Omega = \{(x,y,z) : \ -\infty < x,y < +\infty,\ 0 < z < l\}$ рассмотрим трёхмерное уравнение эллиптического типа с сингулярным коэффициентом

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x,y,z)$ – неизвестная функция, а $l, \gamma \in \mathbb{R}$, причём $0 < \gamma < 1/2$; плоскость $z = 0$ является плоскостью сингулярности коэффициента уравнения.

Поставим для уравнения (1) в области Ω задачу, отличающуюся от известной задачи D_∞ [2] тем, что на плоскости $z = l$ вместо условия Дирихле задаётся условие Неймана.

Задача DN_∞. Найти функцию $u(x,y,z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$u(x,y,0) = f_1(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

$$u_z(x,y,l) = f_2(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} u(x,y,z) = 0, \qquad z \in [0,l], \tag{4}$$

где f_1, f_2 – заданные непрерывные функции, причём выполняются условия согласования

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f_i(x,y) = 0, \qquad i = 1,2.$$

2. Единственность решения задачи DN_∞

Для $u, v \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, где $D \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, справедливо тождество

$$z^{2\gamma} vLu - uL^*\big(z^{2\gamma}v\big) = z^{2\gamma}(vLu - uLv) =$$

$$= \big[z^{2\gamma}(vu_x - uv_x)\big]_x + \big[z^{2\gamma}(vu_y - uv_y)\big]_y + \big[z^{2\gamma}(vu_z - uv_z)\big]_z,$$

где $L^*v \equiv v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} - (2\gamma z^{-1}v)_z = 0$ – уравнение, сопряжённое (1). При $v \equiv u$ в области Ω отсюда получаем тождество

$$z^{2\gamma} uLu = \big(z^{2\gamma}uu_x\big)_x + \big(z^{2\gamma}uu_y\big)_y + \big(z^{2\gamma}uu_z\big)_z - z^{2\gamma}\big(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\big) = 0. \tag{5}$$

Теорема. Задача DN_∞ не имеет более одного решения.

Доказательство. Пусть $u_1(x,y,z)$ и $u_2(x,y,z)$ – два решения задачи DN_∞. Тогда $u(x,y,z) = u_1(x,y,z) - u_2(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям

$$u(x,y,0) = 0, \qquad u_z(x,y,l) = 0, \qquad \lim_{x^2+y^2\to+\infty} u(x,y,z) = 0, \quad z \in [0,l]. \tag{2_0, 3_0, 4_0}$$

Докажем, что $u(x,y,z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{z = 0\} \cup \{z = l\}$.

Проинтегрируем тождество (5) по области $\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \{(x,y,z) : \ a < x < b,\ c < y < d,\ \varepsilon_1 < z < l - \varepsilon_2\}$, где $a < b$, $c < d$ – конечные числа, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ – достаточно малые числа. Применяя формулу Гаусса–Остроградского [1] к результату интегрирования, получаем

$$\int_{\varepsilon_1}^{l-\varepsilon_2}\int_c^d \Big[u(b,y,z)u_x(b,y,z) - u(a,y,z)u_x(a,y,z)\Big] z^{2\gamma}\,dy\,dz +$$

$$+ \int_{\varepsilon_1}^{l-\varepsilon_2}\int_a^b \Big[u(x,d,z)u_y(x,d,z) - u(x,c,z)u_y(x,c,z)\Big] z^{2\gamma}\,dx\,dz +$$

$$+ z^{2\gamma}\int_a^b\int_c^d \Big[u(x,y,l-\varepsilon_2)u_z(x,y,l-\varepsilon_2) - u(x,y,\varepsilon_1)u_z(x,y,\varepsilon_1)\Big] dx\,dy =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} z^{2\gamma}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) dx\, dy\, dz. \tag{6}$$

Переходя к пределу при $a, c \to -\infty$, $b, d \to +\infty$, в силу условия (4_0) первые два слагаемых в левой части (14) исчезают, и равенство (14) принимает вид

$$z^{2\gamma} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Big[u(x,y,l-\varepsilon_2)u_z(x,y,l-\varepsilon_2) - u(x,y,\varepsilon_1)u_z(x,y,\varepsilon_1)\Big] dx\, dy =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} z^{2\gamma}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) dx\, dy\, dz, \tag{7}$$

где $\Omega^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \{(x,y,z):\ -\infty < x, y < +\infty,\ \varepsilon_1 < z < l - \varepsilon_2\}$.

При $\varepsilon_2 \to 0$: в силу однородного условия Неймана (3_0) $u_z(x,y,l-\varepsilon_2) \to u_z(x,y,l) = 0$, а $u(x,y,l-\varepsilon_2)$ остаётся ограниченной величиной ($z = l$ – регулярная плоскость), поэтому

$$z^{2\gamma} u(x,y,l-\varepsilon_2)u_z(x,y,l-\varepsilon_2) \longrightarrow 0.$$

При $\varepsilon_1 \to 0$: в силу однородного условия Дирихле (2_0) $u(x,y,\varepsilon_1) \to u(x,y,0) = 0$, а произведение $u(x,y,\varepsilon_1)u_z(x,y,\varepsilon_1)$ стремится к нулю (как и в задаче D_∞ [2], в силу гладкости u и свойств фундаментальных решений уравнения (1)). Значит, оба слагаемых в левой части (15) исчезают при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, и мы получаем

$$\iiint\limits_{\Omega} z^{2\gamma}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Так как $z^{2\gamma} > 0$ в Ω, отсюда $u_x(x,y,z) \equiv u_y(x,y,z) \equiv u_z(x,y,z) \equiv 0$, $(x,y,z) \in \Omega$. Тогда $u(x,y,z) \equiv$ const в Ω. Так как $u(x,y,z) \in C(\overline{\Omega})$ и, в силу (2_0), $u(x,y,z)|_{z=0} \equiv 0$, то эта постоянная равна нулю, т. е. $u(x,y,z) \equiv 0$, $(x,y,z) \in \overline{\Omega}$. Следовательно, $u_1(x,y,z) \equiv u_2(x,y,z)$ в $\overline{\Omega}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Литература

1. **Кудрявцев Л.Д.** *Курс математического анализа.* М.: Высшая школа. - 1981. - 584 с.
2. **Муродова М.** *О единственности одной краевой задачи для уравнения с сингулярным коэффициентом в трёхмерном пространстве.* Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики. – Фергана. - 2025.

Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболо - гиперболического типа второго рода, вырождающегося внутри области

Насирова Д.А.
Kimyo International University in Tashkent; Узбекистан;
ndildora0909@gmail.com

Краевые задачи для уравнения смешанного эллитико-гиперболического и параболо-гиперболического типов первого рода в различных областях изучены работах [1].

Краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода, у которых линия вырождения является огибающей семейства характеристик и одновременно сама является характеристикой, в литературе принято называть краевыми задачами для уравнений смешанного типа второго рода. Впервые класс R_2 был введен, а также найдено представление обобщённого решения задачи Коши для гиперболического уравнения второго рода в работе [2].

При изучении вырождающихся нагруженных уравнений смешанного типа второго рода возникают трудности, связанные с отсутствием общего представления решения, а также с невозможностью прямого применения классических методов. Проведённый анализ состояния исследований в

данном направлении показывает, что локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных параболо-гиперболических уравнений второго рода до настоящего времени остаются практически неизученными.

Краевые задачи с условиями Трикоми и Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа второго рода, вырождающегося внутри области, были исследованы в работах [3].

В данной работе изучается нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа второго рода, вырождающегося внутри области. Доказана теорема существования и единственности классического решения поставленной задачи. Доказательство теоремы основано на энергетических тождествах и принципе экстремума, а также на теории интегральных уравнений Фредгольма.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-((-1)^{j-1}x)^p u_y-\rho_j u(x,0), & (x,y)\in\Omega_j^+,\\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\mu_j u(x,0), & (x,y)\in\Omega_j^-, \end{cases} \tag{1}$$

где $m,\quad p,\quad \rho_j,\quad \mu_j\ (j=1,2)-$ любые действительные числа, причем

$$0<m<1,\quad p>m/(2-m),\quad \rho_j\geq 0,\quad \mu_j\geq 0\,(j=1,2). \tag{2}$$

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в плоскости переменных x,y ограниченная кривыми:

$$S_j:\ \ (-1)^{j-1}x=1,\ \ 0<y<1,\quad S_3:\ \ 0<x<1,\ \ y=1,\quad S_4:\ \ -1<x<0,\ \ y=1,$$

$$\Gamma_j:\ (-1)^{j-1}x-(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=0,\quad \Gamma_{j+2}:\ (-1)^{j-1}x+(1-2\beta)(-y)^{2/(1-2\beta)}=1,\ \ y<0,$$

здесь $2\beta=m/(m-2)$, причем

$$-1<2\beta<0. \tag{3}$$

Введем обозначения $\Omega_1^+=\Omega\cap\{(x,y):\ x>0,\ y>0\},\ \ \Omega_2^+=\Omega\cap\{(x,y):\ x<0,\ y>0\},$

$$\Omega_1^-=\Omega\cap\{(x,y):\ x>0,\ y<0\},\quad \Omega_2^-=\Omega\cap\{(x,y):\ x<0,\ y<0\},$$

$$I_1=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\},\quad I_2=\{(x,y):\ -1<x<0,\ y=0\},\quad I_3=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<1\},$$

$$\Omega_j=\Omega_j^+\cup\Omega_j^-\cup I_j,\quad \Omega_3=\Omega_1^+\cup\Omega_2^+\cup I_3,\quad \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup I_3,$$

$$A_j\left((-1)^{j+1},0\right)=\bar{I}_j\cap\bar{S}_j,\quad O(0,0)=\bar{I}_1\cap\bar{I}_2,\quad B_1(1,1)=\bar{S}_1\cap\bar{S}_3,\quad B_2(-1,1)=\bar{S}_2\cap\bar{S}_4,$$

$$B_0(0,1)=\bar{S}_3\cap\bar{S}_4,\quad C_j\left[\frac{(-1)^{j-1}}{2};\ -\left((-1)^{j-1}\frac{2-m}{4}\right)^{2/(2-m)}\right]=\bar{\Gamma}_j\cap\bar{\Gamma}_{j+2},\ (j=1,2),$$

$$\Theta_j(x)=\frac{x}{2}-i\left[\frac{x}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}.$$

Далее будем предполагать, что области Ω_1^+ и Ω_1^- симметричны областям Ω_2^+ и Ω_2^- относительно оси Oy соответственно.

В области Ω для уравнения (1) исследуется следующая задача.

Задача BC**.** Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$; 2) $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1^+\cup\Omega_2^+)$ и является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega_1^+\cup\Omega_2^+$; 3) $u(x,y)$ является обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 в области $\Omega_1^-\cup\Omega_2^-$; 4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u|_{S_j}=\varphi_j(y),\quad 0\leq y\leq 1, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}u[\Theta_j(x)]+a_j(x)u(x,0)=b_j(x),\qquad (x,0)\in I_j, \tag{5}$$

5) $u(x,y)$ на линии вырождения I_k $\left(k=\overline{1,3}\right)$ выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),(x,0)\in I_1\cup I_2, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to+0}u_x(x,y)=\lim_{x\to-0}u_x(x,y),(0,y)\in I_3, \tag{7}$$

где $\varphi_j(y),\quad a_j(x),\ b_j(x)\ (j=1,2)-$ заданные функции, причем

$$\varphi_1(y),\quad \varphi_2(y)\in C(\bar{I}_3)\cap C^1(I_3), \tag{8}$$

$$a_j(x),\ b_j(x)\in C(\bar{J}_j)\cap C^2\left(J_j\right), \tag{9}$$

Теорема 1. Если выполнены условия (2), (3), (8), (9), то в области Ω решение задачи BC для уравнения (1) существует и единственно.

Единственность решения задачи BC доказывается с помощью принципа экстремума для параболо - гиперболических уравнения с использованием энергетического тождества. Существование решения задачи BC доказывается методом интегральных уравнений.

Литература

1. **Салохитдинова М.С., Исломов Б.** *Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения.* Т.: Mumtoz so'z. - 2009. - 264 с.
2. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* Высшая школа, М., -1985. -340 с.
3. **Islomov B.I., Nasirova D.A.** *On a Boundary Value Problem for a Loaded Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind Degenerating Inside the Domain.* // Uzbek Math. J. -2025. 69(4). -128-140 с.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ФРАНКЛЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Нишонова Ш.Т.
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
e-mail: shahnozanishonova910@gmail.com

В настоящей работе уравнение

$$\operatorname{sgn}(x+y)\left[\operatorname{sgn}x\,U_{xx}+\operatorname{sgn}y\,U_{yy}\right]+U_{zz}+\frac{2\gamma}{z}U_z=0 \tag{1}$$

рассматривается в области $D=\Omega\times(0,c)$, где $\gamma=\text{const}\in\mathbb{R}$, причем $\gamma\in(-\infty,1/2)$, а Ω - конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная дугой

$$\overline{\sigma}_0=\{(x,y):x^2+y^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

и отрезками

$$\overline{MM^*}=\{(x,y):y-x=1,\ 0\leq y\leq 1\},\qquad \overline{M^*O}=\{(x,y):-1\leq x\leq 0,\ y=0\},$$
$$\overline{OP^*}=\{(x,y):x=0,\ -1\leq y\leq 0\},\qquad \overline{PP^*}=\{(x,y):x-y=1,\ 0\leq x\leq 1\}.$$

Введем обозначения:

$$\Omega_0=\Omega\cap\{y>0\},$$
$$\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y):y<0,\ x+y>0\},\qquad \Omega_2=\Omega\cap\{(x,y):y<0,\ x+y<0\},$$
$$\Omega_3=\Omega\cap\{(x,y):x<0,\ x+y>0\},\qquad \Omega_4=\Omega\cap\{(x,y):x<0,\ x+y<0\},$$

$$D_j=\Omega_j\times(0,c),\quad j=\overline{0,4},$$

$$\overline{OP}=\overline{\Omega}_0\cap\overline{\Omega}_1,\quad \overline{OQ}=\overline{\Omega}_1\cap\overline{\Omega}_2,\quad \overline{OM}=\overline{\Omega}_0\cap\overline{\Omega}_3,\quad \overline{OK}=\overline{\Omega}_3\cap\overline{\Omega}_4,$$
$$O(0,0),\quad M(0,1),\quad M^*(-1,0),\quad P(1,0),\quad P^*(0,-1),\quad K(-1/2,1/2),\quad Q(1/2,-1/2).$$

Уравнение (1) в области D имеет смешанный тип: в области D_0 оно эллиптическое, а в областях D_j, $j=\overline{1,4}$, - гиперболическое. Прямоугольники $OP\times(0,c)$ и $OM\times(0,c)$ являются плоскостями изменения типа, а $z=0$ - плоскостью сингулярности коэффициента уравнения (1). Кроме того, при переходе из области D_1 в D_2, а также из D_3 в D_4 (и наоборот) через прямоугольники $OQ\times(0,c)$ и $OK\times(0,c)$ коэффициенты уравнения терпят разрыв первого рода.

Под регулярным в области D решением уравнения (1) будем понимать функцию $U(x,y,z)$ из класса

$$C(\overline{D})\cap C^1\big(\big(D\cup\big(\overline{M^*O}\times(0,c)\big)\cup\big(\overline{OP^*}\times(0,c)\big)\big)\setminus\big(\big(\overline{D}_1\cap\overline{D}_2\big)\cup\big(\overline{D}_3\cap\overline{D}_4\big)\big)\big)$$
$$\cap\, C^{2,2,2}_{x,y,z}(D_0\cup D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4),\quad (2)$$

удовлетворяющую уравнению (1) в областях D_j, $j=\overline{0,4}$.

Для уравнения (1) в области D исследуется вопрос однозначной разрешимости следующей задачи.

Задача F. Найти в области D регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$aU(x,y,z)+b\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial n}=0,\quad (x,y)\in\overline{\sigma}_0,\quad z\in(0,c),$$
$$U_x(0,y,z)=0,\quad y\in(-1,0),\quad z\in(0,c),$$
$$U_y(x,0,z)=0,\quad x\in(-1,0),\quad z\in(0,c),$$
$$U(0,y,z)+kU(0,-y,z)=0,\quad y\in[-1,0],\quad z\in[0,c],$$
$$U(x,0,z)+kU(-x,0,z)=0,\quad x\in[-1,0],\quad z\in[0,c],$$
$$U(x,y,0)=f_1(x,y),\qquad U(x,y,c)=f_2(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\Omega},$$

где $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ - заданные функции, а $k=\text{const}$ может принимать два значения: $k=1$ или $k=-1$; a,b - заданные действительные числа, причем $a^2+b^2\neq0$; n - внешняя нормаль к $\overline{\sigma}_0$.

Подобная трехмерная задача изучена в работе [1].

Литература

1. **Каримов К.Т., Шокиров А.М.** *Внутренне-краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в трехмерном пространстве* // Научный вестник Бухарского государственного университета. - 2025. - № 11. - С. 69-77.

UDC 517.95

Об одной начально-краевой задаче для уравнения высокого четного порядка с одной линией вырождающегося

Орипов Д. Д.
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
dastonbekoripov94@gmail.com

В данной работе в прямоугольнике $\Omega=\{(x,t):0<x<1;\,0<t<T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^\alpha\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}\right)=f(x,t),\quad (1)$$

где $u=u(x,t)$ - неизвестная функция, $f(x,t)$ – заданная функция, а α – заданное действительное число, причем $0<\alpha<1$, $n\in N$.

Исследуем следующую начально-граничную задачу:

Задача Д. Найти функцию $u(x,t)$, которая:

1) u_t, $\left(\partial^j/\partial x^j\right)u$, $\left(\partial^j/\partial x^j\right)\left[x^\alpha\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)u\right] \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $j=\overline{0,2n-1}$; $\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)\left[x^\alpha\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)u\right]$, $u_{tt} \in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) выполняются следующие начальные условия

$$u(x,0)=\varphi_1(x), \quad x\in[0,1], \quad u_t(x,0)=\varphi_2(x), \quad x\in[0,1]$$

и граничные условия

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}u(0,t)=0, \quad \dfrac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}\left(x^\alpha\dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t)\right)\Big|_{x=0}=0, \quad j=\overline{0,n-1}, \quad t\in[0,T]; \\ \dfrac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(1,t)=0, \quad \dfrac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}\left(x^\alpha\dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t)\right)\Big|_{x=1}=0, \quad j=\overline{0,n-1}, \quad t\in[0,T], \end{array}\right\}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$– заданные непрерывные функции.

Доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема. Пусть функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{c} {\varphi_1}^{(j)}(x), \quad \left[x^\alpha {\varphi_1}^{(2n)}(x)\right]^{(j)}, \quad \left[M\varphi_1(x)\right]^{(j)}\in C[0,1], \quad j=\overline{0,2n-1}; \\ x^{\alpha/2}\left[M\varphi_1(x)\right]^{(2n)}\in C(0,1)\cap L_2(0,1); \\ {\varphi_1}^{(2j+1)}(0)=0, \quad {\varphi_1}^{(2j)}(1)=0, \\ \left[x^\alpha {\varphi_1}^{(2n)}(x)\right]^{(2j+1)}\Big|_{x=0}=0, \quad \left[x^\alpha {\varphi_1}^{(2n)}(x)\right]^{(2j)}\Big|_{x=1}=0, \\ \left[M\varphi_1(x)\right]^{(2j+1)}\Big|_{x=0}=0, \quad \left[M\varphi_1(x)\right]^{(2j)}\Big|_{x=1}=0, \quad j=\overline{0,n-1}, \end{array}\right\}$$

функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{c} {\varphi_2}^{(j)}(x), \left[x^\alpha {\varphi_2}^{(2n)}(x)\right]^{(j)}, \quad j=\overline{0,2n-1}; \quad M\varphi_2(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1); \\ {\varphi_2}^{(2j+1)}(0)=0, \quad {\varphi_2}^{(2j)}(1)=0, \\ \left[x^\alpha {\varphi_2}^{(2n)}(x)\right]^{(2j+1)}\Big|_{x=0}=0, \left[x^\alpha {\varphi_2}^{(2n)}(x)\right]^{(2j)}\Big|_{x=1}=0, \quad j=\overline{0,2n-1}, \end{array}\right\} \tag{2}$$

а функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям (2) по аргументу x равномерно по t, где $Mg(x)\equiv\left[x^\alpha g^{(2n)}(x)\right]^{(2n)}$. Тогда существует единственное решение задачи Д.

Отметим, что уравнение (1) при $n=1$, $\alpha=0$ совпадает с уравненем колебания балки [1]. Для этого частного случая уравнения (1) различные начально-краевые задачи сформулированы и изучены в работах [2,3]. Начально-краевые задачи для уравнения (1) при $\forall n\in N$ и $\alpha\in(0,1)$ поставлены и изучены в работах [4,5].

Литература

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** *Уравнения математической физики.* М.: Наука. - 1966. - 724 с.

2. **Сабитов К.Б.** *К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок.* Диффер. уравн., 2017. Т.53, №1. С. 89–100.

3. **Сабитов К.Б., Фадеева О.В.** *Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021. Т.25, №1. С. 51–66.

4. **Уринов А.К., Орипов Д.Д.** *О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка* Вестн. Сам. гос. техн. унта. Сер. Физ.-мат. науки, 2023. Т.27, №4. С. 621–644.

5. **Уринов А.К., Орипов Д.Д.** *Начально-граничная задача для одного вырождающегося уравнения высокого четного порядка* Bull. Inst. Math., 2024, Vol.7, No 3, pp. 133-145.

UDK 517.954

Об одной задаче для нагруженного уравнения с дробной производной Джрбашяна-Нерсесяна.

Очилова Н.К.
Ташкентский Международный Университет Кимё
n.ochilova@gmail.com., n.ochilova@kiut.uz

Рассмотрим следующее уравнение:

$$D_{0t}^{\alpha}u(t,x) - a_1 u_{xx}(t,x) + a_2 u(t_0,x) = 0, \tag{1}$$

где $a_1, a_2 = const$, $t_0 \in (0,T)$, $a_1, T > 0$, $D_{0t}^{\alpha} = D_{0t}^{\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1},\alpha_m\}}$ — оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна порядка $\alpha = \sum_{k=0}^{m}\alpha_k - 1 > 0$, ассоциированный с последовательностью

$$\{\alpha_k\}_0^m = \{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1},\alpha_m\}, \qquad \alpha_k \in (0,1], \quad k = 0,1,...,m,$$

определяемый соотношением [1],

$$D_{0t}^{\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1},\alpha_m\}} = D_{0t}^{\alpha_m-1}D_{0t}^{\alpha_{m-1}}\ldots D_{0t}^{\alpha_1}D_{0t}^{\alpha_0}.$$

D_{0t}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка γ с началом в точке $t = 0$ [2]:

$$D_{0t}^{\gamma}g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\gamma)}\displaystyle\int_0^t \frac{g(y)\,dy}{|t-y|^{1+\gamma}}, & \gamma < 0, \\ g(t), & \gamma = 0, \\ \left(\dfrac{d}{dt}\right)^p D_{0t}^{\gamma-p}g(t), & p-1 < \gamma \le p, \quad p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$, для уравнения (1) исследуется следующая задача:

Задача I. Требуется найти функцию $u(t,x)$, в области Ω, удовлетворяющую уравнения (1) и следующим свойствам:

1. $D_{0t}^{\alpha_k}u(t,x) \in C(\overline{\Omega}), \qquad k = 0,\ldots,m-1,\ u_{xx}(t,x), D_{0t}^{\alpha}u(t,x) \in C(\Omega),$

2. $D_{0t}^{\alpha_0-1}u(0,t) = D_{0t}^{\alpha_0-1}u(\pi,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T$

3. $D_{0t}^{\alpha_k}u(t,x)|_{t=+0} = \varphi_k(x), \qquad k = 0,\ldots,m-1, \qquad 0 \le x \le \pi,$

где $\varphi_k(x), \qquad k = 0,\ldots,m-1,-$ заданные достаточно гладкие функции.

При определенных условиях на заданные функции и параметры, доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи.

References

1. **Джрбашян М.М., Нерсесян А.Д.** *Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка.* Из. АН Арм ССР. Математика. 1968. Т.3. №1.ст.3-28.
2. **A.A.Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J.Trujillo,** *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. MR2218073(2007a:34002).Zbl 1092.45003.

УДК 517.956

Обратная задача об определении источника для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром при видоизмененных условиях Коши

Окбоев А. Б.[1]

[1]Национальный исследовательский университет ТИИИМСХ, Ташкент, Узбекистан;
akmaljon12012@gmail.com

В конечной характеристической области $D \subset \mathbb{R}^2$ $(y < 0)$, ограниченной отрезком $OA = \{(x, 0) : 0 \le x \le 1\}$ линии вырождения $y = 0$ и характеристиками $OB : x - 2\sqrt{-y} = 0$, $AB : x + 2\sqrt{-y} = 1$ с вершиной $B(1/2, -1/16)$, рассматривается вырождающееся гиперболическое уравнение второго рода со спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$L_{\alpha,\lambda}(u) \equiv u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y - \lambda^2 u = f(y), \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

где $f(y)$ — неизвестный пространственный источник. Показатель вырождения $\alpha < 1$ удовлетворяет условиям $\alpha \neq -n$ и $\alpha \neq 1/2 - n$ $(n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\})$ и принадлежит двум неисключительным семействам интервалов:

$$\alpha = -n + \alpha_0 \quad (n = 0, 1, \dots) \quad \text{и} \quad \alpha = 2 - n - \alpha_0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \alpha_0 \in (1/2, 1). \tag{2}$$

Постановка задачи. *Найти пару функций* $(u(x, y), f(y)) \in (C(\bar{D}) \cap C^2(D)) \times C[-1/16, 0]$, *удовлетворяющих уравнению (1) в* D, *видоизмененным условиям Коши при выходе на линию вырождения* $y = 0$*:*

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1], \tag{3}$$

$$\lim_{y \to -0} (-y)^\alpha \frac{\partial}{\partial y} \left[u(x, y) - A^-_\alpha(\tau, \lambda)\right] = \nu(x), \quad x \in (0, 1), \tag{4}$$

и условию переопределения на граничной характеристике OB*:*

$$u(x, y)\big|_{OB} \equiv u\left(x, -\frac{x^2}{4}\right) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1/2]. \tag{5}$$

Регуляризирующий интегро-дифференциальный оператор $A^-_\alpha(\tau, \lambda)$ задается формулой[1]:

$$A^-_\alpha(\tau, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(2n + 2\beta)(4y)^k C^k_n}{\Gamma^2(n + \beta)(\beta + 1/2)_k(\beta + n)_k} \int_0^1 \Psi_k\left[\tau(t), \lambda\right] \left[z(1 - z)\right]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma)\, dz, \tag{6}$$

где $\beta = \alpha - 1/2$, $t = x - 2\sqrt{-y}(1 - 2z)$, $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1 - z)}$, $\Psi_k[\tau, \lambda] = (\lambda^2 - \partial_t^2)^k \tau$, а $\bar{J}_\rho(\sigma)$ — нормированная функция Бесселя.

Предполагается, что входные данные удовлетворяют условиям гладкости:

$$\tau(x) \in C^{2(n+1)}[0, 1], \quad \nu(x) \in C^2[0, 1], \quad \varphi(x) \in C^{2(n+1)}[0, 1/2], \tag{7}$$

а также обобщенным условиям согласования в угловой точке $O(0, 0)$:

$$\tau(0) = \varphi(0), \quad \nu(0) = 0, \quad \tau^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(0) = 0 \quad (j = 1, \dots, 2n), \quad \nu'(0) = 0 \quad (\alpha \in (1/2, 1)). \tag{8}$$

Теорема 1 (Единственность). *Если обратная задача (1)–(5) имеет регулярное решение* $(u(x, y), f(y))$ *в указанном классе, то оно единственно.*

Теорема 2 (Существование и явное представление). *Пусть выполнены условия гладкости (7) и согласования (8). Тогда существует регулярное решение* $(u(x, y), f(y))$ *задачи (1)–(5), представимое в явном виде:*

$$u(x, y) = V(x, y; \tau, \nu, \lambda) + \varphi(2\sqrt{-y}) - V(2\sqrt{-y}, y; \tau, \nu, \lambda),$$

$$f(y) = y\Phi''(y) + \alpha\Phi'(y) - \lambda^2\Phi(y), \quad \Phi(y) = \varphi(2\sqrt{-y}) - V(2\sqrt{-y}, y; \tau, \nu, \lambda),$$

где $V(x,y;\tau,\nu,\lambda) = A_\alpha^-(\tau,\lambda) - \gamma_1(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu(t)[z(1-z)]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)\,dz$, $\gamma_1 = \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$, *а восстановленный источник* $f(y)$ *непрерывен на сегменте* $[-1/16, 0]$ *и в пределе принимает значение:*

$$f(0) = -2\alpha\varphi''(0) + (2\alpha+1)\tau''(0) - \lambda^2\tau(0). \tag{9}$$

Теорема 3 (Устойчивость по Адамару). *Для возмущений решений* $\Delta u = u_1 - u_2$ *и* $\Delta f = f_1 - f_2$, *отвечающих наборам данных* $(\tau_i, \nu_i, \varphi_i)$ $(i = 1, 2)$, *справедливы априорные оценки устойчивости:*

$$\|\Delta f\|_{C[-1/16,0]} \le C_f \left(\|\Delta\tau\|_{C^{2(n+1)}[0,1]} + \|\Delta\nu\|_{C^2[0,1]} + \|\Delta\varphi\|_{C^{2(n+1)}[0,1/2]}\right),$$

$$\|\Delta u\|_{C(\bar{D})} \le C_u \left(\|\Delta\tau\|_{C^{2(n+1)}[0,1]} + \|\Delta\nu\|_{C^2[0,1]} + \|\Delta\varphi\|_{C^{2(n+1)}[0,1/2]}\right),$$

где постоянные $C_f, C_u > 0$ *не зависят от возмущений данных.*

Литература

1. **Уринов А.К., Окбоев А.Б.** *Видоизмененная задача Коши для неоднородного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 2024. - Т. 28, № 1. - С. 45–58.

УДК 517.956.6

Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом

Рузиев М. Х.[1], Юлдашева Н. Т.[2]
[1]Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
ruzievmkh@gmail.com
[2]Университет точных и социальных наук, Ташкент, Узбекистан;
nyuldasheva87@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{sign}y|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y}u_y = 0, \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ – первый квадрант плоскости, D^- – конечная область четвертого квадранта плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1), выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком OB прямой $y = 0$.

В уравнение (1) $m > 0$ некоторое действительное число.

Введем обозначения

$I = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\},\ I_0 = \{(x,y) : 0 < y < \infty,\ x = 0\},\ I_1 = \{(x,y) : 1 < x < \infty,\ y = 0.\}$ Пусть $p(x) \in C^1[c,1]$ - диффеоморфизм множества точек отрезка $[0,c]$ в множества точек отрезка $[c,1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(0) = 1$, $p(c) = c$. Примером такой функции является $p(x) = 1 - kx$, где $k = \frac{1-c}{c}$.

Задача А. Найти в области D функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$ где $\bar{D} = D^+ \cup \bar{D^-} \cup \bar{I}_0 \cup \bar{I}_1$;

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 [1] в области D^-;

4) выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0,$$

где

$$R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},\ x > 0,\ y > 0;$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi(y),\ y\geq 0,$$

$$u(x,0)=\tau_1(x),\ x\in \bar{I}_1,$$

$$\frac{d}{dx}u[\Theta(x_0)]=a(x)u(x,0)+b(x),\ 0<x<c,$$

$$u(p(x),0)=\mu u(x,0)+f(x),\ 0\leq x\leq c,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0}y^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to-0}(-y)^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I\setminus\{c\},$$

причем эти пределы при $x=0$, $x=1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже 1, $\mu=\text{const}$, $a(x),\ b(x),\ f(x)\in C[0,c]\cap C^{1,\delta}(0,c)$, $b(0)=0,\ b(c)=0,\ f(c)=0,\ a(c)=0,\ \tau_1(x)\in C(\overline{I_1})$ причем функция $\tau_1(x)$ в окрестности точки $x=1$ представима в виде $\tau_1(x)=(1-x)\widetilde{\tau}_1(x),\ \widetilde{\tau}_1(x)\in C(\overline{I_1})$ и при достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)|\leq\frac{M}{x^{\varepsilon}}$, где $\varepsilon,\ M-$ положительные константы, $\tau_1(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[1,N],\ N>1,\ \varphi(y)\in C(\overline{I_0}),\ y^{\frac{m}{2}}\varphi(y)\in L(0,\infty)$, $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[0,T],\ T>0,$ $\varphi(\infty)=0,\ \varphi(0)=0,\ \Theta(x_0)-$ координаты точки пересечения характеристики OC с характеристикой исходящей из точки $E(x_0,0),\ x_0\in(0,c)$,

$$\Theta(x_0)=\Big(\frac{x_0}{2};-\Big(\frac{(m+2)x_0}{4}\Big)^{\frac{2}{m+2}}\Big).$$

В работе [2] краевая задача для уравнения $\text{sing}|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\beta_0}{y}u_y=0$, в случае $-\frac{m}{2}<\beta_0<1$, исследована в области D.

Теорема 1. Пусть выполнено условие $0<\mu<1$. Тогда, задачи A не может иметь более одного решения.

Теорема 2. Пусть выполнены условия $\mu k^{\frac{1}{2}}\sin(\alpha\pi)<1,\quad p(x)=1-kx$. Тогда решение задачи существует.

Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума для эллиптических и гиперболических уравнений, существование — методом интегральных уравнений.

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* Высшая школа, М., 1985

2. **Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т.** *Об одной краевой задаче для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.* Изв. вузов, серия Мат. 2024. №12. С.57-70.

УДК 517.95

О корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа с характеристическим вырождением

Сабитов К. Б.[1,2]

[1]Институт механики УФИЦ РАН, Уфа, Россия,
[2]Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия,
sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\mathbb{L}u = (\operatorname{sign} y)|y|^m u_{yy} + u_{xx} - bu = F(x,y) = \begin{cases} F_1(x,y), & y > 0, \\ F_2(x,y), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m = \text{const} > 0$, $b = \text{const}$, в области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < \ell,\ -\alpha < y < \beta\}$, где ℓ, α и β – заданные положительные числа и исследуем на корректность постановку первой граничной задачи.

Отметим, что уравнение (1) на линии $y = 0$ вырождается, как в работе Келдыша М.В. [1].

Задача 1 (Задача Дирихле). *Пусть* $0 < m < 1$. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$\mathbb{L}u(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0, \ \ -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le \ell; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \ \ 0 \le x \le \ell, \tag{6}$$

где $F(x,y)$, $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции, при этом* $\varphi(0) = \varphi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача 2 (Задача Келдыша). *Пусть* $1 \le m < 2$. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую следующим условиям* (2) – (5).

В этой задаче на отрезке $y = -\alpha$, $0 \le x \le \ell$ условие (6) уже не задается.

Задача 3. *Пусть* $1 \le m < 2$. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям* (3) – (6) u

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{7}$$

$$\lim_{y \to 0+0} y^{-m-1} u_y(x,y) = \lim_{y \to 0-0} (-y)^{-m-1} u_y(x,y), \ \ 0 < x < \ell, \ \ 1 < m < 2; \tag{8}$$

$$\lim_{y \to 0+0} \frac{u_y(x,y)}{\ln y} = -\lim_{y \to 0-0} \frac{u_y(x,y)}{\ln(-y)}, \quad m = 1. \tag{9}$$

При $m \ge 2$ аналоги приведенных задач 1 – 3 поставлены некорректно.

Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возник после известной работы Франкля Ф.И. [2], где впервые было показано, что задача перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые волны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения.

В нашей работе [3] был предложен спектральный метод обоснования корректности постановки задачи (2) – (6) для уравнения (1) при $m < 0$ и $F(x,y) \equiv 0$.

Показано, что корректность постановки первой граничной задачи существенным образом зависит от показателя степени вырождения и отношения сторон прямоугольника из гиперболической части смешанной области. Установлен критерий единственности решения задачи 1. Это решение построено в виде суммы ряда Фурье. При обосновании равномерной сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей. В связи с чем установлены оценки малых знаменателей об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили доказать сходимость ряда в классе регулярных решений данного уравнения. Доказаны оценки об устойчивости решения от заданных граничных функций и правой части. Аналогично изучены задачи 2 и 3.

Литература

1. **Келдыш М.В**. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа.* // ДАН. 1951. Т.77. №2. С. 181 – 183.

2. **Франкль Ф.И.** *Избранные труды по газовой динамике.* М.: Наука, 1973.

3. **Сабитов К.Б.** *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области* // Докл. РАН. 2007. Т. 413. №1. С. 23 – 26.

УДК 517.95

Об одной начально-краевой задаче для одномерного уравнения Буссинеска четвертого порядка

Сафаров Ж. Ш.[1],Акылбаев М. И.[2], Джамиева Б. А.[3], Файзуллаев Ш. М.[4]
[1]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий,г. Ташкент, Узбекистан; j.safarov65@mail.ru
[2]УДН имени академика А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан; musabek.kz@mail.ru
[3]Южно-Казахстанский университет имени М. Ауезова, Шымкент, Казахстан; Balzhan1989aiu@mail.ru
[4]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий,г. Ташкент, Узбекистан; sherali1501144@gmail.com

Рассматривается линейное одномерное уравнение Буссинеска четвертого порядка [1] с переменным младшим членом. Для него изучается начально-краевая задача с обычными начальными и шарнирно закрепленными граничными условиями.

Уравнения типа Буссинеска возникают при математическом моделировании распространения длинных волн в диспергирующих средах и сочетают волновой характер с влиянием производных высокого порядка. Наличие зависящего от времени коэффициента $a(t)$ не изменяет пространственную спектральную структуру задачи, однако приводит к неавтономной системе уравнений для коэффициентов Фурье. Поэтому естественным является применение спектрального метода с последующим исследованием полученных обыкновенных дифференциальных уравнений. Основная цель работы состоит в установлении достаточных условий существования и единственности регулярного решения и в обосновании почленного дифференцирования соответствующего ряда Фурье.

Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + a(t)u = 0, \qquad x \in (0,l),\ 0 < t \leq T \tag{1}$$

начальным

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0. \tag{3}$$

Определение. Функция $u(x,t)$ из класса $C^{4,2}_{x,t}(D_T) \cap C^{2,0}_{x,t}\left(\overline{D_T}\right)$, называется регулярным решением задачи (1)-(3)в области $D_T := \{(x,t) : x \in (0,l),\ t \in (0,T]\}$, если она удовлетворяет этим уравнениям в обычном смысле.

В работе применяется метод Фурье. Для исследования начально-краевой задачи (1)-(3) в пространстве $L^2(0,l)$ вводится самосопряженный оператор $Lu = -u_{xx} + u_{xxxx}$. Его собственные функции и собственные значения имеют вид $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}$, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$, $n \in \mathbb{N}$. Система ϕ_n образует ортонормированный базис в $L^2(0,l)$. Искомое решение представляется в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\phi_n(x), \tag{4}$$

где коэффициенты $u_n(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) + a(t)u_n = 0 \tag{5}$$

с начальными условиями

$$u_n(0) = c_n, \qquad u_n'(0) = d_n, \tag{6}$$

здесь c_n и d_n - коэффициенты Фурье функций u_0 и u_1, соответственно.

Обозначим $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ и $A = \max_{0\le t\le T}|a(t)|$. Тогда задача (5), (6) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра

$$u_n(t) = c_n \cos\omega_n t + \frac{d_n}{\omega_n}\sin\omega_n t - \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)a(\tau)u_n(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Из (7) и неравенства Гронуолла следует оценка

$$|u_n(t)| \le C_T\left(|c_n| + \frac{|d_n|}{\omega_n}\right), \qquad C_T = \exp\left(\frac{AT}{\omega_1}\right). \tag{8}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема однозначной разрешимости поставленной задачи.

Теорема. Пусть $a \in C[0,T]$, функции u_0, u_1 удовлетворяют условиям согласования

$$u_j(0) = u_j(l) = u_j''(0) = u_j''(l) = 0, \qquad j = 0,1,$$

а их коэффициенты Фурье $c_n = (u_0, \phi_n)$ и $d_n = (u_1, \phi_n)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|c_n| < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\,|d_n| < \infty. \tag{9}$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет единственное регулярное решение. Это решение задается рядом (4), где $u_n(t)$ является единственным решением задачи (5), (6).

Краткое доказательство. Для каждого n задача (5), (6) при $a \in C[0,T]$ имеет единственное решение $u_n \in C^2[0,T]$. Из (8) и условий (9), учитывая $\lambda_n \asymp n^4$ и $\omega_n \asymp n^2$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \max_{[0,T]}|u_n(t)| < \infty.$$

Следовательно, ряд (4), а также ряды, полученные его почленным дифференцированием до четвертого порядка по x, сходятся равномерно. Из уравнения (5)

$$u_n''(t) = -\big(\lambda_n + a(t)\big)u_n(t),$$

поэтому ряд для u_{tt} также сходится равномерно на $[0,l]\times[0,T]$. Тем самым почленное дифференцирование в (4) допустимо, и сумма ряда удовлетворяет уравнению (1). Начальные условия следуют из (6), а граничные условия — из равенств $\phi_n(0) = \phi_n(l) = \phi_n''(0) = \phi_n''(l) = 0$. Следовательно, построенная функция является регулярным решением задачи (1)–(3).

Пусть теперь u и v — два регулярных решения и $w = u - v$. Раскладывая w по системе $\{\phi_n\}$, для каждого коэффициента $w_n(t) = (w(\cdot,t), \phi_n)$ получаем однородное уравнение с однородными начальными условиями

$$w_n'' + (\lambda_n + a(t))w_n = 0, \qquad w_n(0) = w_n'(0) = 0.$$

Следовательно $w_n \equiv 0$ для всех n. В силу полноты системы $\{\phi_n\}$ имеем $w \equiv 0$.

Литература

1. **Whitham G. B.,** *Linear and Nonlinear Waves.* Wiley, 1974.

УДК 517.95

О радиально симметричных решениях для эллиптического уравнения с сингулярным $p(|x|)$-Лапласианом.

Терсенов Арис Саввич[1], Сафаров Расул Чориёр угли[2].
[1] Новосибирский государственный университет, Новосибирск 630090, Россия;
[1] Институт математики им. С.Л Соболева СО РАН, Новосибирск 630090, Россия;
a.terseno@math.nsc.ru
[2] Новосибирский государственный университет, Новосибирск 630090, Россия;
r.safarov1@g.nsu.ru

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-div(|\nabla u|^{p(|x|)-2}\nabla u) = F(x,u,\nabla u) \quad \text{в} \quad B_R \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial B_R, \tag{2}$$

где B_R – шар радиуса R, ∂B_R – граница B_R, $1 < p(|x|) < 2$.
Будем предполагать, что функция $F(x,u,\nabla u)$ может быть представлена в виде $F(r,u,u_r)$ при замене переменных $r = |x|$. Примерами таких функций являются, например, функции вида

$$F(|x|,u,|\nabla u|), \quad F(|x|,u,x\cdot\nabla u),$$

где $x\cdot\nabla u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_{x_i}$. В дальнейшем производную функции u по переменной r мы будем обозначать u'. Хорошо известно, что ограниченное радиально симметричное решение (1), (2) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p(r)-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p(r)-2}u' = F(r,u,u'), \quad r \in (0,R), \tag{3}$$

и краевым условиям

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. \tag{4}$$

Одним из стандартных условий, используемых при исследовании разрешимости задачи (1), является условие Бернштейна–Нагумо, накладываемое на функцию $F(r,u,u')$:

$$|F(r,u,q)| \le c\left(1 + |q|^{p(r)}\right), \qquad (r,u,q) \in [0,R]\times[-M,M]\times\mathbb{R},$$

где c — некоторая положительная константа, при условии, что решение удовлетворяет ограничению $\max|u| \le M$, где M — некоторая постоянная.

В настоящей работе исследуется разрешимость задачи (1) без наложения каких-либо условий малости в случае, когда функция $F(r,u,q)$ допускает произвольный рост по переменной q [см. 1]. В силу сингулярности уравнения (3), его решения могут не принадлежать пространству дважды непрерывно дифференцируемых функций. В связи с этим дадим определение того, что мы понимаем под решением задачи (3), (4).

Определение. *Будем говорить, что функция $u(r)$ является слабым решением задачи (3), (4) если $u(r) \in \mathbb{C}^{1,1}(0,R)\cap\mathbb{C}^1[0,R]$ и удовлетворяет (4) и имеет место интегральное тождество*

$$\int_0^R |u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\phi'(r)dr =$$

$$\int_0^R \frac{n-1}{r}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\phi(r)dr + \int_0^R F(r,u(r),u'(r))\phi(r)dr,$$

$$\forall\phi(r) \in \mathbb{C}_0^\infty(0,R).$$

В силу указанной в определении гладкости искомого решения, краевые условия (4) понимаются в обычном смысле.

Для простоты изложения, ограничимся случаем, когда F имеет вид

$$F(r,u,u') = u|u|^{m-1} + g(r,u,u') + f(r), \quad g(r,u,0) = 0, \tag{5}$$

а $f(r)$ не обращается тождественно в ноль.

Будем считать, что $p(r) \in \mathbb{C}^2(0,R)\cap\mathbb{C}[0,R]$ и принимает следующие значения

$$1 + \delta_1 \le p(r) \le 2 - \delta_2, \quad r \in [0,R], \tag{6}$$

где δ_i, $i = 1,2$–некоторые положительные постоянные, удовлетворяющие $\delta_1 + \delta_2 \le 1$. Введем постоянную α следующим образом. Будем говорить $\alpha \in A$, если $1 - \delta_2 < \alpha$ и выполнено $(u'^{\alpha})^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} = |u'|^{p(r)-2}$. В качестве α можно взять $\alpha = \frac{l}{k} > 1 - \delta_2$, где l — четное число, k — целое

положительное число. Эта постоянная будет использована как параметр регуляризации исходной задачи. Определим следующее множество

$$\mathbb{V} = \left\{ M > 0 \Big| \left(\frac{M}{R}\right)^{p(r)-1} \left(\frac{n-1}{r} - |p'(r)| ln \left(\frac{M}{R}\right)\right) > \pm F_{\pm} + M^m,\ \forall r \in (0,R) \right\}, \tag{7}$$

где

$$F_+ = \max_{[0,R]\times[0,M]} \left(f(r) + g\left(r, u, -\frac{M}{R}\right)\right), \quad F_- = \min_{[0,R]\times[0,M]} \left(f(r) + g\left(r, u, \frac{M}{R}\right)\right).$$

Положим

$$M_0 = \inf_{M\in\mathbb{V}} \mathbb{V}, \quad f_0 = \max_{r\in[0,R]} |f(r)|. \tag{8}$$

Введем постоянную C, удовлетворяющую неравенству

$$C > \max_{r\in[0,R]} \left\{ 1, \left(\frac{M^m + f_0}{(p(r)-1)(1+R)^{p(r)-2}} \right)^{\frac{1}{p(r)-1}}, \frac{2M}{R(R+2)} \right\}. \tag{9}$$

Предположим, что $g(r,u,u')$ удовлетворяет условиям

$$|g(r,u,q) - g(s,u,q)| \le K(r,s,u,q)(r-s) \tag{10}$$

для $r,s \in (0,R)$, $0 < r-s$, $|u| \le M$, $q \in [-(1+R)C, C] \cup [C,(1+R)C]$, где $K \ge 0$,

$$g(r,u_2,q) - g(r,u_1,q) \ge \gamma(r,u_1,u_2,q)(u_1-u_2) \tag{11}$$

для $r \in (0,R)$, $|u_1|, |u_2| \le M$, $u_1 > u_2$, $q \in [-(1+R)C, C] \cup [C,(1+R)C]$, где $\gamma(r,u_1,u_2,q) \ge 0$. Обозначим через $\mathbb{W}$ следующее множество

$$\mathbb{W} = \left\{ (r,s) \in (0,R), 0 < r-s, |u_1|, |u_2| \le M, u_1 - u_2 \ge C\left(1 + R - \frac{1}{2}(r-s)\right)(r-s) \right\}.$$

Предположим, что для любых $(r,s,u_1,u_2) \in \mathbb{W}$ выполнено

$$K(r,s,u_1, \pm C\left[(1+R) - (r-s)\right]) -$$

$$\gamma(r,u_1,u_2, \pm C\left[(1+R) - (r-s)\right]) C\left(1 + R - \frac{1}{2}(r-s)\right) \le 0. \tag{12}$$

при $s > r, q > 0, u_1 > u_2$. Предположим, что g и f удовлетворяют условию

$$\mathbb{V} \ne \varnothing. \tag{13}$$

Теорема. *Предположим, что $p(r) \in C^2(0,R) \cap C^1[0,R]$ удовлетворяет (6), $p'(r) \le 0$, $p''(r) \le 0$ а $F(r,u,u')$ из (5), непрерывна по совокупности своих аргументов и удовлетворяет (10)-(13). Тогда существует слабое решение задачи (3), (4) удовлетворяющее неравенству*

$$|u(r)| \le M_0, \quad |u'(r)| \le C, \quad r \in [0,R].$$

где M_0 из (8), C из (9).

Сделаем несколько замечаний касаемо выполнимости условий (13) и (10)–(12). Заметим, что (7) представляет из себя условия малости на входные параметры задачи. Легко видеть, что множество V не пусто при любых $F_{\pm}$ и $m > 0$, при достаточно малых R, т.е. при достаточно малых размерах области.

Рассмотрим теперь ситуацию с фиксированными размерами области. Из (9) следует, что постоянная C может быть выбрана сколь угодно большой. Таким образом, например, функция

$$g = r{u'}^{2k+1} - u|u'|^{\nu}$$

удовлетворяет (10)–(12) при $2k \le \nu$, где k — неотрицательное целое число (см. [13]). В то же время для указанной g имеет место неравенство

$$|F_{\pm}| \le f_0.$$

Для того чтобы (13) имело место, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\left(\frac{M}{R}\right)^{p(r)-1}\left(\frac{n-1}{R} - p_0 \ln\left(\frac{M}{R}\right)\right) > f_0 + M^m, \qquad \forall r \in (0,R), \text{где } p_0 = \max|p'(r)|. \tag{14}$$

Положим $M \le \min\{1, R\}$. Легко видеть, что для таких значений M и произвольных $p_0, m > 0$, всегда существует $f_0 > 0$ такое, что (14) имеет место. Таким образом, мы получаем условие малости на $\max_{r\in[0,R]}|f(r)|$.

Для доказательства теоремы, мы регуляризуем уравнение (3) и доказываем классическую разрешимость регуляризованной задачи, основываясь на технике, разработанной в [2], [3], и используя принцип неподвижной точки. Далее, мы используем процедуру предельного перехода для получения слабого решения задачи (3), (5). Главным отличием настоящей тезисов является рассмотрение сингулярного случая для переменного показателя $p = p(|x|)$.

Литература

1. **Ar. S. Tersenov, Safarov R.Ch.** *On radially symmetric solutios for the elliptic equation with singular $p(|x|)$-Laplacian.* // Mat. Trudy, 2026, V. 29(2), pp. 93–112.
2. **Ar. S. Tersenov.** *Radially symmetric solutions of the p-Laplace equation with gradient terms.* // Journal of Applied and Industrial Mathematics, V. 12 (4), (2018), pp. 770–784.
3. **Ar. S. Tersenov.** *On the existence of radially symmetric solutios for the p-Laplace equation with strong gradient nonlinearities.* // Siberian Mathematical Journal, V. 64 (6), (2023), pp. 1443–1454.

УДК 517.956.6

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

У. Ш. Убайдуллаев
Самаркандский государственный университет им.Ш Рашидова,г.Самарканд,Узбекистан;
ulugbekubaydulayevuz88@gmail.com

Благодарности. *Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект* ***Ф3-202009211, ТерГУ****).*

Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа целого порядка в прямоугольной области впервые были рассмотрены К. Б. Сабитовым [1], а уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка изучены в работах [2–3].

В данной работе для неоднородного уравнения смешанного типа дробного порядка в смысле Капуто со спектральным параметром в прямоугольной области исследована первая начально-граничная задача Установлен критерий единственности решения поставленной задачи. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда, и доказана его сходимость в классе регулярных решений данного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x,y), \tag{1}$$

здесь

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - {}_cD^{\delta}_{q\,y}u - \lambda^2 u, & x>0, \quad q<y<r, \quad 0<\delta\le 1, \\ u_{xx} + {}_cD^{\alpha}_{0\,y}u - \lambda^2 u, & x>0, \quad 0<y<q, \quad 1<\alpha\le 2, \\ u_{xx} - {}_cD^{\beta}_{y\,0}u - \lambda^2 u, & x>0, \quad -p<y<0, \quad 1<\beta\le 2, \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} f_1(x,y), & x>0, \quad q<y<r, \\ f_2(x,y), & x>0, \quad 0<y<q, \\ f_3(x,y), & x>0, \quad -p<y<0 \end{cases} \tag{2}$$

в прямоугольной области $\Omega=\{(x,y):\ 0<x<l,\ -p<y<r\}$, где $p>0$, $r>0$, $0<q<r$, l, λ −заданные действительные числа, $f_i(x,y)(i=\overline{1,3})$_ − известные функции,

Введем обозначения: $J_1=\{(x,y):\ 0<x<l,\ y=q\}$, $J_2=\{(x,y):\ 0<x<l,\ y=0\}$,

$$\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y):\ x>0,\ q<y<r\},\Omega_2=\Omega\cap\{(x,y):\ x>0,\ 0<y<q\},$$

$$\Omega_3=\Omega\cap\{(x,y):\ x>0,\ -p<y<0\},\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup J_1\cup J_2,$$

а ${}_cD^{\gamma}_{0y}$−оператор дробного порядка в смысле Капуто [4, с. 14] :

$${}_cD^{\gamma}_{ay}\omega(y)=(sign(y-a))^n D^{\gamma-n}_{ay}\omega^{(n)}(y), \quad n-1<\gamma\le n, \ \ n\in \mathrm{N},$$

здесь $D^{\chi}_{ay}g(y)$− интегро-дифференциальный оператор Римана - Лиувилля порядка $\chi\in$ C[2].

Класс $C^{\,k}_{\theta}$**.** Через $C^{\,k}_{\theta}(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производных по θ до $k-$ го порядка включительно в области M.

В области Ω исследуем следующую задачу.

Задача IBP (**начально-граничная задача**)**.** Требуется найти функции $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1)$u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{\,1}_{y}(\Omega_2\cup J_1\cup J_2)\cap C^{\,1}_{y}(\Omega_3\cup J_2)$, $(y-q)^{1-\delta}u_y(x,y)\in\ C(\Omega_1\bigcup J_1)$;

2) $u(x,y)\in C^{\,2}_{x}(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)$, ${}_cD^{\delta}_{q\,y}u\in C(\Omega_1)$, ${}_cD^{\,\alpha}_{0y}u\in C(\Omega_2)$, ${}_cD^{\,\beta}_{y\,0}u\in C(\Omega_3)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_k $(k=\overline{1,3})$; 3) на линиях J_j $(j=1,2)$ выполняются условия склеивания

$$\begin{gathered} u(x,q+)=u(x,q-), \quad (x,q)\in\bar{J}_1, \quad u(x,0+)=u(x,0-), \quad (x,0)\in\bar{J}_2, \\ \lim_{y\to q+}(y-q)^{1-\delta}u_y(x,y)=\lim_{y\to\ q-}u_y(x,y), \quad (x,q)\in J_1, \\ \lim_{y\to 0+}u_y(x,y)=\lim_{y\to\ 0-}u_y(x,y), \quad (x,0)\in J_2, \end{gathered} \tag{3}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(0,y)=0, \quad u(l,y)=0, \quad -p\le y\le r\,, \quad u(x,-p)=0, \quad 0\le x\le l\,, \tag{4}$$

где $\psi(x)$ −заданная достаточно гладкая функция.

Решение задачи (1), (3), (4) и 1)-2) задачи IBP будем искать в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи

$$u(x,y)\ =\ \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(y)sin\mu_n x\ , \quad \mu_n=\frac{\pi n}{l}, \tag{5}$$

здесь $u_n(y)$– пока неизвестные функции и они формально определяются по формуле

$$u_n(y)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l u(x,y)sin\mu_n x dx. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$u_n(y)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,y)sin\mu_n x dx, \tag{7}$$

здесь ε– достаточно малое положительное число.

Заметим, что система функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}sin\mu_n x\right\}_{n=1}^{+\infty}$полна и образует ортонормированный базис в пространстве $L_2\,[0,l]$.

Аналогично как работе [3] для функций $u_n(y),\ n \in \mathrm{N}$ с учетом уравнение (1) и функцию (7), а затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (4), получаем следующую краевую задачу на сопряжение:

$$ {}_cD^{\,\delta}_{q\,y} u_n(y) + \rho_n^2 u_n(y) = -f_{1n}(y), \quad q < y < r, \quad 0 < \delta \le 1, \tag{8} $$

$$ {}_cD^{\,\alpha}_{0y} u_n(y) - \rho_n^2 u_n(y) = f_{2n}(y), \quad 0 < y < q, \quad 1 < \alpha \le 2, \tag{9} $$

$$ {}_cD^{\,\beta}_{y\,0} u_n(y) + \rho_n^2 u_n(y) = -f_{3n}(y), \quad -p < y < 0, \quad 1 < \beta \le 2, \tag{10} $$

$$ \begin{array}{ll} u_n(0+q) = u_n(0-q), & u_n'(0+q) = u_n'(0-q), \\ u_n(0+0) = u_n(0-0), & u_n'(0+0) = u_n'(0-0), \end{array} \tag{11} $$

$$ u_n(-p) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) sin\mu_n x\, dx = 0, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{12} $$

где $\rho_n = \sqrt{\mu_n^2 + \lambda^2}$, $\lim\limits_{y \to +q} (y-q)^{1-\delta} u_{n\,y}(y) = u_n'(0+q)$, $\lim\limits_{y \to -q} u_{n\,y}(y) = u_n'(0-q)$, $n \in \mathrm{N}$,

$$ f_{k\,n}(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l f_k(x,y) sin\mu_n x dx, \quad (k = \overline{1,3}). \tag{13} $$

Единственное решение задачи (8) – (12) существует и определяется по формуле

$$ u_n(y) = \begin{cases} C_{0n} E_{\delta,1}(-\rho_n^2 (y-q)^\delta) - \int\limits_q^y (y-t)^{\delta-1} E_{\delta,\delta}(-\rho_n^2 (y-t)^\delta) f_{1n}(t)\, dt, q < y < r, \\ C_{1n} E_{\alpha,1}\left(\rho_n^2 y^\alpha\right) + C_{2n}\, y\, E_{\alpha,2}\left(\rho_n^2 y^\alpha\right) + \\ + \int\limits_0^y (y-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\rho_n^2 (y-t)^\alpha) f_{2n}(t)\ dt,\ 0 < y < q, \\ C_{3n} E_{\beta,1}\left(-\rho_n^2 (-y)^\beta\right) - C_{4n}\, y\, E_{\beta,2}\left(-\rho_n^2 (-y)^\beta\right) - \\ \quad - \int\limits_y^0 (t-y)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-\rho_n^2 (t-y)^\beta) f_{3n}(t)\ dt, -p < y < 0, \end{cases} \tag{14} $$

где

$$ C_{0n} = \frac{\Psi_n \left(d_n e_n - c_n^2\right) - F_n \left(a_n c_n - b_n e_n\right) + G_n \left(b_n c_n - a_n d_n\right)}{\Delta_p(n)}, $$

$$ C_{1n} = C_{3n} = \frac{-\Psi_n c_n + b_n G_n - \frac{\rho_n^2}{\Gamma(\delta)} \left(\Psi_n d_n + b_n F_n\right)}{\Delta_p(n)}\ , $$

$$ C_{2n} = C_{4n} = \frac{-a_n G_n + \Psi_n e_n + \frac{\rho_n^2}{\Gamma(\delta)} \left(a_n F_n + c_n \Psi_n\right)}{\Delta_p(n)} $$

при условии, что при всех $n \in \mathrm{N}$

$$ \Delta_p(n) = \left(b_n e_n - a_n c_n\right) + \frac{\rho_n^2}{\Gamma\left(\delta\right)} \left(b_n c_n - a_n d_n\right) \neq 0, \tag{15} $$

здесь $a_n = E_{\beta,1}\left(-\rho_n^2 p^\beta\right), \quad b_n = p\, E_{\beta,2}\left(-\rho_n^2 p^\beta\right),$

$$ c_n = E_{\alpha,1}\left(\rho_n^2 q^\alpha\right), \quad d_n = q\, E_{\alpha,2}\left(\rho_n^2 q^\alpha\right), \quad e_n = \rho_n^2 q^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\rho_n^2 q^\alpha\right), $$

$$\Psi_n = \int_{-p}^{0} (t+p)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-\rho_n^2 \left(t+p\right)^{\beta}) \, f_{3n}\left(t\right) \, dt,$$

$$F_n = \int_{0}^{q} (q-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\rho_n^2 \left(q-t\right)^{\alpha}) \, f_{2n}\left(t\right) \, dt,$$

$$G_n = -\int_{0}^{q} (q-t)^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(\rho_n^2 \left(q-t\right)^{\alpha}) \, f_{2n}\left(t\right) \, dt - \frac{f_{1n}\left(q\right)}{\Gamma\left(\delta\right)}.$$

где $E_{\omega,\gamma}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\omega\, n+\gamma)}$, $z, \quad \delta, \quad \gamma \in C, \quad Re(\omega) > 0, \quad Re(\gamma) > 0$ функцией типа Миттаг – Леффлера [3].

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи IBP, то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (15) при всех $n \in \mathrm{N}_0$.*

Теорема 2.*Пусть выполнены условия $f_j\left(x;y\right) \in C\left(\bar{\Omega}_j\right) \cap C_{x;y}^{3;0}(\Omega_j)$, $f_j\left(0;y\right) = f_j(l,y) = 0$, $f_{jxx}''\left(0;\, y\right) = f_{jxx}{}''(l,y) = 0, \quad (j = \overline{1,3}), \quad q < y < r \quad$ при $\quad j = 1$, $0 < y < q \quad$ при $\quad j = 2$, $-p < y < 0 \quad$ при $\quad j = 3$ и $\Delta_p(n) \geq c > 0$ при всех $n \in N$, то существует единственное решение задачи IBP и оно определяется рядом (5), где $u_n\left(y\right)$ находиться из (14). В этом случае функция $u(x,y)$ принадлежит классам 1) и 2) (см. задачу IBP).*

С использованием методов общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, математического и спектрального анализа доказываются теоремы 1 и 2 (см. [1], с. 71–80).

Литература

1. **Сабитов К.Б.** *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.* Москва. 2016. "Наука". 271 с.

2. **Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh.** *On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain.* Lobachevskii J. of Math. 2020. **41**(9). P. 1801–1810.

3. **Исломов Б.И ., Убайдуллаев У.Ш.** *Об одной задаче для уравнения смешанного параболо-эллиптико-гиперболичееского типа дробного порядка в прямоугольной области.* Тезисы докладов Международной научной конференции на тему **"Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения"**. Ташкент. 2023(23-25 ноября) Часть I. С. 75-77.

4. **Псху А.В.** *Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка.* Нальчик. 2005. 186 с.

УДК 517.953

Биортогональные системы и их применение к решению краевой задачи для одного класса вырождающегося уравнения третьего порядка составного типа

Хасанов А.
Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
Ташкент, Узбекистан;
anvarhasanov@yahoo.com

Исследования последних десятилетий в области теории дифференциальных уравнений с частными производными демонстрируют устойчивый интерес к краевым задачам для уравнений классического типа. К их числу относятся уравнения высших порядков (в частности, третьего), которые находят широкое применение при математическом моделировании различных физических, гидродинамических процессов. Уравнения третьего порядка описывают такие явления, как распространение волн в средах (уравнение Кортевега — де Вриза), процессы фильтрации влаги в капиллярно-пористых средах [8] (уравнения влагопереноса Аллера-Лыкова), а также динамику грунтовых вод и процессы тепломассопереноса.

Особое теоретическое и прикладное значение имеют вырождающиеся уравнения третьего порядка, у которых коэффициент при старшей производной обращается в ноль на границе области или внутри. Фундаментальный вклад в становление теории краевых задач для уравнений смешанного типа и вырождающихся уравнений второго порядка внесли классические работы Ф. Трикоми, С. Геллерстедта, М. В. Келдыша, А. В. Бицадзе. Развитие этих идей для уравнений третьего и более высоких порядков нашло отражение в трудах А. М. Нахушева, С. А. Терсенова, А. И. Кожанова [7] и других исследователей.

Однако, несмотря на глубокую изученность уравнений второго порядка, теория краевых задач для вырождающихся уравнений в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками развита в меньшей степени. Это обусловлено качественными отличиями математического аппарата: несамосопряженностью возникающих дифференциальных операторов, усложнением структуры фундаментальных решений и необходимостью исследования спектральных свойств специфических биортогональных систем. Отметим некоторые работы, в которых рассматривались свойства биортогональных систем M. V. Keldysh [1], S. Fridli, F. Schipp [11], R. Keown, C. Conatser [12], Anna Johnson Pell [13], Н. К. Бари [14], A.I. Shtern [15].

В настоящей работе исследуется корректность постановки и разрешимость краевой задачи в прямоугольной области для линейного неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с вещественным степенным вырождением коэффициента по пространственной переменной y. Поскольку соответствующий пространственный оператор по переменной x не является самосопряженным, классическая схема Фурье модифицируется. Строится специальная система собственных функций, выражающаяся через обобщенные гипергеометрические функции [2, 3] ${}_0F_2$, и доказывается полнота и биортогональности сопряженной к ней системы на основе теории целых функций Б. Я. Левина [6] (метод характеристического определителя - это мощный математический инструмент, созданный Б. Я. Левиным. Он применяется в обратных задачах спектрального анализа для дифференциальных уравнений и теории несамосопряженных операторов). Для обоснования разрешимости неоднородной задачи по переменной успешно реализован метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) с привлечением аппарата определителей Вронского.

Для уравнения третьего порядка смешанно составного типа постановка краевых задач требует учета свойства оператора и корректного задания условий на границе для обеспечения существования и единственности решения. Для уравнений нечетного порядка характерна несамосопряженность, поэтому количество условий на противоположных сторонах прямоугольника часто различается.

Задача 1. В прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : \ 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$ найти функцию $u(x, y) \in C^3(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению

$$L\left(u\right) = y^m u_{xxx} + u_{yyy} = f\left(x, y\right), \tag{1.1}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \tag{1.2}$$

$$u_x(0, y) = \varphi_2(y), \tag{1.3}$$

$$u(a, y) = \varphi_3(y), \tag{1.4}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \tag{1.5}$$

$$u_y(x, 0) = \psi_2(x), \tag{1.6}$$

$$u(x, b) = \psi_3(x). \tag{1.7}$$

Для того чтобы задача была корректно поставлена (в смысле Адамара), а решение обладало необходимой гладкостью, заданные функции должны принадлежать классу $\varphi_i \in C^3[0, b]$ и $\psi_j \in C^3[0, a]$. Значения функций в углах прямоугольника должны удовлетворять условия согласования $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_3(0) = \psi_1(a)$, $\varphi_1(b) = \psi_3(0)$, $\varphi_3(b) = \psi_3(a)$.

Для решение поставленной задачи 1, исследуются следующие разделы:

1. Теорема о единственности решения задачи 1,
2. Биортогональные системы,

3. Определения биортогональной системы собственных функций,
4. Теорема о нормировочном коэффициенте биортогональной системы,
5. Определения нормировочного коэффициента,
6. Теорема о полноте биортогональной системы функций,
7. О разложении функции по биортогональной системе,
8. Определения линейно независимых решений обобщенного гипергеометрического уравнения,
9. Существование решения задачи 1,
10. Исследование гладкости решение задачи 1.

Литература

1. **M. V. Keldysh.** *On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators.* Russian Mathematical Surveys, 1971, Volume 26, Issue 4, Pages 15–44.
2. **Appell P., Kampe de Feriet J.** *Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite.* Gauthier - Villars. Paris, 1926, p. 440.
3. **A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi.** *Higher Transcendental Functions.* vol. I, McGraw-Hill, New York, Toronto and London, 1953.
4. **Винер Н., Пэли Р.** *Преобразование Фурье в комплексной области.* М.: Наука, 1964.
5. **Levinson N.** *Gap and density theorems.* New York: AMS Coll. Publ., 1940, v. XXVI.
6. **Levin's B. Ya.** *Distribution o f zeros of entire functions.* 1964, Amer. Math. Soc , Providence, R. I., 493 pp. Revised edition, 1980, Amer. Math. Soc, Providence, R.I., 523 pp.
7. **Кожанов А.И.** *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка.* Новосибирск: НГУ, 1990.
8. **Чудновский А. Ф.** *Теплофизика почв.* Наука, М., 1976, 352 с.
9. **Нахушев А. М.** *Дробное исчисление и его применение.* Физматлит, М., 2003, 272 с.
10. **Марченко В. А.** *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.* Киев: Наукова думка, 1977.
11. **S. Fridli , F. Schipp.** *Biorthogonal system to rational functions.* Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 35 (2011) 95-105.
12. **R. Keown, C. Conatser.** *Biorthogonal systems in l_p - spaces.* Published online by Cambridge University Presshttps://doi.org/10.4153/CJM-1969-071-6.
13. **Anna Johnson Pell.** *Biorthogonal Systems of Functions.* Transactions of the American Mathematical Society, Apr., 1911, Vol. 12, No. 2, pp. 135-164.
14. **Н. К. Бари.** *Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве.* Математика. Том IV, Уч. записки Моск. гос. ун-та, 148, Изд-во Моск. ун-та, М., 1951, 69-107.
15. **Shtern, A.I.** *Banach-Steinhaus theorem.* Encyclopedia of Mathematics, Springer, 2001, ISBN 978-1-55608-010-4.

О ЗАДАЧЕ С ТРЕМЯ ВАРИАНТАМИ СМЕЩЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Чориева С.Т. [1], Амонов Б.Б. [2] Норкувватова А.Б. [3]
[1,2,3] Термезский государственный университет, г.Термез, Узбекистан;
sanamchoriyeva3@gmail.com amonovbobur91@mail.ru

1. Постановка задачи BC.

Пусть Ω- конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$ ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : \ x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0)$,$B(1, 0)$, а при$y < 0$ - характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, m > 0, \ \beta_0 \in (-m/2, 1). \tag{1}$$

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, исходящей из точки $E(A, 0)$, где $c \in I = (-1, 1)-$интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x)=\delta-kx-$линейный диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1,c]$в множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p(-1)=1,\ \ p(c)=c$, где $\delta=2c/(1+c),\ k=(1-c)/(1+c)$.

В работах В.И. Жегалова и А.М.Нахушева условие смещения задавалось на граничных характеристиках AC и BC. В настоящей работеисследуется корректность задачи, где условие смещения задается на внутренних характеристиках EC_0 и EC_1, и дополнительнок этому на отрезке вырождения AB [1], а на кривой σ_0 условие Дирихле замененоусловием Бицадзе-Самарского [1] связывающим значения искомой функции на σ_0 и AB.

Задача BC. Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y)$удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$;

2) $u(x,y)\in{!}^2(\Omega^+)$и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω^+;

3) $u(x,y)$является обобщенным решением класса R_1[6], [1] уравнения (1) в области Ω^-;

4) на отрезке ABлинии параболического вырождения уравнения (1) выполняются соотношения [1]:

$$u(x,-0)=u(x,+0)+a_0(x),x\in\overline{I}, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=b(x)\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x),x\in I\setminus\{c\}\,, \tag{3}$$

эти пределы при $x\to\pm1,\ \ x\to c$ могут особенности порядка ниже $1-2\beta$ где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$;

5) выполняются требования

$$u(x,\sigma_0(x))=u(x,+0)+\varphi_0(x),\qquad x\in\overline{I}, \tag{4}$$

$$u[\theta_1^*(x)]-\mu u[\theta_0^*(p(x))]=\psi_0(x),\qquad x\in[-1,c], \tag{5}$$

$$u(p(x),-0)-u(x,+0)=f_0(x),\qquad x\in[-1,c] \tag{6}$$

где

$$\theta_1^*(x_0)=\frac{x_0+c}{2}-i\left[\frac{(m+2)(c-x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$$\theta_0^*(p(x_0))=\frac{c+p(x_0)}{2}-i\left[\frac{(m+2)(p(x_0)-c)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

- аффиксы точек пересечения характеристик $E{!}_0$ и $E{!}_1$ с характеристиками, исходящими соответственно из точек $M(x_0,0)$ и $M(p(x_0),0),\ \ x_0\in[-1,c],\ p(x_0)\in[c,1]$.

Заданные функции $\varphi_0(x)$, $c_0(x)$, $\psi_0(x)$, $b_0(x)$, $f_0(x)$, $a_0(x)$, $b_0(x)$непрерывно дифференцируемы в замыкании множествах определения.

Введем обозначения

$$u(x,+0)=\tau(x),x\in\overline{I},\ \lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),x\in I, \tag{7}$$

в силу которых (2), (3) запишем в виде

$$\tau^-(x)=\tau(x)+a_0(x),x\in\overline{I}, \tag{8}$$

$$\nu^-(x)=b(x)\nu(x)+b_0(x),x\in I\setminus\{c\}\,, \tag{9}$$

а (6) с учетом (8) превратится в

$$\tau(p(x))=\tau(x)+f(x),\qquad x\in[-1,c], \tag{10}$$

где $f(x)=f_0(x)-a_0(p(x))$.

Решение видоизмененной задачи Коши с данными (7) для уравнения (1) в области Ω^- дается формулой Дарбу [1]

$$u(x,y)=\gamma_1\int_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1+t)^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt+$$

$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1+t)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt, \tag{11}$$

где

$$\gamma_1=\frac{2^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\gamma_2=-\frac{2^{2\beta-1}\Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)}.$$

В силу (11) из краевого условия (5) имеем

$$b(x)\nu(x)-\mu k^{1-2\beta}b(p(x))\nu(p(x))=\gamma(1-\mu)D_{x,c}^{1-2\beta}\tau(x)+\psi_1(x),\quad x\in(-1,c), \tag{12}$$

где $D_{x,c}^{1-2\beta}$−оператор дробного дифференцирования [1], $\gamma=\frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta}$,$\psi_1(x)=2\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)}(c-x)D_{x,c}^{1-\beta}\psi_0(x)-\gamma\mu D_{x,c}^{1-2\beta}f(x)+\mu k^{1-2\beta}b_0(p(x))-b_0(x)$−известная функция.

Равенство (12) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенным на интервал $(-1,c)$ из области Ω^-.

Литература

1.Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005. Universitet. Yangiyo'l poliyrafservis -224 с.

Задача с условиями смещения на внутренней характеристике для уравнений Геллерстедта.

Чориева С.Т. [1], Мухтарова М.У. [2]
Термезский государственный университет, г.Термез, Узбекистан;
sanamchoriyeva3@gmail.com

1. **Постановка задачи BC.**

Рассмотрим уравнение

$$sign\,y\,|y|^m u_{xx}+u_{yy}=0\,,\ \ m>0. \tag{1}$$

Пусть Ω – конечная односвязная область комплексной плоскости $z=x+iy$ ограниченная при $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0:\ x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$ с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$ а при $y<0$ характеристиками AC и $B!$ уравнения (1).

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω лежащие, соответственно, в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через C_0 и C_1, соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками исходящих из точки $E(c,0)$, где $c\in I=(-1,1)$ - интервал оси $y=0$.

Пусть $p(x)=\delta-kx-$ линейная функция отображает множества точек отрезка $[-1,c]$ на множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p(-1)=1$, $p(c)=c$, где $k=(1-c)/(1+c)$,$\delta=2A/(1+c)$.

В работах В.И.Жегалова [1] и А.М.Нахушева [2] условие смещения задавались на граничных характеристиках AC и BC.

В настоящей работе исследуется корректность задачи, где условие смещения задается на внутренних характеристиках EC_0 и EC_1, и дополнительно к этому на отрезке вырождения AB задается локальное условие смещения [3], на кривой σ_0 условие Дирихле заменено условием Бицадзе-Самарского [3] связывающее значения искомой функции на σ_0 и AB.

Задача BC. Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\bar{\Omega}^+$ и $\bar{\Omega}^-$;

2) $u(x,y)\in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω^+;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 уравнения (1) в области Ω^-;

4) на отрезке AB линии параболического вырождения уравнения (1) выполняются общие условия склеивания [3]:

$$u(x,-0)=a(x)u(x,+0)+a_0(x),\qquad x\in\bar{I}, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}\frac{\partial u}{\partial y}=b(x)\lim_{y\to+0}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x),\qquad x\in I\backslash\{c\}, \tag{3}$$

эти пределы при $x \to \pm 1,\ x \to c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta = m/2(m+2)$;

5) выполняются условия

$$u(x, \sigma_0(x)) = c_0(x)u(x, +0) + \phi_0(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{4}$$

$$u\left[\theta_1^*(x)\right] - \mu u\left[\theta_0^*(p(x))\right] = \psi_0(x), \ \ x \in [-1, c], \tag{5}$$

$$u(p(x), -0) - u(x, +0) = f_0(x), \quad x \in [-1, c], \tag{6}$$

где $\theta_1^*(x_0)$ и $\theta_0^*(p(x_0))$ -аффиксы точек пересечения характеристик EC_0 и EC_1 с характеристиками исходящей соответственно из точек $M(x_0, 0)$ и $M(p(x_0), 0)$ $x_0 \in [-1, c],\ p(x_0) \in [c, 1]$.

Заданные функции $a(x),\ \phi_0(x),\ c_0(x),\ \psi_0(x),\ a_0(x),\ b(x),\ f_0(x),\ b_0(x)$ непрерывно дифференцируемые в замыкании множества их определения.

- Условие (4) является условием Бицадзе-Самарского [3] заданное на σ_0 и AB;
- Условие (5) является условием смещения на внутренних характеристиках EC_0 и EC_1 [3];
- Условие (6) является локальным условием смещения связывающим значения искомой функции соответственно на верхнем и нижнем краях разрезка вдоль отрезков $[-1, c]$ и $[c, 1]$ [3].

Введем обозначения

$$u(x, -0) = \tau^-(x),\ x \in \bar{I},\ \lim_{y \to -0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu^-(x),\ \ x \in I, \tag{7}$$

$$u(x, +0) = \tau(x),\ x \in \bar{I},\ \lim_{y \to +0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x),\ \ x \in I. \tag{8}$$

В силу обозначений (7) и (8) общее условия склеивания (2), (3) запишем в виде

$$\tau^-(x) = \tau(x) + a_0(x),\ x \in \bar{I}, \tag{9}$$

$$\nu^-(x) = b(x)\nu(x) + b_0(x), \ \ x \in I \backslash \{c\} \tag{10}$$

а условие локального смещения (6), с учетом (9) примет вид

$$\tau(p(x)) = \tau(x) + f(x),\ x \in [-1, c], \tag{11}$$

где $f(x) = f_0(x) - a_0(p(x))$.

Решение видоизмененной задачи Коши с данными (7) для уравнения (1) в области D^- дается формулой Дарбу [3], используя указанное решение из краевого условия (5) имеем

$$\begin{gathered} b(x)\nu(x) - \mu k^{1-2\beta} b(p(x))\nu(p(x)) = \gamma(1-\mu) D_{x,c}^{1-2\beta} \tau(x) + \\ + \psi_1(x), \ \ x \in (-1, c), \end{gathered} \tag{12}$$

где $D_{x,c}^{1-2\beta}$−оператор дробного дифференцирования,

$$\gamma = \frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)} \left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta},$$

$$\psi_1(x) = 2\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)} (c-x)^{\beta} D_{x,c}^{1-\beta} \psi_0(x) - \gamma\mu D_{x,c}^{1-\beta} f(x) + \mu k^{1-2\beta} b_0(p(x)) - b_0(x)$$

- известная функция.

Литература

1.Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии//Ученые записки Казанского ун-та, 1962.-Т.122. кн.3. С.3-16.

2.Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа//Дифференциальные уравнения.1969.Т.5.№1.С.44-59.

3.Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальние задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005. “Universitet”. “Yangiyo’l poliyrafservis” -224 с.

УДК 517.956

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Shokirov A.M.[1]

[1]Farg'ona davlat texnika universiteti, Farg'ona, O'zbekiston
ashokirov87@mail.com

В цилиндрической области

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 < a^2, \quad x>0, \quad y>0, \quad z\in(0,c)\right\}$$

рассмотрим трехмерное эллиптическое уравнение с тремя сингулярными коэффициентами

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}+\frac{2\alpha}{x}U_x+\frac{2\beta}{y}U_y+\frac{2\gamma}{z}U_z+\lambda U=0, \tag{1}$$

где $U=U(x,y,z)$ — неизвестная функция, а $a,c,\alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\mathbb{R}$, причем $\alpha,\beta,\gamma<1/2$.

В работах [1, 2] для равномерно эллиптических уравнений второго порядка подробно изучены обобщенные решения задачи Дирихле в ограниченной области и доказана фредгольмова разрешимость задачи Дирихле для таких уравнений в гильбертовом пространстве. С.А. Алдашевым [3, 4] получен явный вид классического решения локальных задач в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа. Задачи для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами изучались в работах [6–8] и др.

Насколько нам известно, задача для трехмерных эллиптических уравнений с тремя сингулярными коэффициентами в цилиндрических областях является малоизученной. В данной работе методом спектрального анализа исследуется однозначная разрешимость задачи Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в четверть-цилиндре.

Задача D. Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$U(x,y,z)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega), \tag{2}$$

$$U(x,y,z)=F_1(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in S_0, \tag{3}$$

$$U(0,y,z)=\Psi_1(y,z), \qquad (0,y,z)\in S_1, \tag{4}$$

$$U(x,0,z)=\Psi_2(x,z), \qquad (x,y,z)\in S_2, \tag{5}$$

$$U(x,y,0)=\Psi_3(x,y), \qquad (x,y,0)\in S_3, \tag{6}$$

$$U(x,y,c)=\Psi_4(x,y), \qquad (x,y,c)\in S_4. \tag{7}$$

Здесь

$$S_0=\left\{(x,y,z) : x^2+y^2=a^2,\ x>0,\ y>0,\ z\in(0,c)\right\},$$

$$S_1=\{(x,y,z) : x=0,\ y\in(0,b),\ z\in(0,c)\}, \qquad S_2=\{(x,y,z) : x\in(0,a),\ y=0,\ z\in(0,c)\},$$

$$S_3=\overline{\Omega}\cap\{z=0\}, \qquad S_4=\overline{\Omega}\cap\{z=c\},$$

а $F_1(x,y,z)$, $\Psi_j(x,y)$, $j=1,4$, — заданные непрерывные функции.

Для нахождения решения задачи D используем спектральный метод Фурье. С этой целью введем в области Ω цилиндрические координаты (ρ,φ,z), связанные с декартовыми координатами (x,y,z) по формулам

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi, \qquad z=z,$$

где

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi=\operatorname{arctg}(y/x).$$

В цилиндрических координатах область Ω переходит в

$$\Delta=\{(\rho,\varphi,z) : \rho\in(0,a), \quad \varphi\in(0,\pi/2), \quad z\in(0,c)\},$$

а уравнение (1) и условия (2)–(7) принимают вид

$$u_{\rho\rho}+\frac{1+2\alpha+2\beta}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{2\beta\operatorname{ctg}\varphi-2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{\rho^2}u_\varphi+u_{zz}+\frac{2\gamma}{z}u_z+\lambda u=0,\qquad(\rho,\varphi,z)\in\Delta,\quad(8)$$

$$u(\rho,\varphi,z)\in C(\overline{\Delta})\cap C^2(\Delta),\tag{9}$$

$$u(a,\varphi,z)=f_1(\varphi,z),\varphi\in[0,\pi/2],\quad z\in[0,c],\tag{10}$$

$$u(\rho,\pi/2,z)=\psi_1(\rho,z),\qquad u(\rho,0,z)=\psi_2(\rho,z),\rho\in[0,a],\quad z\in[0,c],\tag{11}$$

$$u(\rho,\varphi,0)=\psi_3(\rho,\varphi),\qquad u(\rho,\varphi,c)=\psi_4(\rho,\varphi),\rho\in[0,a],\quad\varphi\in[0,\pi/2].\tag{12}$$

где

$$u=u(\rho,\varphi,z)=U(x,y,z),\qquad f_1(\varphi,z)=F_1(x,y,z),$$
$$\psi_1(\rho,z)=\Psi_1(y,z),\qquad\psi_2(\rho,z)=\Psi_2(x,z),$$
$$\psi_3(\rho,\varphi)=\Psi_3(x,y),\qquad\psi_4(\rho,\varphi)=\Psi_4(x,y).$$

В области Δ будем искать решение задачи D в виде

$$u(\rho,\varphi,z)=u_1(\rho,\varphi,z)+u_2(\rho,\varphi,z)+u_3(\rho,\varphi,z),\tag{13}$$

где функции $u_1(\rho,\varphi,z)$, $u_2(\rho,\varphi,z)$ и $u_3(\rho,\varphi,z)$ являются решениями следующих краевых задач.

Задача D1. Найти функцию $u_1(\rho,\varphi,z)$, удовлетворяющую уравнению (8) в области Δ и условиям (9), (11), (12),

$$u_1(a,\varphi,z)=0,\qquad\varphi\in[0,\pi/2],\quad z\in[0,c].$$

Задача D2. Найти функцию $u_2(\rho,\varphi,z)$, удовлетворяющую уравнению (8) в области Δ и условиям (9), (10), (12),

$$u_2(\rho,\pi/2,z)=0,\qquad u_2(\rho,0,z)=0,\qquad\rho\in[0,a],\quad z\in[0,c].$$

Задача D3. Найти функцию $u_3(\rho,\varphi,z)$, удовлетворяющую уравнению (8) в области Δ и условиям (9), (10), (11),

$$u_3(\rho,\varphi,0)=0,\qquad u_3(\rho,\varphi,c)=0,\qquad\rho\in[0,a],\quad\varphi\in[0,\pi/2].$$

В самом деле, если функции $u_1(\rho,\varphi,z)$, $u_2(\rho,\varphi,z)$ и $u_3(\rho,\varphi,z)$ являются решениями задач D1, D2 и D3 соответственно, то функция (13) удовлетворяет всем условиям задачи D.

Исследование поставленных задач проводится с помощью метода разделения переменных Фурье и спектрального анализа. Для поставленной задачи с помощью метода Фурье получены одномерные спектральные задачи. На основании свойства полноты систем собственных функций этих задач доказана теорема единственности. Решение исследуемой задачи построено в виде суммы двойного ряда Фурье–Бесселя. В обосновании равномерной сходимости построенного ряда использовались асимптотические оценки функций Бесселя действительного и мнимого аргумента. На их основе получены оценки для каждого члена ряда, которые позволили доказать равномерную сходимость полученного ряда и его производных до второго порядка включительно, а также теорему существования в классе регулярных решений.

Литература / References

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 576 с.

2. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 407 с.

3. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3–7.

4. Aldashev S.A. The correctness of the local boundary value problem in cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation. *Izv. Saratov Univ., Ser. Math. Mech. Inform.*, 15, 365–371 (2015).

5. Karimov K.T. Nonlocal problem for an elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41, 46–57 (2020).
6. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. *Вестник Национального университета Узбекистана*. 2017. № 2/1. С. 195–206.
7. Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. *Узбекский математический журнал*. 2017. № 1. С. 96–105.
8. Karimov K.T. On one version of the Dirichlet-Neumann problem for a three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients. *Uzbek Mathematical Journal*, 3, 102–115 (2018).

УДК 517.956.6

Задача в неограниченной области с неполным условием Геллерстедта для уравнения смешанного типа с особым коэффициентом

Эргашева С. Б.[1], Сахатмуродова И. Э.[2]
[1] Термезский государственный университет;
sarvinozergasheva96@mail.ru
[2] Термезский университет экономики и сервиса;
Saxatmurodovairoda@gmail.com

Постановка задачи GF (Геллерстедт, Франкль).

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0),\ B(1,0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$. Через C_0 и C_1 соответственно обозначим точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)-$ интервал оси $y = 0$, $m-$ положительное постоянное.

Введем линейную функцию $q(x) = \rho - kx$, отображаюшую точки отрезка $EB = [c,1]$ в точки отрезка $AE = [-1,c]$, где $q(c) = c,\ q(1) = -1,\ k = (1+c)/(1-c),\ \rho = 2c/(1-c),\ \rho - k = -1,\ \rho - kc = c$.

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R,0),\ B_R = B_R(R,0)$

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2,\ -R \le x \le R,\ 0 \le y \le ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $I = \{(x,y) : -1 < x < 1,\ y = 0\},\ \overline{I}_1 = \{(x,y) : -\infty < x \le -1,\ y = 0\},\ \overline{I}_2 = \{(x,y) : 1 \le x < +\infty,\ y = 0\},\ D_R = D_R^+ \bigcup D^- \bigcup I,\ D_R$ -подобласть неограниченной области D.

Задача GF (Геллерстедта-Франкля). Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобшенным решением класса R_1 в области D^-;

4) на интервале вырождения I имеет место следуюшее условие сопряжения

$$u(x,-0) = a_1(x)u(x,+0) + a_0(x),\ x \in I, \tag{2}$$

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = b_1(x) \lim_{y \to +0} y^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x),\ x \in I \backslash \{c\}, \tag{3}$$

причем пределы в (3) при $x = \pm 1$, $x = c$, могут иметь особенности порядка ниже 1.

5) выполняется равенство

$$\lim_{R \to \infty} u(x,y) = 0,\ y > 0, \tag{4}$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0} = \tau_i(x),\ \forall x \in \overline{I}_i,\ i = 1,2; \tag{5}$$

$$u(x,y)|_{EC_1} = \psi(x),\ c \le x \le (1+c)/2; \tag{6}$$

$$u\left(q(x),+0\right) = u(x,+0) + f(x),\ c \le x \le 1, \tag{7}$$

$\tau_1(x),\ \tau_2(x),\ \psi(x),\ f(x),\ a_0(x),\ a_1(x),\ b_0(x),\ b_1(x)$ - заданные функции, непрерывны в замыкании множества их определения, причем $\tau_1(-1) = 0,\ \tau_2(1) = 0,\ \psi(c) = 0,\ f(c) = 0,\ \psi(x) \in C\left[c,(1+c)/2\right] \bigcap C^{1,\gamma_0}\ (c,(1+c)/2),\ f(x) \in C[c,(1/2] \bigcap C^{1,\gamma_0}\ (c,1/2)$, функции $\tau_i(x) = (1-x^2)\overline{\tau}_i(x)$ непрерывно-ифференцируемы на любых отрезках $[-N,-1]\,,\ [1,N]$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\tau_i(x)| \le M|x|^{-\delta_0},\ \gamma_0,\ \delta_0$ -положительные постоянные, причем $\gamma_0 \in (0,1),\ a_0(x),\ a_1(x),\ b_0(x),\ b_1(x) \in C(\overline{J}) \cap C^1(J)$.

Заметим, что условие (6) является условием Геллерстедта на внутренней характеристике, (7) аналог условия Франкля на отрезке AB.

Корректность задачи GF доказывается методом работы [1.с.59].

Литература

1. **Мирсабуров М., Эргашева С.Б.** *Задачи с неполным условием Гурса для вырождающихся гиперболических уравнений и с недостающим условием Геллерстедта для уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* Surxon-nashr. 2026. 116 с.

2 – SHO‘BA. MATEMATIK FIZIKANING NOKLASSIK MASALALARI.

СЕКЦИЯ 2. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 517.95

Oltinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun to‘g‘ri va teskari masalalar haqida

Abdukodirov A. T.[1], Tulqinboyev T. A.[2]
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
abdurashid1976@mail.ru
[2]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
tulqinjon98@mail.ru

Ushbu

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^5\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f(x,y) \tag{1}$$

oltinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani $\Omega=\{(x,y):x\in R,y>0\}$ sohada qaraymiz, bu yerda $u\left(x,y\right)$ – noma’lum funksiya, $f(x,y)$ – berilgan funksiya.

Tekshirish qiyin emaski, (1) tenglama 6 ta haqiqiy xarakteristikaga ega bo‘lib, ulardan bittasi 5 karrali, qolgan bittasi oddiy xarakteristikani tashkil etadi. Oltinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalarni kanonik ko‘rinishga keltirish masalalari [1], [2] ishlarda o‘rganilgan.

Koshi masalasi. (1) tenglamani va

$$\left.\frac{\partial^j u\left(x,y\right)}{\partial y^j}\right|_{y=0}=\varphi_j\left(x\right),\ x\in R \tag{2}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u\left(x,y\right)\in C^5\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^6\left(\Omega\right)$ funksiya topilsin, bu yerda $\varphi_j\left(x\right)$ – berilgan funksiyalar, $j=\overline{0,5}$.

Quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

1-teorema. Agar $\varphi_j(x)\in C^{6-j}(R)$, $j=\overline{0,5}$ va $f(x,y)\in C(\Omega)\cap L_1(\Omega)$ bo‘lsa, u holda Koshi masalasi yagona yechimga ega bo‘ladi.

Yuqorida qo‘yilgan Koshi masalasi yechimidan foydalanib ushbu

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^5\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f(y) \tag{3}$$

oltinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun $\Omega=\{(x,y):x\in R,y>0\}$ sohada quyidagi teskari masalani ham o‘rganish mumkin, bu yerda $u\left(x,y\right)$ va $f(y)$ – noma’lum funksiyalar.

Teskari masala. (3) tenglamani, (2) boshlang‘ich va

$$u\left(y,y\right)=\omega(y) \tag{4}$$

qo‘shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi $u\left(x,y\right)\in C^5\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^6\left(\Omega\right)$ va $f(y)\in C[0,+\infty)$ funksiyalar juftligi topilsin, bu yerda $\omega(y)$ va $\varphi_j\left(x\right)$ – berilgan funksiyalar, $j=\overline{0,5}$, hamda $\omega(0)=\varphi_0(0)$.

Quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

2-teorema. Agar $\omega(y)\in C^6[0,+\infty)$, $\varphi_j(x)\in C^{6-j}(R)$, $j=\overline{0,5}$ bo‘lsa va mos keluvchi ulash shartlari bajarilsa, u holda teskari masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

6 ta turli haqiqiy xarakteristikali, oltinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun, yuqoridagi kabi masalalar [3] ishda o‘rganilgan.

Adabiyotlar

1. **Abdukodirov A.T, Tulkinboev T.A.** *Classification and reduction to canonical form of linear differential equations partial of the sixth-order with non-multiple characteristics.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2025, 3(119), -pp. 4–21.
2. **Abdukodirov A.T, Tulkinboev T.A.** *Classification and reduction to canonical form of linear differential equations partial of the sixth-order with multiple and complex characteristics.* Bull. Inst. Math., 2023, Vol.6, No 1, -pp. 1–13.
3. **Abdukodirov A.T, Tulqinboyev T.A.** *Oltinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun to'gri va teskari masalalar haqida.* "Matematik-fizika tenglamalari va informatsion texnologiyalarning dolzarb muammolari" mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy anjuman. Namangan, 2026-yil, 17-18-aprel, 296-bet.

UDK 517.958

AN INVERSE PROBLEM FOR RECONSTRUCTING THE KERNEL IN A THIRD-ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH NONCLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS

Abdullaev B. R.[1], Haydarov B. H.[2]
[1]Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
behzodbek0202@gmail.com
[2]Bukhara State Technical University, Bukhara, Uzbekistan;
behzodhaydarov15@gmail.com

Consider the following an integro-differential pseudoparabolic equation:

$$u_t(x,t) - \alpha(t)u_{txx}(x,t) - \beta(t)u_{xx}(x,t) = \int_0^t K(t-\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in D_T, \tag{1}$$

where $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$, $\quad T > 0$. Here, $\alpha(t) \ge \alpha_0 > 0$, $\beta(t) > 0$ and $K(t)$ is the convolution kernel. In the domain D_T, we study the following problem for Eq. (1): find a function $u(x,t)$ satisfying (1) with initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

non-classical boundary conditions

$$u_x(1,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) - bu_x(0,t) + au(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where $\varphi(x)$ is the given function and $a > 0$, $b > 0$ are the given fixed constants. This problem is commonly referred to as the direct problem.

Determine the kernel $K(t) \in C[0,T]$, appearing in Eq. (1), given that the solution of the direct problem satisfies the additional condition

$$u(x_0,t) = h(t), \quad x_0 \in (0,1), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

where $x_0 \in (0,1)$ is a fixed point and $h(t)$ is a given function.

We investigate an inverse kernel determination problem for a pseudoparabolic integro - differential equation with non-classical boundary conditions. First, the direct problem is reduced to a Volterra integral equation via the Fourier method, and its unique solvability is proved using Gronwall's inequality and functional series. To identify the kernel, an additional condition is imposed at a point $x = x_0 \in (0,1)$. The inverse problem is then transformed into a second-kind integral equation, whose well-posedness is established using the Banach fixed-point theorem.

References

1. **Kapustin N. Yu., Moiseev E. I.** *On the convergence of spectral expansions of functions from the Holder class for two problems with a spectral parameter in the boundary condition.* Differential Equations. **36**(8). - 2000. -1069-1074 p.
2. **Bari N.K.** *Biorthogonal systems and bases in Hilbert space.* Moskov. Gos. Univ. Uenye Zapiski Mathematika. **148**(4). - 1951. -69-107 p.

УДК 517.958

Two-fermion lattice Schrodinger operators with first- and second-nearest-neighbor interactions

Abdukhakimov Saidakbar[1], Khasanov Adkham[2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
abduxakimov93@mail.ru
[2]Department of Mathematical Physics and Functional Analysis, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
atham.xasanov@mail.ru

We study the Schrodinger operator

$$H_{\mu_1\mu_2}(K) = H_0(K) + V_{\mu_1\mu_2}, \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},$$

associated with a system of two identical fermions on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$. The particles interact through first- and second-nearest-neighbor sites along the lattice basis directions, with coupling constants μ_1 and μ_2, respectively. Here $K \in \mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ is the quasimomentum of the particle pair.

The operator acts in the subspace of odd functions

$$L^{2,o}(\mathbb{T}^3) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^3) : f(-p) = -f(p)\}.$$

The free part $H_0(K)$ is multiplication by

$$\mathcal{E}_K(p) = 4\sum_{i=1}^{3}\left(1 - \cos\frac{K_i}{2}\cos p_i\right),$$

and the interaction $V_{\mu_1\mu_2}$ is a finite-rank integral operator with kernel

$$v_{\mu_1\mu_2}(p) = \sum_{i=1}^{3}\left(\mu_1\cos p_i + \mu_2\cos 2p_i\right).$$

Thus $V_{\mu_1\mu_2}$ has rank at most 6.

For $K = 0$, the parity structure gives the decomposition

$$L^{2,o}(\mathbb{T}^3) = \bigoplus_{\theta\in\{\text{eeo,eoe,oee,ooo}\}} L^{2,\theta}(\mathbb{T}^3).$$

On $L^{2,\text{ooo}}(\mathbb{T}^3)$ the interaction vanishes. The reduced operators $H^{\theta}_{\mu_1\mu_2}(0)$, $\theta \in \{\text{eeo}, \text{eoe}, \text{oee}\}$, are unitarily equivalent. Therefore, it is sufficient to study the case $\theta = \text{eeo}$.

Using the Lippmann–Schwinger operator

$$B^{\text{eeo}}_{\mu_1\mu_2}(0, z) = -V^{\text{eeo}}_{\mu_1\mu_2}R_0(0, z), \qquad R_0(0, z) = [H_0(0) - zI]^{-1},$$

we introduce the Fredholm determinant

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(z) = \det\left(I - B^{\text{eeo}}_{\mu_1\mu_2}(0, z)\right), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [0, 24].$$

A number $z \in \mathbb{R} \setminus [0,24]$ is an eigenvalue of $H^{\mathrm{eeo}}_{\mu_1\mu_2}(0)$ if and only if

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(z) = 0.$$

Let

$$C^-(\mu_1,\mu_2) = \lim_{z \nearrow 0} \Delta_{\mu_1\mu_2}(z), \qquad C^+(\mu_1,\mu_2) = \lim_{z \searrow 24} \Delta_{\mu_1\mu_2}(z).$$

The curves $C^{\pm}(\mu_1,\mu_2) = 0$ partition the parameter plane $(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2$ into regions $\mathcal{C}_i^-$ and $\mathcal{C}_j^+$. Define

$$\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_i^- \cap \mathcal{C}_j^+, \qquad i,j = 0,1,2.$$

Theorem For any $(\mu_1,\mu_2) \in \mathcal{C}_{ij}$, the operator $H^{\mathrm{eeo}}_{\mu_1\mu_2}(0)$ has exactly i simple eigenvalues below and exactly j simple eigenvalues above its essential spectrum

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H^{\mathrm{eeo}}_{\mu_1\mu_2}(0)\big) = [0,24].$$

Moreover, the corresponding eigenfunctions can be chosen in the form

$$f^{\pm,\mathrm{eeo}}_{\mu_1\mu_2}(p) = C\,\frac{k(z)\sin p_3 + \sin 2p_3}{\varepsilon(p) - z^{\pm}(\mu_1,\mu_2)},$$

where $C \neq 0$ is a normalization constant,

$$k(z) = \frac{a_{12}(z)\mu_2}{1 + a_{11}(z)\mu_1},$$

and $\varepsilon(p) = 2\sum_{i=1}^{3}(1-\cos p_i)$.

proof [Sketch of proof] The proof is based on the explicit form of the determinant $\Delta_{\mu_1\mu_2}(z)$, its monotonicity outside the essential spectrum, and the asymptotic behaviour near the thresholds 0 and 24. The curves $C^{\pm}(\mu_1,\mu_2) = 0$ determine the values of the parameters at which eigenvalues appear from or disappear into the essential spectrum. Since the rank of the interaction is at most two, the number of eigenvalues outside $[0,24]$ is at most two. Analysing the signs of $\Delta_{\mu_1\mu_2}(z)$ in each region $\mathcal{C}_{ij}$ gives the required numbers i and j.

For nonzero quasimomentum $K \neq 0$, the same parameter regions give lower bounds:

$$n_-\big(H^{\mathrm{eeo}}_{\mu_1\mu_2}(K)\big) \geq i, \qquad n_+\big(H^{\mathrm{eeo}}_{\mu_1\mu_2}(K)\big) \geq j$$

for all $(\mu_1,\mu_2) \in \mathcal{C}_{ij}$. This follows from the min–max principle and monotonicity of the fiber Hamiltonians with respect to K.

Thus, the interaction parameters (μ_1,μ_2) completely determine the number and location of discrete eigenvalues of the two-fermion lattice Hamiltonian with first- and second-nearest-neighbor interactions.

References

1. S.N. Lakaev, A.K. Motovilov, S.Kh. Abdukhakimov. Two-fermion lattice Hamiltonian with first and second nearest-neighboring-site interactions. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2023, Vol. 56, 315202.
2. S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov, Z.I. Muminov. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. *Comm. Math. Phys.*, 2006, Vol. 262, pp. 91–115.
3. S.N. Lakaev, S.Kh. Abdukhakimov, A.B. Khasanov. Two-fermion lattice Schrodinger operators with first and second nearest-neighboring-site interactions. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 2026, Vol. 17, Issue 2, pp. 143–152.
4. S. Abdukhakimov, A. Khasanov. Two-fermion Hamiltonian with first- and second-nearest-neighbor interactions along lattice basis directions. *Bull. Inst. Math.*, 2026, Vol.9, No 3, pp. 1-10

UDK 517.98

Panjaradagi uch zarrachali sistema Shredinger operatorining diskret spektri haqida

Abdullayev J.I.[1], **Xamdamova Ch.A.**[2]
[1]**Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston;**
jabdullaev@mail.ru
[2]**Samarqand pedagogika instituti, Samarqand, O'zbekiston;**
xamdamovacharos941@gmail.com

$\mathbb{Z}$ - bir o'lchamli panjara, $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$ - $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ da aniqlangan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi va $\ell_2^s(\mathbb{Z}^3)$ esa birinchi ikki koordinatasini o'rnini almashtirishga nisbatan simmetrik bo'lgan funksiyalardan tashkil topgan qism fazo bo'lsin, ya'ni $\ell_2^s(\mathbb{Z}^3) = \{\psi \in \ell_2(\mathbb{Z}^3) : \psi(n_1,n_2,n_3) = \psi(n_2,n_1,n_3)\}$.

Ushbu ishda $\mathbb{Z}$ panjarada harakatlanayotgan uch zarrachali (massasi 1 bo'lgan ikkita bozon va massasi $m = \frac{1}{\gamma} > 0$ bo'lgan ixtiyoriy zarracha) sistemaga mos energiya operatori $\hat{H}_{\boldsymbol{\mu}}$ ning diskret spektri o'rganiladi.

Koordinata tasvirida $\hat{H}_0$ erkin gamiltonian $\ell_2^s(\mathbb{Z}^3)$ fazoda quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\Delta\otimes I\otimes I - \frac{1}{2}I\otimes\Delta\otimes I - \frac{\gamma}{2}I\otimes I\otimes\Delta,$$

bu yerda Δ - panjaradagi standart Laplas operatori:

$$(\Delta\psi)(x) = \psi(x+1) + \psi(x-1) - 2\psi(x),$$

$\gamma > 0$ - zarrachalar massalari nisbati.

$\hat{H}_{\boldsymbol{\mu}}$ to'la gamiltonian erkin gamiltonianning chegaralangan qo'zg'alishi sifatida aniqlanadi:

$$\hat{H}_{\boldsymbol{\mu}} = \hat{H}_0 - \mu_1(\hat{V}_1 + \hat{V}_2) - \mu_3\hat{V}_3, \quad \mu_1,\mu_3 > 0,$$

bu yerda $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\mu_3)$, μ_1 - bozon va ixtiyoriy zarracha o'rtasidagi ta'sir energiyasi, μ_3 - ikki bozon o'rtasidagi ta'sir energiyasi,

$$(\hat{V}_\alpha f)(x_1,x_2,x_3) = \delta_{x_\beta x_\gamma} f(x_1,x_2,x_3), \qquad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3, \quad \alpha\prec\beta\prec\gamma,$$

bu yerda $\delta_{x_\beta x_\gamma}$ - Kroneker simvoli.

$\mathbb{T}$ - bir o'lchamli tor, $L_2^s(\mathbb{T}^3)\subset L_2(\mathbb{T}^3)$ esa $\mathbb{T}^3$ da aniqlangan, birinchi ikkita koordinatalariga nisbatan simmetrik bo'lgan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi bo'lsin. Koordinata tasviridan impuls tasviriga standart Furye almashtirishi orqali o'tamiz. Natijada uch zarrachali $\hat{H}_{\boldsymbol{\mu}}$ operatorning impuls tasviridagi ko'rinishi $L_2^s(\mathbb{T}^3)$ fazoda to'g'ri integralga yoyiladi:

$$H_{\boldsymbol{\mu}} = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} H_{\boldsymbol{\mu}}(K)\,dK,$$

bu yerda $K\in\mathbb{T}$ - sistema to'la kvaziimpulsi. Har bir K uchun $H_{\boldsymbol{\mu}}(K)$ operator $L_2^s(\mathbb{T}^2)$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlanadi:

$$H_{\boldsymbol{\mu}}(K) = H_0(K) - \mu_1(V_1+V_2) - \mu_3 V_3,$$

bu yerda

$$(H_0(K)f)(p,q) = E_{K,\gamma}(p,q)f(p,q),$$

$$E_{K,\gamma}(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \gamma\varepsilon(K-p-q), \quad \varepsilon(q) = 1-\cos q.$$

V_1, V_2 va V_3 integral operatorlari quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$(V_1 f)(p,q) = \int_{\mathbb{T}} f(p,s)\,ds, \qquad (V_2 f)(p,q) = \int_{\mathbb{T}} f(s,q)\,ds,$$

$$(V_3 f)(p,q) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(p+q-s,s)\,ds.$$

Bu yerda dp belgisi $\mathbb{T}$ tordagi normallashtirilgan Haar o'lchovini ifodalaydi va u quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} dp = 1.$$

Biz ushbu tezisda $K=0$ hol uchun $H_{\boldsymbol{\mu}} := H_{\boldsymbol{\mu}}(0)$ operatorning muhim spektrdan tashqarida yotuvchi xos qiymatlari o'rganamiz. $L_2^s(\mathbb{T}^2)$ fazoning quyidagi to'g'ri yig'indiga ajralishi ma'lum:

$$L_2^s(\mathbb{T}^2) = L_2^{s,o}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{s,e}(\mathbb{T}^2),$$

bu yerda $L_2^{s,e}(\mathbb{T}^2)$ (mos ravishda $L_2^{s,o}(\mathbb{T}^2)$) - $L_2^s(\mathbb{T}^2)$ dagi juft (mos ravishda toq) funksiyalarning qism fazosi.

1-lemma. $L_2^{s,e}(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^{s,o}(\mathbb{T}^2)$ qism fazolar $H_{\boldsymbol{\mu}}$ operatorga nisbatan invariantdir.

$H^o_{\boldsymbol{\mu}}$ orqali $H_{\boldsymbol{\mu}}$ operatorning $L_2^{s,o}(\mathbb{T}^2)$ qism fazoga torayganini, $H^e_{\boldsymbol{\mu}}$ orqali esa $L_2^{s,e}(\mathbb{T}^2)$ qism fazoga torayganini belgilaymiz.

Ishning asosiy natijasi quyidagi teoremadan iborat:

1-teorema (Asosiy teorema).

$0<\gamma<1$ va $\mu_3>0$ bo'lsin. U holda shunday $\mu_1^{(1)}(\gamma)>0$ son mavjudki, barcha $\mu_1>\mu_1^{(1)}(\gamma)$ lar uchun $H^e_{\boldsymbol{\mu}}$ operator muhim spektrdan chapda yagona xos qiymatga ega.

Adabiyotlar

1. Abdullaev J I, Khalkhuzhaev A M and Boymurodov J Kh 2023 On the Existence of Eigenvalues of the Three-Particle Discrete Schrödinger Operator *Mathematical Notes* 114(5) 645–658

2. Lakaev S N and Muminov M I 2003 Essential and discrete spectra of the three-particle Schrödinger operator on a lattice *Theoret. and Math. Phys.* 135(3) 849–871

3. Lakaev S N, Dell'Antonio G F and Khalkhuzhaev A M 2016 Existence of an isolated band of a system of three particles in an optical lattice *J. Phys. A: Math. Theor.* 49(14) 1751–8113

UDK 517.98

DISCRETE SPECTRUM OF A TWO-BOSON LATTICE HAMILTONIAN

Abduvayitov S. S.

Samarkand state university named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
saidakbar1911@gmail.com

We consider a system of two identical bosons on the two-dimensional square lattice $\mathbb{Z}^2$ with on-site and nearest-neighbor interactions of strengths μ_1 and μ_2, respectively. The corresponding two-particle Hamiltonian is translation invariant and, after the Fourier transform and the Floquet–Bloch decomposition, is represented as a direct integral of fiber operators, acting in the Hilbert space $L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}^2)$ of square-integrable even functions,

$$H_{\mu_1\mu_2}(K) = H_0(K) + V_{\mu_1\mu_2}, \qquad K\in\mathbb{T}^2,$$

where the free part $H_0(K)$ is the multiplication operator by

$$\mathcal{E}_K(p) = 4\sum_{j=1}^{2}\Big(1-\cos\frac{K_j}{2}\cos p_j\Big), \qquad p\in\mathbb{T}^2$$

and the interaction operator is

$$(V_{\mu_1\mu_2}f)(p) = \frac{\mu_1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(q)\,dq + \frac{\mu_2}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{2}\cos p_j\int_{\mathbb{T}^2}\cos q_j\, f(q)\,dq.$$

Thus $V_{\mu_1\mu_2}$ has rank at most three. Since $V_{\mu_1\mu_2}$ is a finite-rank operator, by Weyl's theorem,

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu_1\mu_2}(K)) = [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)],$$

where

$$\mathcal{E}_{\min}(K) = 4\sum_{j=1}^{2}\Big(1-\cos\frac{K_j}{2}\Big), \qquad \mathcal{E}_{\max}(K) = 4\sum_{j=1}^{2}\Big(1+\cos\frac{K_j}{2}\Big).$$

Lemma 1. Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ and $K \in \mathbb{T}^2$. A number $z \in \mathbb{R} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)]$ is an eigenvalue of $H_{\mu_1\mu_2}(K)$ if and only if

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(K;z) := \begin{vmatrix} 1+\mu_1 a_{11}(K;z) & \mu_1 a_{12}(K;z) & \mu_1 a_{13}(K;z) \\ \mu_2 a_{21}(K;z) & 1+\mu_2 a_{22}(K;z) & \mu_2 a_{23}(K;z) \\ \mu_2 a_{31}(K;z) & \mu_2 a_{32}(K;z) & 1+\mu_2 a_{33}(K;z) \end{vmatrix} = 0$$

where

$$a_{ij}(K;z) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\alpha_i(p)\alpha_j(p)}{\mathcal{E}_K(p)-z}\,dp,\ i,j=1,2,3$$

with

$$\alpha_1(p) = \frac{1}{2\pi}, \qquad \alpha_2(p) = \frac{\cos p_1}{\sqrt{2}\pi}, \qquad \alpha_3(p) = \frac{\cos p_2}{\sqrt{2}\pi}.$$

Lemma 2. Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. For every $K = (K_1, K_2)$ with $K_i \in \mathbb{T} \setminus \{-\pi\}, i = 1, 2$, the following asymptotics holds:

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(K;z) = \gamma_{11}(K)P^-(K;\mu_1,\mu_2)\ln\frac{1}{\mathcal{E}_{\min}(K)-z} + O(1), \quad z \nearrow \mathcal{E}_{\min}(K),$$

where

$$\gamma_{11}(K) = \frac{1}{8\pi\sqrt{\cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}}},$$

$P^-(K;\mu_1,\mu_2)$ is polynomial in μ_1 and μ_2.

We fix the total quasi-momentum $K = (K_1, K_2)$ satisfying the following conditions

$$K_1, K_2 \in \mathbb{T} \setminus \{-\pi\}, \qquad \cos\frac{K_1}{2} \neq \cos\frac{K_2}{2}. \tag{1}$$

The first condition guarantees nondegeneracy of the lower and upper edges of the essential spectrum, while the second excludes the symmetry-reducible case.

Lemma 3. Suppose that K satisfies (1) and $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. The zero set $\Gamma^-(K)$ of the polynomial $P^-(K;\mu_1,\mu_2)$ is the graph of the rational function

$$\mu_1 = \mu_1^-(K;\mu_2) := -4\Big(\cos\frac{K_1}{2}+\cos\frac{K_2}{2}\Big)\frac{\mu_2(\mu_2-\mu_2^{(0)}(K))}{(\mu_2-\mu_2^{(1)}(K))(\mu_2-\mu_2^{(2)}(K))},$$

where $\mu_2^{(i)}(K)$, $i = 0, 1, 2$ are real numbers satisfying the following inequalities

$$\mu_2^{(1)}(K) < \mu_2^{(0)}(K) < \mu_2^{(2)}(K) < 0.$$

The curve $\Gamma^-(K)$ consists of three pairwise disjoint smooth unbounded branches corresponding to the intervals

$$(-\infty, \mu_2^{(1)}(K)), \qquad (\mu_2^{(1)}(K), \mu_2^{(2)}(K)), \qquad (\mu_2^{(2)}(K), +\infty),$$

and divides the coupling-constant plane into four unbounded regions $G_0^-(K), G_1^-(K), G_2^-(K)$ and $G_3^-(K)$:

$$\begin{aligned}
G_0^-(K) &:= \Big\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_1 > \mu_1^-(K;\mu_2),\ \mu_2\in(\mu_2^{(2)}(K),\infty)\Big\},\\
G_1^-(K) &:= \Big\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_1 < \mu_1^-(K;\mu_2),\ \mu_2\in(\mu_2^{(2)}(K),\infty)\Big\}\\
&\quad\cup\Big\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_1 > \mu_1^-(K;\mu_2),\ \mu_2\in(\mu_2^{(1)}(K),\mu_2^{(2)}(K))\Big\}\\
&\quad\cup\Big\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_2 = \mu_2^{(2)}(K)\Big\},\\
G_2^-(K) &:= \Big\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_1 < \mu_1^-(K;\mu_2),\ \mu_2\in(\mu_2^{(1)}(K),\mu_2^{(2)}(K))\Big\}\\
&\quad\cup\Big\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_1 > \mu_1^-(K;\mu_2),\ \mu_2\in(-\infty,\mu_2^{(1)}(K))\Big\}\\
&\quad\cup\Big\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_2 = \mu_2^{(1)}(K)\Big\},\\
G_3^-(K) &:= \Big\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_1 < \mu_1^-(K;\mu_2),\ \mu_2\in(-\infty,\mu_2^{(1)}(K))\Big\}.
\end{aligned}$$

Let

$$n_-(K;\mu_1,\mu_2) \quad\text{and}\quad n_+(K;\mu_1,\mu_2)$$

denote the numbers of eigenvalues of $H_{\mu_1\mu_2}(K)$ below $\mathcal{E}_{\min}(K)$ and above $\mathcal{E}_{\max}(K)$, respectively, counted with multiplicity.

Theorem 1. Suppose that K satisfies (1) and let $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$. For every $\alpha\in\{0,1,2,3\}$,

$$(\mu_1,\mu_2)\in G_\alpha^-(K) \quad\Longrightarrow\quad n_-(K;\mu_1,\mu_2)=\alpha.$$

Corollary 1. Suppose that K satisfies the assumptions of Theorem 1. The unitary operator

$$(Uf)(p) = f(p+(\pi,\pi))$$

satisfies

$$UH_{\mu_1\mu_2}(K)U^{-1} = 16I - H_{-\mu_1,-\mu_2}(K).$$

Consequently,

$$n_+(K;\mu_1,\mu_2) = n_-(K;-\mu_1,-\mu_2).$$

In particular, for each $\alpha=0,1,2,3$,

$$(-\mu_1,-\mu_2)\in G_\alpha^-(K) \quad\Longrightarrow\quad n_+(K;\mu_1,\mu_2)=\alpha.$$

References

1. **Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I.** *The threshold effects for two-particle Hamiltonians on lattices.* Commun. Math. Phys. **262** (2006), 91–115.

2. **Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I.** *Bose–Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: exactly solvable case.* J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021), 245201, 22 pp.

UDK 517.98

THRESHOLD STATES FOR A TWO-BOSON LATTICE HAMILTONIAN

Abduvayitov S. S.

Samarkand state university named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
saidakbar1911@gmail.com

We consider a system of two identical bosons on the two-dimensional square lattice $\mathbb{Z}^2$ with on-site and nearest-neighbor interactions of strengths μ_1 and μ_2, respectively. The corresponding two-particle Hamiltonian is translation invariant and, after the Fourier transform and the Floquet–Bloch decomposition, is represented as a direct integral of fiber operators, acting in the Hilbert space $L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}^2)$ of square-integrable even functions,

$$H_{\mu_1\mu_2}(K) = H_0(K) + V_{\mu_1\mu_2}, \qquad K \in \mathbb{T}^2,$$

where the free part $H_0(K)$ is the multiplication operator by

$$\mathcal{E}_K(p) = 4\sum_{j=1}^{2}\Big(1 - \cos\frac{K_j}{2}\cos p_j\Big), \qquad p \in \mathbb{T}^2$$

and the interaction operator is

$$(V_{\mu_1\mu_2}f)(p) = \frac{\mu_1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(q)\,dq + \frac{\mu_2}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{2}\cos p_j \int_{\mathbb{T}^2}\cos q_j\, f(q)\,dq.$$

Thus $V_{\mu_1\mu_2}$ has rank at most three. Since $V_{\mu_1\mu_2}$ is a finite-rank operator, by Weyl's theorem,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu_1\mu_2}(K)) = [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)],$$

where

$$\mathcal{E}_{\min}(K) = 4\sum_{j=1}^{2}\Big(1 - \cos\frac{K_j}{2}\Big), \qquad \mathcal{E}_{\max}(K) = 4\sum_{j=1}^{2}\Big(1 + \cos\frac{K_j}{2}\Big).$$

Lemma 1. Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ and $K \in \mathbb{T}^2$. A number $z \in \mathbb{R} \setminus [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)]$ is an eigenvalue of $H_{\mu_1\mu_2}(K)$ if and only if

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(K;z) := \begin{vmatrix} 1+\mu_1 a_{11}(K;z) & \mu_1 a_{12}(K;z) & \mu_1 a_{13}(K;z) \\ \mu_2 a_{21}(K;z) & 1+\mu_2 a_{22}(K;z) & \mu_2 a_{23}(K;z) \\ \mu_2 a_{31}(K;z) & \mu_2 a_{32}(K;z) & 1+\mu_2 a_{33}(K;z) \end{vmatrix} = 0$$

where

$$a_{ij}(K;z) = \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\alpha_i(p)\alpha_j(p)}{\mathcal{E}_K(p) - z}\,dp,\ i,j = 1,2,3$$

with

$$\alpha_1(p) = \frac{1}{2\pi}, \qquad \alpha_2(p) = \frac{\cos p_1}{\sqrt{2}\pi}, \qquad \alpha_3(p) = \frac{\cos p_2}{\sqrt{2}\pi}.$$

Lemma 2. Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. For every $K = (K_1, K_2)$ with $K_i \in \mathbb{T} \setminus \{-\pi\}, i = 1,2$, the following asymptotics hold:

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(K;z) = \gamma_{11}(K)P^-(K;\mu_1,\mu_2)\ln\frac{1}{\mathcal{E}_{\min}(K) - z} + Q^-(K;\mu_1,\mu_2) + o(1), \quad z \nearrow \mathcal{E}_{\min}(K),$$

where

$$\gamma_{11}(K) = \frac{1}{8\pi\sqrt{\cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}}},$$

$P^-(K;\mu_1,\mu_2)$ and $Q^-(K;\mu_1,\mu_2)$ are polynomials in μ_1 and μ_2.

We fix the total quasi-momentum $K = (K_1, K_2)$ satisfying the following conditions

$$K_1, K_2 \in \mathbb{T} \setminus \{-\pi\}, \qquad \cos\frac{K_1}{2} \neq \cos\frac{K_2}{2}. \tag{1}$$

The first condition guarantees nondegeneracy of the lower and upper edges of the essential spectrum, while the second excludes the symmetry-reducible case.

The lower critical curve is therefore defined by

$$\Gamma^-(K) = \left\{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : P^-(K; \mu_1, \mu_2) = 0\right\}.$$

We consider the lower-threshold equation

$$\left(H_{\mu_1,\mu_2}(K) - \mathcal{E}_{\min}(K)I\right) f = 0.$$

Definition 1. A nonzero solution f of this equation is called a *threshold eigenfunction* if $f \in L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}^2)$. In this case, $\mathcal{E}_{\min}(K)$ is called a *threshold eigenvalue* of $H_{\mu_1,\mu_2}(K)$.

If the threshold equation has a nonzero solution which does not belong to $L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}^2)$, then $\mathcal{E}_{\min}(K)$ is called a *threshold resonance*.

Lemma 3. Suppose that K satisfies (1) and let $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. The polynomials $P^-(K; \mu_1, \mu_2)$ and $Q^-(K; \mu_1, \mu_2)$ have exactly one common real zero

$$\mu^{*,-}(K) = (\mu_1^{*,-}(K), \mu_2^{*,-}(K)).$$

In particular, $Q^-(K; \mu_1, \mu_2) \neq 0$ for $(\mu_1, \mu_2) \in \Gamma^-(K) \setminus \{\mu^{*,-}(K)\}$.

Theorem 1. Suppose that K satisfies (1) and let $\mu =: (\mu_1, \mu_2) \in \Gamma^-(K)$.

(i). If $\mu \in \Gamma^-(K) \setminus \{\mu^{*,-}(K)\}$, $\mathcal{E}_{\min}(K)$ is a *threshold resonance* of $H_{\mu_1,\mu_2}(K)$.

(ii). If $(\mu_1, \mu_2) = \mu^{*,-}(K)$, $\mathcal{E}_{\min}(K)$ is a *threshold eigenvalue* of $H_{\mu_1,\mu_2}(K)$.

References

1. **Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I.** *The threshold effects for two-particle Hamiltonians on lattices.* Commun. Math. Phys. **262** (2006), 91–115.

2. **Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I.** *Bose–Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: exactly solvable case.* J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021), 245201, 22 pp.

3. **Lakaev S. N. and Bozorov I. N.** *The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice.* Theoretical and Mathematical Physics **158** (2009).

УДК 517.956.6

Uch o'lchovli fazoda uchinchi tartibli aralash tipdagi yuklangan tenglama uchun Gellerstedt masalasiga o'xshash masala

Aliqulov Y. Q.
Muhammad al-Xorazmiy nomidagi TATU, Toshkent, O'zbekiston;
yolqinqodirovich@gmail.com

Cheksiz silindrik va prizmatik sohalarda aralash tipdagi yuklangan tenglamalar uchun chegaraviy masalalar [1-2] ishlarda o'rganilgan. Ushbu ishda uch o'lchovli fazoda uchinchi tartibli aralash tipdagi yuklangan tenglama uchun parallel xarakteristik tekisliklarda Gellerstedt shartlari bilan masala qo'yilgan va o'rganilgan.

Ushbu

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} U_y - U_{xx} - U_{zz} - \mu U(x,0,z) & (x,y,z) \in \Omega_0, \\ U_{yy} - U_{xx} - U_{zz} - \mu U(x,0,z) & (x,y,z) \in \Omega_j,\ j = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz.

Ω- uch o'lchovli (x,y,z) fazoning cheksiz prizmatik sohasi bo'lib, quyidagi tekisliklar bilan chegaralangan:

$$\Gamma_0 : x = 0,\ 0 \le y \le h, \quad \Gamma_1 : x = 1,\ 0 \le y \le h, \quad \Gamma_2 : y = h,\ 0 \le x \le 1,$$

$$S_1 :\ x + y = 0,\ y \le 0, \quad 0 \le x \le \frac{x_0}{2}, \quad S_2 :\ x - y = x_0,\ y \le 0,\ \frac{x_0}{2} \le x \le x_0,$$

$$S_3: \ x+y=x_0, \ y\le 0, \ x_0\le x\le \frac{1+x_0}{2}, \quad S_4: \ x-y=1, \ y\le 0, \ \frac{1+x_0}{2}\le x\le 1,$$
$$z\in(-\infty,+\infty), \ x_0\in[0,1],$$

bu yerda

$$\mu = const < 0. \tag{2}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $A(0,0,z)=\bar{S}_0\cap\bar{S}_1$, $E(x_0,0,z)=\bar{S}_2\cap\bar{S}_3$, $C_1\left(\frac{x_0}{2};-\frac{x_0}{2};z\right)=\bar{S}_1\cap\bar{S}_2$, $C_2\left(\frac{x_0+1}{2};\frac{x_0-1}{2};z\right)=\bar{S}_3\cap\bar{S}_4$, $B(1,0,z)=\bar{\Gamma}_1\cap\bar{S}_4$, $l_0=\bar{\Gamma}_0\cap\bar{S}_1$, $l_1=\bar{\Gamma}_1\cap\bar{S}_4$, $l_2=\bar{S}_2\cap\bar{S}_3$, $\Omega_0=\Omega\cap\{(x,y,z): x>0, \ y>0, \ z\in(-\infty,+\infty)\}$, $\Omega_1=\Delta AC_1E$, $\Omega_2=\Delta EC_2B$, $\Omega_3=\square C_1EC_2B$.

1-ta'rif. $L(-\infty,+\infty)-$ to'plam shunday $\mathrm{H}(x,y,z)$ funksiyalar to'plamiki, bu funksiyalar Ω sohada aniqlangan va z o'zgaruvchi bo'yicha $(-\infty,+\infty)$ oraliqda absolyut integrallanuvchi.

2-ta'rif. $U(x,y,z)$ funksiya (1) tenglamaning regulyar yechimi deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa: 1) $U(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap L(-\infty,+\infty)$; 2) $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap L(-\infty,+\infty)$, bundan tashqari, $U_x(x,y,z)$ va $U_y(x,y,z)$ funksiyalar l_0, l_1 va l_2 chiziqlarda birdan kichik tartibda cheksizlikka intilishi mumkin; 3) U_{xxx}, $U_{xzz}\in C(\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)\cap L(-\infty,+\infty)$, $U_{xy}\in C(\Omega_0)\cap L(-\infty,+\infty)$, $U_{xyy}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)\cap L(-\infty,+\infty)$ va (1) tenglamani qanoatlantirsin.

Ω sohada (1) tenglama uchun quyidagi masalani o'rganamiz.

AG **masala**. Ω sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi (1) tenglamaning regulyar yechimi $U(x,y,z)$ funksiya topilsin:

$$U|_{\Gamma_0}=\Phi_0(y,z), \quad U|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z), \ \ 0\le y\le h, \ \ z\in(-\infty,+\infty), \tag{3}$$

$$U_x|_{\Gamma_0}=\Psi_1(y,z), \quad 0\le y\le h, \ \ z\in(-\infty,+\infty), \tag{4}$$

$$U|_{S_1}=\Psi_2(x,z), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{S_1}=\Psi_3(x,z), \ \ 0\le x\le\frac{x_0}{2}, \ \ z\in(-\infty,+\infty), \tag{5}$$

$$U|_{S_3}=\Psi_4(x,z), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{S_3}=\Psi_5(x,z), \quad x_0\le x\le\frac{x_0+1}{2}, \ \ z\in(-\infty,+\infty), \tag{6}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}U(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_x(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_y(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_z(x,y,z)=0, \tag{7}$$

bu yerda $n-$ ichki normal, $\Phi_0(y,z)$, $\Phi_1(y,z)$, $\Psi_j(x,z)$, $(j=\overline{1,5})-$ berilgan funksiyalar, shuningdek $\Phi_0(0,z)=\Psi_2(0,z)$, $\Phi_i(y,z)\in C([0;h]\times R)\cap C^1((0,h)\times R)\cap L(-\infty,+\infty)$, $(i=0,1)$,

$$\Phi'_{iy}(y,z)\in C((0;h)\times R)\cap L(-\infty,+\infty), \ \ (i=0,1), \tag{8}$$

$$\Psi_1(y,z)\in C([0,h]\times R)\cap C^2((0,h)\times R)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{9}$$

$$\Psi_2(x,z)\in C^2\left(\left[0,\frac{x_0}{2}\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(0,\frac{x_0}{2}\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{10}$$

$$\Psi_3(x,z)\in C^1\left(\left[0,\frac{x_0}{2}\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(0,\frac{x_0}{2}\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{11}$$

$$\Psi_4(x,z)\in C^2\left(\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(x_0,\frac{x_0+1}{2}\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{12}$$

$$\Psi_5(x,z)\in C^1\left(\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right]\times R\right)\cap C^3\left(\left(x_0,\frac{x_0+1}{2}\right)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{13}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\Phi_i(y,z)=0, \ \forall y\in[0,h], \ \lim_{|z|\to\infty}\Psi_k(x,z)=0, x\in\left[0,\frac{x_0}{2}\right] \ (k=2,3), \tag{14}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\Psi_m(x,z)=0, x\in\left[x_0,\frac{x_0+1}{2}\right] \ (m=4,5). \tag{15}$$

Quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema. Agar (2),(8)-(15) shartlar bajarilsa, u holda Ω sohada (1) tenglama uchun qo'yilgan *AG* masala yechimi mavjud va yagona.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **B.I. Islomov, E.K.Alikulov** *Analogues of the Cauchy-Goursat problem for a loaded third-order hyperbolic type equation in an infinite three-dimensional domain* Siberian Electronic Mathe-matical Reports, (2021), Vol.18. No.1. P.72-85.
2. **B.I. Islomov, E.K.Alikulov** *Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain* International journal of applied mathematics, (2021), Vol.34. No.2. P.158-170.

UDK 517.955

Integration of the Loaded mKdV–Sine-Gordon Equation with a Source

Atajanova R.B.[1], Rajapov X.O.[2]
[1]Urgench State University named after Abu Rayhon Beruni, Urgench, Uzbekiston;
atajanovaruxiya168@gmail.com
[2]Urgench State University named after Abu Rayhon Beruni, Urgench, Uzbekiston;
xursandrajapov599@gmail.com

In this paper, we study the integration of the loaded mKdV–sine-Gordon equation with a source:

$$u_{xt} + u(x_0,t)\beta_1(t)\left(\frac{3}{2}u_x^2u_{xx} + u_{xxxx}\right) = u(x_1,t)\beta_2(t)\sin u + \beta_3(t)u_{xx} + i\beta_4(t)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right)\,d\eta, \quad (1)$$

$$L(t)\phi = \eta\phi, \qquad x \in R.$$

Here, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$,$\beta_3(t)$ and $\beta_4(t)$ are continuously differentiable function, and the vector function $\phi = (\phi_1(x,\eta,t), \phi_2(x,\eta,t))^T$ has the following asymptotic behavior as $x \to +\infty$:

$$\phi \longrightarrow \begin{pmatrix} h(\eta,t)e^{-i\eta x} \\ h(\eta,t)e^{i\eta x} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Here, $h(\eta,t) = h(-\eta,t)$ is a continuous function satisfying the condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\eta,t)|^2 d\eta < +\infty, \qquad t \geq 0. \quad (3)$$

Equation (1) is considered subject to the following initial condition:

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (4)$$

The initial function $u_0(x)$, $-\infty < x < +\infty$, satisfies the following conditions:
1) As $|x| \to \infty$,

$$u_0(x) \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

and

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left((1+|x|)|u_0'(x)| + |u_0''(x)| + |u_0'''(x)| + |u_0''''(x)|\right) dx < +\infty. \quad (5)$$

2) The operator

$$L(0) = i\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & \dfrac{u_x(x,0)}{2} \\ -\dfrac{u_x(x,0)}{2} & -\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

has exactly N simple eigenvalues

$$\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_N(0)$$

in the upper half-plane and has no spectral singularities.

Suppose that the function $u(x,t)$ possesses the required smoothness and tends sufficiently rapidly to its limiting values as $x \to \pm\infty$, that is,

$$u(x,t) \equiv 0 \pmod{2\pi}, \qquad |x| \to \infty,$$

and

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)|u_x(x,t)| + \sum_{j=2}^{4} \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| \right) dx < \infty. \tag{6}$$

The main purpose of this paper is to obtain representations for the solution $u(x,t)$ of problem (1)–(6) within the framework of the inverse scattering transform method for the operator

$$L(t) = i \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & \dfrac{u_x(x,t)}{2} \\ -\dfrac{u_x(x,t)}{2} & -\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}.$$

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem 1. If the functions $u(x,t)$, $\phi_1(x,\eta,t)$ and $\phi_2(x,\eta,t)$ form a solution of problem (1)–(6), then the scattering data of the operator $L(t)$ with the potential $u(x,t)$ evolve with respect to t as follows:

$$\frac{dr^+}{dt} = \Bigg(8i\xi^3 u(x_0,t)\beta_1(t) - \frac{i\,u(x_1,t)\beta_2(t)}{2\xi} + 2i\xi\beta_3(t) +$$

$$+ i\pi\beta_4(t)h^2(\xi,t) - \beta_4(t)\,\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{\eta+\xi}\,d\eta \Bigg) r^+, \ \operatorname{Im}\xi = 0,$$

$$\frac{d\xi_k}{dt} = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,N.$$

$$\frac{dC_k}{dt} = \Bigg(8i\xi_k^3 u(x_0,t)\beta_1(t) - \frac{i\beta_2(t)u(x_1,t)}{2\xi_k} +$$

$$+ 2i\xi_k\beta_3(t) - \beta_4(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{\big(1+r(\eta)r(-\eta)\big)(\eta+\xi_k)}\,d\eta \Bigg) C_k(t).$$

The obtained equalities completely determine the evolution of the scattering data. This makes it possible to apply the inverse scattering transform method to solve the Cauchy problem (1)–(6).

References

1. **Hoitmetov U.A.** *Integration of the loaded mKdV–sine-Gordon equation with a source.* Siberian Electronic Mathematical Reports. 2023. Vol. 20, no. 2. P. 859–879.

2. **Hoitmetov U.A.,Sobirov.Sh.K,Atajanova.R.B.** *On the Solution of the Cauchy Problem for a Nonstationary Fifth-Order Modified Korteweg–De Vries Equation with an Additional Term in the Class of Rapidly Decreasing Functions* Journal of Nonlinear Modeling and Analysis. – 2026. – Vol. 8, No. 3. – P. 970–987.

3. **Sobirov Sh.K., Hoitmetov U.A.** *Integration of the modified Korteweg–de Vries equation with time-dependent coefficients and a self-consistent source.* Siberian Mathematical Journal. 2024. Vol. 65, no. 4. P. 971–986.

УДК 517.957

On the nmKdV–coshG equation in the class of periodic functions

Baymuratov D.[1], Mannonov G‘.[2] Khayrullaev M.[3]
Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan[1,2];
Samarkand State Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan[3];
[1]dostonbekbaymurotov@gmail.com, [2]xayrullayevmuhammad063@gmail.com

In this work, we consider a mixed problem for the negative order modified Korteweg-de Vries–cosine Gordon equation (nmKdV–coshG) of the form

$$\begin{cases} a(t)\left(u_{xt}-\cosh(2u)\right)-b(t)\left(u_{xxxt}-\left(2u_x\mu_{xt}\right)_x\right)=0, \\ \mu_{xx}=u_x^2, \end{cases} \tag{1}$$

with the conditions

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0}=u_0(x),\ u_0(x+\pi)=u_0(x)\in C^5(\mathbb{R}), \\ u(x,t)|_{x=0}=\alpha(t),\ \mu_x(x,t)|_{x=0}=\beta(t), \\ [u_{xt}(x,t)-\mu_{xt}(x,t)]|_{x=0}=\zeta(t), \end{cases} \tag{2}$$

in the class of real infinite-gap π periodic with respect to x functions satisfying the smoothness conditions

$$u(x,t)\in C_{x,t}^{4,1}(t>0)\cap C(t\geq 0),\ \ \mu(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(t>0)\cap C(t\geq 0). \tag{3}$$

Here $a(t),b(t)\in C[0;\infty)$ and $\alpha(t),\beta(t),\zeta(t)\in C^1(t>0)\cap C(t\geq 0)$ are given continuously differentiable bounded functions.

We propose an algorithm for constructing periodic infinite-gap solutions $u(x,t),\mu_x(x,t),x\in\mathbb{R},t>0$ of the mixed problem (1)–(3) by reducing it to an inverse spectral problem for a self-adjoint periodic Dirac operator of the form:

$$\mathfrak{L}(\tau,t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega(x+\tau,t)y=\lambda y,\ x,\tau\in\mathbb{R},\ t>0, \tag{4}$$

where

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x,t)=\begin{pmatrix} P(x,t) & Q(x,t) \\ Q(x,t) & -P(x,t) \end{pmatrix},y=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$
$$P(x,t)=0,\ Q(x,t)=u_x'(x,t).$$

The main result of this paper is contained in the following theorem.

Theorem. Let $u(x,t),\mu_x(x,t),x\in\mathbb{R},t>0$ be solutions of the mixed problem (1)–(3). Then the boundaries of the spectrum $\lambda_n(\tau,t),n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, of the operator $\mathfrak{L}(\tau,t)$ do not depend on parameters τ and t, that is, $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n,n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, and the spectral parameters $\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1,n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, satisfy the first and second systems of Dubrovin differential equations, respectively:

$$1.\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial\tau}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))\xi_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

$$2.\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))g_n(\xi(\tau,t)),\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

In addition, the following initial conditions are satisfied:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

where $\xi_n^0(\tau),\sigma_n^0(\tau)=\pm1,n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ are the spectral parameters of the Dirac operator $\mathfrak{L}(\tau,0)$.

The sequences $h_n(\xi)$ and $g_n(\xi),n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ are defined by the formulas:

$$h_n(\xi)=\sqrt{\left(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1}\right)\left(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau,t)\right)}\cdot f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))\,(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{1}{1 + 4b(t)\xi_n^2(\tau,t)} \left[\frac{e^{2u}}{2\xi_n(\tau,t)} + 2b(t)\xi_n(\tau,t)\,(u_{\tau t} + \mu_{\tau t}) \right],$$

where $\xi \equiv \xi(\tau,t) = (\ldots, \xi_{-1}(\tau,t), \xi_1(\tau,t), \ldots)$, $\sigma \equiv \sigma(\tau,t) = (\ldots, \sigma_{-1}(\tau,t), \sigma_1(\tau,t), \ldots)$.

References

1. **Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. and Segur H.** *Method for Solving the Sine-Gordon Equation.* Phys. Rev. Lett., 1973, 30. - P. 1262.
2. **Khasanov A.B., Abdivokhidov A.A., Eshbekov R.K.** *Negative Order Modified Korteweg–de Vries–Liouville (nmKdV-L) Equation in the Class of Periodic Infinite-gap Functions.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, 45. - P. 6497–6514.
3. **Khasanov A.B., Normurodov K.N., Khudaerov U.O.** *Integrating the modified Korteweg–de Vries–sine–Gordon equation in the class of periodic infinite-gap functions.* Theoretical and Mathematical Physics, 2023, 214. - P. 170–182.

UDK 517.98

EIGENVALUE ASYMPTOTICS FOR A ONE-DIMENSIONAL LATTICE TWO-FERMION SCHRÖDINGER OPERATOR

Bayzakov M. B.
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
mahmudbayzaqov@gmail.com

Abstract. We consider a system of two identical fermions on the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$ with first and second nearest-neighbor interactions. For the zero total quasimomentum, we study the behavior of the unique discrete eigenvalue near a critical curve in the interaction parameter plane. Using the threshold expansion of the Fredholm determinant, we obtain the asymptotic expansion of the eigenvalue as one interaction parameter approaches its critical value while the other parameter is kept fixed.

The lattice Schrödinger operator and its Fredholm determinant. We consider a system of two identical fermions on the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$ with first and second nearest-neighbor interactions. After the Floquet–Bloch decomposition, the corresponding two-particle Hamiltonian is represented as a direct integral of the fiber Schrödinger operators

$$H_{\mu_1\mu_2}(K) = H_0(K) + V_{\mu_1\mu_2}, \qquad K \in \mathbb{T},$$

acting in the Hilbert space

$$L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(-p) = -f(p)\}.$$

Here

$$[H_0(K)f](p) = \mathcal{E}_K(p)f(p), \qquad \mathcal{E}_K(p) = 4\left(1 - \cos\frac{K}{2}\cos p\right),$$

and

$$[V_{\mu_1\mu_2}f](p) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\mu_j}{\pi} \sin(jp) \int_{\mathbb{T}} \sin(jt) f(t)\,dt.$$

We restrict ourselves to the zero total quasimomentum $K = 0$. In this case

$$\mathcal{E}_0(p) = 4(1 - \cos p), \qquad \sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\mu_1\mu_2}(0)\big) = [0, 8].$$

The interaction operator has rank at most two. Hence the eigenvalue problem outside the essential spectrum can be reduced to the zeros of the Fredholm determinant

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(z) = \det\big(I_2 + \Lambda G(z)\big), \qquad z \notin [0, 8],$$

where

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2), \qquad G(z) = \big(a_{ij}(z)\big)_{i,j=1}^{2},$$

and

$$a_{ij}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(ip)\sin(jp)}{4(1-\cos p) - z}\, dp, \qquad i,j = 1,2.$$

Moreover,

$$z \in \sigma_{\text{disc}}\big(H_{\mu_1\mu_2}(0)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_{\mu_1\mu_2}(z) = 0.$$

As $z \nearrow 0$, the Fredholm determinant has the expansion

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(z) = C_0(\mu_1,\mu_2) + C_1(\mu_1,\mu_2)\sqrt{-z} + O(-z),$$

where

$$C_0(\mu_1,\mu_2) = 1 + \frac{\mu_1}{2} + \mu_2 + \frac{\mu_1\mu_2}{4},$$

and

$$C_1(\mu_1,\mu_2) = -\frac{\mu_1}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,\mu_2 - \frac{\mu_1\mu_2}{2\sqrt{2}}.$$

Critical curve and main result. The equation

$$C_0(\mu_1,\mu_2) = 0$$

defines the critical curve

$$\mu_1 = -4\,\frac{\mu_2+1}{\mu_2+2}, \qquad \mu_2 \neq -2.$$

We consider its branch

$$\Gamma_0 = \left\{(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_2 > -2, \quad \mu_1 = -4\,\frac{\mu_2+1}{\mu_2+2}\right\}.$$

In the adjacent region

$$\mathbb{G}_1 = \left\{(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_2 > -2, \quad \mu_1 < -4\,\frac{\mu_2+1}{\mu_2+2}\right\},$$

the operator $H_{\mu_1\mu_2}(0)$ has exactly one eigenvalue below the essential spectrum.

Theorem. Let $(\mu_1^0, \mu_2) \in \Gamma_0$ be a fixed point, where

$$\mu_1^0 = -4\,\frac{\mu_2+1}{\mu_2+2}.$$

For $\mu_1 < \mu_1^0$ sufficiently close to μ_1^0, let $E(\mu_1) < 0$ be the unique eigenvalue of $H_{\mu_1\mu_2}(0)$ below the essential spectrum. Then, as $\mu_1 \nearrow \mu_1^0$,

$$E(\mu_1) = -\frac{(\mu_2+2)^4}{32}(\mu_1 - \mu_1^0)^2 + O\big((\mu_1-\mu_1^0)^3\big)\,.$$

In particular,

$$E(\mu_1) \to 0 \qquad \text{as} \qquad \mu_1 \nearrow \mu_1^0.$$

Thus, the eigenvalue approaches the lower edge of the essential spectrum quadratically with respect to the deviation of μ_1 from its critical value.

Literature

1. **S.N. Lakaev, A.K. Motovilov, S.Kh. Abdukhakimov** *Two-fermion lattice Hamiltonian with first and second nearest-neighboring-site interactions.* J. Phys. A: Math. Theor. -**56** (2023), 315202.
2. **S.N. Lakaev, I.U. Alladustova** *The exact number of eigenvalues of the discrete Schrödinger operators in one-dimensional case.* Lobachevskii J. Math. -**42** (2021), 1294–1303.

UDC 517.958:517.968

ON THE INVESTIGATION OF AN INTEGRAL GEOMETRY PROBLEM FOR PARABOLOIDAL SURFACES

Begmatov A.K.[1], Ismoilov A.S.[2], Bozorov A.A.[1]

[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
akrambegmatov@mail.ru; bozaxror9@gmail.com
[2]Samarkand State Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan;
alisher_8778@mail.ru

Integral geometry problems in which an unknown function is reconstructed from its integrals over a prescribed family of curves or surfaces constitute an important class of inverse problems. The geometry of the integration family plays an essential role in such problems, determining the structure of the corresponding integral operator and the properties of the inverse problem. Integral geometry problems involving various integration geometries and specific features of the corresponding operators were previously investigated in [1–3]. In the present work, we consider a spatial integral geometry problem for a family of paraboloidal surfaces of revolution possessing a vertex singularity.

Let

$$\Omega = \{(x_1, x_2, z) : x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ 0 < z < h\},$$

and let $u(\xi_1, \xi_2, \zeta)$ be an unknown function defined in Ω. For each point $(x_1, x_2, z) \in \Omega$, consider the surface $S(x_1, x_2, z)$ defined by

$$(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 = (z - \zeta)^4, \qquad 0 \le \zeta \le z. \tag{1}$$

The surface $S(x_1, x_2, z)$ is a paraboloid of revolution with vertex at (x_1, x_2, z) and possesses a vertex singularity.

Suppose that for all $(x_1, x_2, z) \in \Omega$, the values

$$\psi(x_1, x_2, z) = \int_{S(x_1, x_2, z)} u(\xi_1, \xi_2, \zeta)\, dS \tag{2}$$

are known. It is required to reconstruct the function $u(\xi_1, \xi_2, \zeta)$ from the given function $\psi(x_1, x_2, z)$.

Set $t = z - \zeta$. Parameterize the surface $S(x_1, x_2, z)$ by the variables $\zeta \in [0, z]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\xi_1 = x_1 + t^2 \cos\varphi, \qquad \xi_2 = x_2 + t^2 \sin\varphi, \qquad t = z - \zeta.$$

Under this parameterization, the surface area element is

$$dS = t^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, d\zeta\, d\varphi.$$

Therefore, relation (2) takes the form

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, z) = \int_0^z \int_0^{2\pi} & u\big(x_1 + (z-\zeta)^2 \cos\varphi, x_2 + (z-\zeta)^2 \sin\varphi, \zeta\big) \\ & \times (z-\zeta)^2 \sqrt{1 + 4(z-\zeta)^2}\, d\varphi\, d\zeta. \end{aligned} \tag{3}$$

Thus, with respect to the variable z, the problem is reduced to an integral equation of Volterra type.

Applying the two-dimensional Fourier transform with respect to x_1, x_2 to (3), using the integral representation of the Bessel function of order zero, and then applying the Laplace transform with respect to z, we obtain

$$\widetilde{\widehat{\psi}}(\lambda, p) = J(\lambda, p)\widetilde{\widehat{u}}(\lambda, p), \tag{4}$$

where $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Re} p > 0$, and

$$J(\lambda, p) = 2\pi \int_0^\infty e^{-pt} t^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, J_0(|\lambda| t^2)\, dt. \tag{5}$$

Here J_0 denotes the Bessel function of order zero. Owing to the axial symmetry of the problem, $J(\lambda, p)$ depends on the Fourier parameter only through

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}.$$

Consequently, the possibility of solving equation (4) for the transform of the unknown function is related to the study of the properties of the auxiliary integral (5).

To investigate integral (5) for large values of $|\lambda|$, set

$$s = \sqrt{|\lambda|}\, t, \qquad \rho = \frac{p}{\sqrt{|\lambda|}}.$$

Then

$$|\lambda|^{3/2} J(\lambda, p) = 2\pi I_0(\rho) + 2\pi R(\lambda, \rho), \tag{6}$$

where

$$I_0(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho s} s^2 J_0(s^2)\, ds, \tag{7}$$

and

$$R(\lambda, \rho) = \int_0^\infty e^{-\rho s} s^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4s^2}{|\lambda|}} - 1 \right) J_0(s^2)\, ds. \tag{8}$$

This decomposition separates the principal part of the auxiliary integral from the remainder term.

Theorem 1. *Let $I_0(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho s} s^2 J_0(s^2)\, ds$, $\operatorname{Re}\rho > 0$. Then, in any sector*

$$\Sigma_\delta = \{\rho \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\rho > 0,\ \operatorname{Re}\rho \geq \delta|\rho|\}, \qquad \delta > 0,$$

the limit

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \rho \in \Sigma_\delta}} I_0(\rho) = I_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \neq 0 \tag{9}$$

exists. Moreover, as $|\lambda| \to \infty$,

$$R(\lambda, \rho) = O(|\lambda|^{-1}). \tag{10}$$

Proof. With the substitution $u = s^2$, (7) becomes

$$I_0(\rho) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\rho\sqrt{u}} u^{1/2} J_0(u)\, du.$$

Using the Mellin formula

$$\int_0^\infty u^{\mu-1} J_0(u)\, du = 2^{\mu-1} \frac{\Gamma(\mu/2)}{\Gamma(1 - \mu/2)}, \qquad 0 < \mu < \frac{3}{2},$$

and passing to the Abel limit as $\mu \uparrow 3/2$, we obtain (9). The factor $e^{-\rho\sqrt{u}}$ provides uniform Abel regularization in Σ_δ. The estimate (10) follows from the standard asymptotic formula for J_0 and the stationary-phase estimate for the resulting oscillatory integral with quadratic phase. □

It follows from (6), (9), and (10) that

$$J(\lambda, p) = \frac{2\pi I_0(\rho)}{|\lambda|^{3/2}} + O(|\lambda|^{-5/2}), \qquad |\lambda| \to \infty. \tag{11}$$

Theorem 2. *Let $p = \sigma + i\tau$, $\sigma > 0$. Then there exists a number $\lambda_0 > 0$ such that*

$$J(\lambda, p) \neq 0, \qquad |\lambda| \geq \lambda_0. \tag{12}$$

Proof. By (6), $|\lambda|^{3/2}J(\lambda,p) = 2\pi I_0(\rho)+2\pi R(\lambda,\rho)$. As $|\lambda|\to\infty$, $\rho = p/\sqrt{|\lambda|}\to 0$; hence, by Theorem 1, $I_0(\rho)\to I_0^*\neq 0$ and $R(\lambda,\rho)\to 0$. Therefore (12) holds for all sufficiently large $|\lambda|$. □

Thus, for sufficiently large values of the Fourier parameter, the algebraic relation (4) can be solved for the transform of the unknown function:

$$\widetilde{\widehat{u}}(\lambda,p) = \frac{\widetilde{\widehat{\psi}}(\lambda,p)}{J(\lambda,p)}, \qquad |\lambda|\geq\lambda_0. \tag{13}$$

Hence, the investigation of the original spatial integral geometry problem is reduced to the analysis of the auxiliary integral (5), whose asymptotic behavior has been established and whose non-vanishing for sufficiently large values of the Fourier parameter has been proved.

REFERENCES

1. **Begmatov A.Kh.** *A certain inversion problem for the ray transform with incomplete data.* Siberian Mathematical Journal. 2001. Vol. 42. P. 428–434. DOI: 10.1023/A:1010458723144.
2. **Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S.** *Weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane.* Uzbek Mathematical Journal. 2022. Vol. 66. P. 64–75.
3. **Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S.** *On stability and ill-posedness in the inverse problem of integral geometry over conical surfaces with singular weights.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Vol. 46. P. 5540–5554. DOI: 10.1134/S1995080225611270.

UDK 517.98

UNIQUENESS AND AN INVERSION FORMULA FOR A WEIGHTED INTEGRAL GEOMETRY PROBLEM WITH INCOMPLETE DATA OVER A FAMILY OF PARABOLAS

Begmatov A. Kh.[1], Kushatov J. M.[1], Yakubov G. T.[2]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
begmatov59@gmail.com
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
jkushatov95@gmail.com
[2]Samarkand State Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan;
gulom.19y@gmail.com

Abstract. A weighted integral geometry problem with incomplete data over a family of parabolas in the plane is considered. The unknown integrand is supported in a horizontal strip, whereas the vertices of the parabolas for which the integral data are available lie outside the recovery region. The weight function assigns opposite signs to the two branches of each parabola. By applying the Fourier transform, uniqueness is established and an inversion formula in the Fourier domain is obtained. It is also shown that the problem is strongly ill-posed in the scale of spaces of finite smoothness.
Keywords: integral geometry, incomplete data, weighted transform, parabolas, Fourier transform, analytic continuation, inversion formula, strong ill-posedness.

Problems of recovering a function from its integrals over prescribed families of curves and surfaces form a fundamental class of problems in integral geometry. Of particular interest are incomplete-data problems, where integral information is available only for a restricted subset of the original family. Such restrictions may substantially change the properties of the inverse operator and the stability of reconstruction [1–3].

Let

$$\Omega_l = \{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2:\ \xi\in\mathbb{R},\ 0<\eta<l\}, \qquad D_l = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in\mathbb{R},\ l<y<2l\},$$

and for every $(x,y)\in D_l$ consider the parabola

$$P(x,y): \qquad \eta = y-(\xi-x)^2.$$

Let $u = u(\xi, \eta) \in C_0^\infty(\Omega_l)$ be unknown. We consider the weight $g(x, \xi) = \operatorname{sgn}(\xi - x)$ and assume that the weighted integrals

$$f(x, y) = \int_{P(x,y)\cap\Omega_l} \operatorname{sgn}(\xi - x) u(\xi, \eta)\, d\xi \tag{1}$$

are known for all $(x, y) \in D_l$. Using $\xi = x \pm \sqrt{y - \eta}$, (1) becomes

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{u(x + \sqrt{y - \eta}, \eta) - u(x - \sqrt{y - \eta}, \eta)}{\sqrt{y - \eta}}\, d\eta, \qquad l < y < 2l.$$

The essential geometric feature is $0 < \eta < l < y < 2l$: the recovery strip and the region containing the vertices of the measurement parabolas are spatially separated.

Applying the Fourier transform in x,

$$\widehat{u}(\lambda, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \eta) e^{-i\lambda x}\, dx, \qquad \widehat{f}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\lambda x}\, dx,$$

we obtain

$$\int_0^l \frac{\sin(\lambda\sqrt{y - \eta})}{\sqrt{y - \eta}} \widehat{u}(\lambda, \eta)\, d\eta = -i\widehat{f}(\lambda, y), \qquad l < y < 2l. \tag{2}$$

Unlike Volterra-type problems, the upper integration limit in (2) is independent of y. The kernel

$$K_\lambda(z) = \frac{\sin(\lambda\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k+1}}{(2k + 1)!} z^k$$

is entire in z, which permits analytic continuation of the transformed data.

Theorem 1. Let $u \in C_0^\infty(\Omega_l)$. Then the data (1) uniquely determine $u(\xi, \eta)$. For every $\lambda \neq 0$, the Fourier transform $\widehat{u}(\lambda, \eta)$ is recovered in $L_2(0, l)$ by

$$\widehat{u}(\lambda, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{l} P_n\left(\frac{2\eta}{l} - 1\right) \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \binom{n + m}{m} \frac{M_m(\lambda)}{l^m}, \tag{3}$$

where P_n is the Legendre polynomial of degree n and

$$M_m(\lambda) = \int_0^l \eta^m \widehat{u}(\lambda, \eta)\, d\eta, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

To determine the moments, let $\widetilde{F}(\lambda, z)$ denote the analytic continuation of $-i\widehat{f}(\lambda, y)$ from $l < y < 2l$, put $\mu = |\lambda|$, and define

$$G_\lambda(s) = 2se^{-\mu s} \operatorname{sgn}(\lambda) \widetilde{F}(\lambda, -s^2).$$

As $s \to +\infty$,

$$G_\lambda(s) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m(\lambda)}{s^m},$$

and the coefficients are related to the moments by the triangular system

$$C_m(\lambda) = \frac{\mu^m}{2^m m!} M_m(\lambda) + \sum_{j=0}^{m-1} a_{mj}(\mu) M_j(\lambda).$$

Since the coefficient of $M_m(\lambda)$ is nonzero for $\lambda \neq 0$, all moments are recovered successively, and (3) yields $\widehat{u}$.

If the data vanish, analytic continuation and the substitution $z = -s^2$ lead to the kernel

$$\frac{\sinh(\lambda\sqrt{s^2 + \eta})}{\sqrt{s^2 + \eta}}.$$

Its asymptotic expansion successively gives

$$\int_0^l \eta^m \widehat{u}(\lambda,\eta)\,d\eta = 0, \qquad m = 0,1,2,\ldots.$$

Completeness of the polynomial system in $L_2(0,l)$ implies $\widehat{u}(\lambda,\eta) = 0$ and hence $u(\xi,\eta) = 0$.

The problem is strongly ill-posed in spaces of finite smoothness. More precisely, for arbitrary fixed integers $r, s \geq 0$ there is no constant $C > 0$ such that

$$\|u\|_{W_2^r(\Omega_l)} \leq C\,\|Au\|_{W_2^s(D_l)}. \tag{4}$$

Indeed, for

$$u_n(\xi,\eta) = n^{-r}\varphi(\xi)\chi(\eta)e^{in\eta},$$

where $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ and $\chi \in C_0^\infty(\eta_0,\eta_1)$, $0 < \eta_0 < \eta_1 < l$, one has

$$\|u_n\|_{W_2^r(\Omega_l)} \asymp 1, \qquad \|Au_n\|_{W_2^s(D_l)} \leq C_{s,N} n^{-r-N}$$

for every $N > 0$. Thus no finite increase of the smoothness order of the data space provides stable inversion.

The spatial separation of the recovery region from the region containing the vertices of the integrating parabolas therefore changes the inversion mechanism qualitatively: the Volterra structure is replaced by analytic continuation of the transformed data followed by moment reconstruction of the Fourier transform of the unknown function.

Literature

1. **Begmatov A.Kh.** Two classes of weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane. *Siberian Mathematical Journal*. 1995. Vol. 36, No. 2.
2. **Begmatov A.Kh.** On an inversion problem for the ray transform with incomplete data. *Siberian Mathematical Journal*. 2001. Vol. 42, No. 3. P. 507–514.
3. **Ustaoglu Z.** On the inversion of generalized Radon transforms over n-dimensional paraboloids. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2024. Vol. 531. 127799.

УДК 517.98

THE DISCRETE SPECTRUM OF A TWO-BOSON LATTICE HAMILTONIAN WITH A STRUCTURELESS MOLECULAR CHANNEL ON Z^2

Boltaev A. T.[1,2]
[1]**Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan; atboltaev@gmail.com**
[2]**Samarkand Branch of the Romanovskii Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Samarkand, Uzbekistan; atboltaev@gmail.com**

1. Statement of the problem. In the spectral theory of two-particle Schrödinger operators on the lattice Z^d the bound states are produced by a direct interaction between the particles [1]. The present work deals with the opposite situation: two identical spinless bosons on Z^2 carry *no* interaction at all, but are coupled to a second (molecular) channel, into which a pair of bosons occupying the same site may associate and out of which it may dissociate back. This is a lattice realization of the canonical Feshbach picture [2]; the molecular channel is *structureless*, i.e. it carries one fixed internal energy $E_0 \in R$ and has no kinematics of its own, and the conversion is governed by a single real coupling constant γ.

The problem studied here is to describe the *discrete spectrum* of the corresponding two-channel lattice Hamiltonian for all values of the parameters E_0 and γ: whether bound states exist when the bosons do not interact directly, how many of them there are, and on which side of the two-boson continuum they are situated.

2. The Hamiltonian. Let $T^2 = (R/2\pi Z)^2$ be the dual group of Z^2. The state space of the system is

$$\widehat{c} := \ell^2(Z^2) \oplus \ell^{2,s}(Z^2 \times Z^2),$$

where the first summand is the state space of the molecule and the second one, the subspace of symmetric functions, is the state space of the pair of identical bosons. The Hamiltonian of the model is the bounded self-adjoint block operator matrix

$$\widehat{\mathbb{H}}_\gamma = \begin{pmatrix} \widehat{E}_0 & \widehat{C}_\gamma^* \\ \widehat{C}_\gamma & \widehat{H}_{\rm pair} \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \widehat{c}, \tag{1}$$

whose entries act, for $y, x_1, x_2 \in Z^2$, by

$$\big(\widehat{E}_0 \widehat{f}_0\big)(y) = E_0\, \widehat{f}_0(y), \qquad \big(\widehat{H}_{\rm pair} \widehat{f}_1\big)(x_1, x_2) = \sum_{y \in Z^2} \big[\widehat{\epsilon}(x_1 - y) \widehat{f}_1(y, x_2) + \widehat{\epsilon}(x_2 - y) \widehat{f}_1(x_1, y)\big],$$

$$\big(\widehat{C}_\gamma \widehat{f}_0\big)(x_1, x_2) = \gamma\, \delta_{x_1, x_2} \widehat{f}_0(x_1), \qquad \big(\widehat{C}_\gamma^* \widehat{f}_1\big)(y) = \gamma\, \widehat{f}_1(y, y).$$

Here $E_0 \in R$ is the internal energy of the molecular channel, $\gamma \in R$ is the molecule $\leftrightarrow$ pair conversion strength, and $\widehat{\epsilon} \colon Z^2 \to R$ is the rescaled nearest-neighbour discrete Laplacian kernel: $\widehat{\epsilon}(0) = 4$, $\widehat{\epsilon}(s) = -1$ for $|s| = |s_1| + |s_2| = 1$, and $\widehat{\epsilon}(s) = 0$ otherwise. Note that $\widehat{H}_{\rm pair}$ is the *free* two-boson operator, so that no potential acts between the bosons, and that the molecular diagonal block is a scalar multiple of the identity, so that the molecule does not tunnel between the sites.

3. Fiber operators and the essential spectrum. The operator (1) commutes with the simultaneous translations of the lattice, and hence the total quasi-momentum $k \in T^2$ is a conserved quantity. After the Fourier transform and the substitution $q_1 = \frac{k}{2} + p$, $q_2 = \frac{k}{2} - p$, the Hamiltonian $\widehat{\mathbb{H}}_\gamma$ is unitarily equivalent to the direct integral over $k \in T^2$ of the bounded self-adjoint fiber operators

$$H_\gamma(k) = \begin{pmatrix} E_0 & C_\gamma^*(k) \\ C_\gamma(k) & H_{\rm pair}(k) \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad c(k) := C \oplus L^{2,\mathrm{e}}(T^2), \tag{2}$$

where $L^{2,\mathrm{e}}(T^2) = \{g \in L^2(T^2) : g(-p) = g(p)\}$ is the subspace of even functions (the bosonic symmetry in the relative variable p), the summand C records the molecular amplitude, and

$$\big(H_{\rm pair}(k) g_1\big)(p) = \epsilon_k(p)\, g_1(p), \quad \epsilon_k(p) = 4 \sum_{j=1}^{2} \Big(1 - \cos\tfrac{k_j}{2} \cos p_j\Big), \quad \big(C_\gamma(k) g_0\big)(p) = \frac{\gamma}{2\pi}\, g_0.$$

Since $H_\gamma(k)$ differs from $E_0 \oplus H_{\rm pair}(k)$ by a perturbation of rank at most two, its essential spectrum coincides with the range of the function ϵ_k:

$$\sigma_{\rm ess}\big(H_\gamma(k)\big) = [\epsilon_{\min}(k),\, \epsilon_{\max}(k)] \qquad \text{for every } k \in T^2 \text{ and every } \gamma \in R.$$

In particular, for the distinguished fiber $k = 0$ one has $\sigma_{\rm ess}(H_\gamma(0)) = [0, 16]$, independently of E_0 and γ, so that the discrete spectrum of $H_\gamma(0)$ is contained in $R \setminus [0, 16]$. The question is how many eigenvalues $H_\gamma(0)$ possesses outside this interval, and where they lie.

4. Main result. The following theorem describes the discrete spectrum of $H_\gamma(0)$ completely, for all values of E_0 and γ.

Theorem 1. *Let $E_0 \in R$ be arbitrary and let $H_\gamma(0)$ be the fiber operator (2) with $k = 0$, so that $\sigma_{\rm ess}(H_\gamma(0)) = [0, 16]$.*

(a) *If $\gamma = 0$, then $H_0(0) = E_0 \oplus H_{\rm pair}(0)$ and the discrete spectrum of $H_0(0)$ consists of the single simple eigenvalue E_0, with eigenvector $v_1 = (1, 0) \in c(0)$, when $E_0 \notin [0, 16]$, and is empty when $E_0 \in [0, 16]$.*

(b) *If $\gamma \neq 0$, then $H_\gamma(0)$ has exactly two discrete eigenvalues $z_- = z_-(\gamma, E_0)$ and $z_+ = z_+(\gamma, E_0)$, both simple, and*

$$z_-(\gamma, E_0) < 0, \qquad z_+(\gamma, E_0) > 16, \tag{3}$$

that is, one eigenvalue lies strictly below and the other one strictly above the two-boson continuum $[0, 16]$. *Consequently, the numbers* n_- *and* n_+ *of the eigenvalues of* $H_\gamma(0)$ *lying, respectively, below and above its essential spectrum satisfy* $n_- = n_+ = 1$ *for every* $\gamma \neq 0$ *and every* $E_0 \in R$.

The passage from (a) to (b) is a purely two-channel effect. If $E_0 \in [0, 16]$, the operator $H_0(0)$ has no discrete spectrum at all, while an arbitrarily small coupling $\gamma \neq 0$ already produces two bound states, even though the bosons carry no direct interaction whatsoever. If $E_0 \notin [0, 16]$, the single molecular level of (a) is joined, for every $\gamma \neq 0$, by a second bound state situated beyond the opposite edge of the band $[0, 16]$.

5. Conclusion. Theorem 1 determines the discrete spectrum of $H_\gamma(0)$ completely and uniformly in the coupling constant, and shows that the coupling between the two channels is by itself a sufficient mechanism of binding: in the complete absence of a boson–boson potential, an arbitrarily weak association/dissociation process creates exactly one bound state below and exactly one bound state above the two-boson band.

References

1. **Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I.** *The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices.* Comm. Math. Phys. – 2006. – Vol. 262. – P. 91–115.
2. **Chin C., Grimm R., Julienne P., Tiesinga E.** *Feshbach resonances in ultracold gases.* Rev. Mod. Phys. – 2010. – Vol. 82, No. 2. – P. 1225–1286.

UDK 517.956

Langevin tipidagi kasr tartibli differensial tenglama uchun Neumann chegaraviy shartli boshlang'ich chegaraviy masala

Choriyeva Gulira'no Hasan qizi [1]
[1]O'zbekiston Milliy universiteti, Differensial tenglamalar va matematik fizika kafedrasi, Toshkent, O'zbekiston; Ranochoriyeva0898@gmail.com

Kasr tartibli differensial tenglamalar so'nggi yillarda fizika, biologiya, mexanika va moliyaviy matematikada keng qo'llanilmoqda. Klassik Langevin tenglamasi Brown harakatini ifodalasa, kasr tartibli hosilalarning kiritilishi tizimning xotira effektini va anomal diffuziya kabi murakkab jarayonlarni aniqroq aks ettiradi [1, 2]. Dirichlet chegaraviy sharti (chegarada funksiya nolga teng) ko'p o'rganilgan bo'lsa, Neumann sharti (chegarada normal hosila nolga teng) issiqlik oqimi yo'qligi yoki chegarada izolyatsiyalangan holatlarni modellashtirishda muhim ahamiyatga ega. Spektral parametr λ esa tizimning o'ziga xos chastota yoki o'lcham xususiyatlarini ifodalaydi. Ushbu ishda aynan Neumann sharti va spektral parametr qatnashgan Langevin tipidagi kasr differensial tenglama uchun boshlang'ich chegaraviy masala to'liq o'rganiladi.

Asosiy tushunchalar. Kasr tartibli hisobda eng ko'p qo'llaniladigan operatorlardan biri bu Kaputo ma'nosidagi kasr hosilasidir. $0 < \alpha \leq 1$ bo'lsin. $g(t)$ funksiyaning α tartibli Kaputo kasr hosilasi quyidagicha ta'riflanadi [1]:

$$ {}^{C}D_t^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} g'(\tau)\, d\tau. $$

Bu ta'rifning afzalligi shundaki, boshlang'ich shartlar klassik hosilalardagidek (ya'ni $g(0), g'(0)$) ko'rinishida beriladi, bu esa fizik masalalarda qulaylik tug'diradi.

Kasr tartibli differensial tenglamalarning analitik yechimlari odatda eksponensial funksiyaning umumlashgan ko'rinishi bo'lmish Mittag–Leffler funksiyasi orqali ifodalanadi. Ikki parametrli Mittag–Leffler funksiyasi [2]:

$$ E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0,\ z \in \mathbb{C}. $$

Bu funksiya $\alpha = 1, \beta = 1$ holatda odatdagi eksponensial funksiyaga aylanadi: $E_{1,1}(z) = e^z$. Shuning uchun u kasr differensial tenglamalar nazariyasida muhim o'rin tutadi.

Masala qo‘yilishi. Quyidagi Langevin tipidagi kasr differensial tenglamani qaraymiz:

$$ {}^{C}D_t^{\alpha}\big({}^{C}D_t^{\alpha}+\lambda\big)u(t,x)=u_{xx}(t,x)+f(t,x),\quad 0<t<T,\ 0<x<\pi. \tag{1}$$

Bu tenglama vaqt bo‘yicha ikki karrali Kaputo kasr hosilasini o‘z ichiga oladi. $\lambda\neq 0$ haqiqiy spektral parametr bo‘lib, u tizimning o‘ziga xos chastotasini ifodalaydi. $f(t,x)$ – tashqi ta’sir (kuch) funksiyasi.

Chegaraviy shartlar sifatida Neumann shartlarini olamiz:

$$u_x(t,0)=0,\quad u_x(t,\pi)=0,\quad 0\le t\le T. \tag{2}$$

Bu shartlar fizik jihatdan chegarada issiqlik oqimi yo‘qligini (issiqlik izolyatsiyasi) yoki suyuqlikning devorga tegmasdan oqishini ifodalaydi.

Boshlang‘ich shartlar:

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad u_t(0,x)=\psi(x),\quad 0\le x\le\pi. \tag{3}$$

Bu yerda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Yechim usuli. Neumann chegaraviy shartlari (2) ga mos ravishda $L_2(0,\pi)$ da to‘liq va ortonormal bo‘lgan quyidagi kosinuslar sistemasini tanlaymiz:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Yechimni, tashqi kuchni va boshlang‘ich funksiyalarni shu sistema bo‘yicha yoyamiz:

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}u_0(t)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\cos(nx), \tag{4}$$

$$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}f_0(t)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos(nx),$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi_0+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos(nx),\quad \psi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\psi_0+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\cos(nx).$$

(4) va boshqa yoyilmalarni (1)–(3) ga qo‘yib, kosinuslarning ortogonalligidan foydalanib, har bir $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ uchun quyidagi oddiy kasr differensial tenglamani olamiz:

$${}^{C}D_t^{\alpha}\big({}^{C}D_t^{\alpha}+\lambda\big)u_n(t)+n^2u_n(t)=f_n(t),\quad 0<t<T, \tag{5}$$

$$u_n(0)=\varphi_n,\quad u_n'(0)=\psi_n. \tag{6}$$

Bu yerda $\rho_n=n^2+\lambda^2$ deb belgilaymiz. (5)–(6) masala klassik Koshi masalasi bo‘lib, uning yagona yechimi Mittag–Leffler funksiyalari orqali quyidagicha ifodalanadi [2]:

$$u_n(t)=\varphi_nE_{\alpha,1}(-\rho_nt^{\alpha})+\psi_ntE_{\alpha,2}(-\rho_nt^{\alpha})+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\rho_n(t-\tau)^{\alpha})f_n(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Demak, umumiy yechim (4) qator ko‘rinishida bo‘lib, undagi $u_n(t)$ lar (7) formula bilan aniqlanadi.

Asosiy natija. Teorema. Faraz qilaylik $f(t,x),\varphi(x),\psi(x)$ yetarlicha silliq va quyidagi mos kelish shartlari bajarilsin:

$$\varphi'(0)=\varphi'(\pi)=0,\quad \psi'(0)=\psi'(\pi)=0.$$

U holda (1)–(3) masala $C([0,T];H^2(0,\pi))\cap C^1((0,T];L_2(0,\pi))$ sinfida **yagona** yechimga ega va bu yechim (4) qator ko‘rinishida ifodalanadi.

Isbot g‘oyasi. Mittag–Leffler funksiyasining quyidagi asimptotik bahosidan foydalanamiz [1]:

$$|E_{\alpha,\beta}(-\rho t^{\alpha})|\le\frac{C}{1+\rho t^{\alpha}},\quad \rho>0.$$

Shuningdek, integral had uchun ham xuddi shunday baho o‘rinli. Natijada (7) dan

$$|u_n(t)| \le \frac{C}{n^4}$$

kelib chiqadi, chunki $\rho_n = n^2 + \lambda^2$ va $\varphi_n, \psi_n, f_n(t)$ funksiyalarning Furye koeffitsiyentlari silliqlik tufayli $O(n^{-2})$ dan tez kamayadi. Demak, (4) qator va uning x bo‘yicha ikkinchi hosilasi

$$u_{xx}(t,x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n(t) \cos(nx)$$

qatorlarga mos ravishda $\sum C/n^4$ va $\sum C/n^2$ majorant qatorlar qo‘yish mumkin. Veyershtrass teoremasi bo‘yicha ular tekis yaqinlashadi, shuning uchun $u(t,x) \in C([0,T]; H^2(0,\pi))$. Boshlang‘ich shartlarning bajarilishi (4) ga $t = 0$ qo‘yish orqali, chegaraviy shartlar esa kosinuslar sistemasining $x = 0$ va $x = \pi$ da hosilalari nolga tengligi tufayli tekshiriladi. Yagonalik esa bir jinsli masala ($f \equiv 0, \varphi \equiv 0, \psi \equiv 0$) uchun (7) dan $u_n(t) \equiv 0$ kelib chiqishi bilan isbotlanadi.

Xulosa. Ushbu ishda Neumann chegaraviy sharti va spektral parametr λ qatnashgan Langevin tipidagi kasr differensial tenglama uchun boshlang‘ich chegaraviy masala to‘liq o‘rganildi. Furye usuli yordamida yechim kosinus qatori ko‘rinishida qurildi, har bir Furye koeffitsiyenti Mittag–Leffler funksiyalari orqali aniq ifodalandi. Qatorlarning tekis yaqinlashishi majorant qatorlar usuli bilan isbotlandi, natijada yechimning mavjudligi va yagonaligi qat’iy asoslandi. Olingan natijalar issiqlik izolyatsiyasi, suyuqlik dinamikasi va biologik populyatsiya modellarida qo‘llanilishi mumkin. Kelgusida ushbu natijalarni nochiziqli, kechikishli va impulsiv holatlarga, shuningdek bog‘langan tizimlarga umumlashtirish rejalashtirilgan.

Adabiyotlar

1. **Килбас А.А., Сривастава Х.М., Трухильо Х.Х.** *Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка.* М.: Мир, 2006. 560 с.
2. **Подлубный И.** *Дробные дифференциальные уравнения.* Киев: Наукова думка, 1999. 340 с.
3. **Исломов Б.И., Абсоатова Х.Г.** Краевая задача для уравнения смешанного типа дробного порядка со спектральным параметром. *БухДУ илмий ахбороти.* 2025. №12(129). С.179–184.

УДК 517.957

The Initial Value Problem for the Hirota-type equation with a finite density and integral self–consistent source

Eshbekov R.Kh[1], Makhmudov B.E.[2]
Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan[1];
Samarkand region, Pastdargom District Specialized Boarding School No.2[2];
[1]rayxonbek@mail.ru, [2]makhmudovb@mail.ru

We consider the following Initial Value Problem(IVP) for the Hirota-type equation with a finite density and integral self-consistent source:

$$\begin{cases} p_t = p_{xxx} + 6p_x\left(\rho^2 - \left\{p^2+q^2\right\}\right) - q_{xx} - 2q\left(\rho^2 - \left\{p^2+q^2\right\}\right) - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(\mu,t) v_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-\right) d\mu, \\ q_t = q_{xxx} + 6q_x\left(\rho^2 - \left\{p^2+q^2\right\}\right) + p_{xx} + 2p\left(\rho^2 - \left\{p^2+q^2\right\}\right) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(\mu,t) v_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-\right) d\mu, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} p(x,t)|_{t=0} = p_0(x),\ p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \\ q(x,t)|_{t=0} = q_0(x),\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2}$$

in the class of real infinite-gap π periodic functions in x :

$$\begin{cases} p(x+\pi,t)=p(x,t),\ q(x+\pi,t)=q(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ p(x,t),q(x,t)\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0). \end{cases} \tag{3}$$

Here $\zeta(\mu,t)$ is a given real continuous function with uniform asymptotes

$$\zeta(\mu,t)=O\left(\frac{1}{|\mu|^3}\right),\ \mu\to\pm\infty.$$

In addition, the function $\psi^{\pm}(x,\mu,t)=\left(\psi_1^{\pm}(x,\mu,t),\psi_2^{\pm}(x,\mu,t)\right)^T$ are Floquet solution, normalized by the condition $\psi_1^{+}(0,\mu,t)$, of the following Dirac equation

$$\mathcal{L}(t)y\equiv\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p(x,t)&q(x,t)\\q(x,t)&-p(x,t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R},\ t>0 \tag{4}$$

and defined as follows:

$$\psi(x,\mu,t)=u(x,\mu,t)+\frac{v_2(\pi,\mu,t)-u_1(\pi,\mu,t)\mp\sqrt{\Delta^2(\mu)-4}}{2v_1(\pi,\mu,t)}\cdot v(x,\mu,t),$$

where $u(x,\mu,t)=(u_1(x,\mu,t),u_2(x,\mu,t))^T$ and $v(x,\mu,t)=(v_1(x,\mu,t),v_2(x,\mu,t))^T$ are solutions of equation (4) with initial conditions $u(0,\mu,t)=(1,0)^T$ and $v(0,\mu,t)=(0,1)^T$ respectively, the function $\Delta(\mu,t)=u_1(\pi,\mu,t)+v_2(\pi,\mu,t)$ is called the Lyapunov function for the system of equation (4).

In this work, we propose an algorithm for constructing infinite-gap solutions $p(x,t),q(x,t)$, $x\in\mathbb{R},t>0$ of the problem (1)–(3) by reducing it to the inverse spectral problem for the following Dirac operator:

$$\mathcal{L}(\tau,t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega(x+\tau,t)y=\mu y,\ x\in\mathbb{R},\ \tau\in\mathbb{R},\ t>0, \tag{5}$$

where

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \Omega(x+\tau,t)=\begin{pmatrix}p(x+\tau,t)&q(x+\tau,t)\\q(x+\tau,t)&-p(x+\tau,t)\end{pmatrix},\ y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix}.$$

Let us denote by $u(x,\mu,\tau,t)=(u_1(x,\mu,\tau,t),u_2(x,\mu,\tau,t))^T$ and $v(x,\mu,\tau,t)=(v_1(x,\mu,\tau,t),v_2(x,\mu,\tau,t))^T$ solutions of equation (5) with initial conditions $u(0,\mu,\tau,t)=(1,0)^T$ and $v(0,\mu,\tau,t)=(0,1)^T$, respectively.

The intervals (μ_{2n-1},μ_{2n}), $n\in\mathbb{Z}$ are called gaps, where $\mu_n\equiv\mu_n(\tau,t)$ are the eigenvalues of the periodic or antiperiodic $(y(0)=\pm y(\pi))$ problem for the equation (5). The eigenvalues of the Dirichlet problem for the system (5) with boundary conditions $y_1(0,\mu,\tau,t)=0$, $y_1(\pi,\mu,\tau,t)=0$ will be denoted by $\xi_n(\tau,t),n\in\mathbb{Z}$ and at the same time $\xi_n(\tau,t)\in[\mu_{2n-1},\mu_{2n}]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Numbers $\xi_n(\tau,t),n\in\mathbb{Z}$ and signs $\sigma_n(\tau,t)=sgn\left\{v_2(\pi,\xi_n,\tau,t)-u_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\right\}$, $n\in\mathbb{Z}$ are called the spectral parameters of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$.

Spectral parameters $\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\in\mathbb{Z}$, and spectrum boundaries $\mu_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}$ are called the spectral data of the Dirac operator $\mathcal{L}(\tau,t)$.

The problem of recovering the coefficient $\Omega(x,t)$ of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$ from spectral data is called the inverse problem. The coefficients $p(x+\tau,t)$ and $q(x+\tau,t)$ of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$ are determined uniquely from the spectral data $\mu_n(\tau,t),\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1,n\in\mathbb{Z}$.

The main result of this work is contained in the following theorem.

Theorem. If the initial functions $p_0(x)$ and $q_0(x)$ satisfy the conditions

$$p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^6(\mathbb{R}),\ q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^6(\mathbb{R}),$$

then there exists a uniquely determined global solution $p(\tau,t),q(\tau,t)$ of the problem (1)–(3) belonging to the class $C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq0)$, which are determined by the sum of the following uniformly convergence series, respectively:

$$p(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mu_{2n-1}+\mu_{2n}}{2}-\xi_n(x,t)\right), \tag{6}$$

$$q(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(x,t)\sqrt{(\xi_n(x,t)-\mu_{2n-1})(\mu_{2n}-\xi_n(x,t))}\cdot f_n(\xi(x,t)), \tag{7}$$

where

$$f_n(\xi(x,t))=\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{+\infty}\frac{(\mu_{2k-1}-\xi_n(x,t))(\mu_{2k}-\xi_n(x,t))}{(\xi_k(x,t)-\xi_n(x,t))^2}}.$$

References

1. **Gardner S., Green I., Kruskal M., Miura R.** *Method for Solving the Sine-Gordon Equation.* Phys. Rev. Lett., 1967, 19 (19). - P. 170–182.
2. **Hirota R.** *Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation.* Journal of Mathematical Physics, 1973, 14. - P. 805–809.
3. **Khasanov A. B., Eshbekov R. Kh., Normurodov Kh. N.** *Integration of a nonlinear Hirota type equation with finite density in the class of periodic functions.* Lobachevskii J. Math., 2023, 44 (10). - P. 4329–4347.

UDC 517.957

INVERSE PROBLEM FOR NONLINEAR HEAT EQUATION

Hamroqulova Sh. Sh.[1]
[1]PhD student, Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
shaxnozahamroqulova32@gmail.com

We consider Cauchy problem for the nonlinear parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+q(x',t)u^{1+\alpha}(x,t)+p(x',t)u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^n_T, \tag{1}$$

with the initial condition

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

where Δ denotes the Laplacian in the spatial variables $x=(x',x_n)=(x_1,...,x_{n-1},x_n)$, and $\mathbb{R}^n_T:=\{(x,t)|\quad x\in\mathbb{R}^n,0<t\leq T\}$,$\alpha>0$ is a real constant , and $q(x',t),\quad \varphi(x),\quad p(x',t)$ are given enough smooth functions.

Let us formulate the inverse problem in the following form: find the unknown function $p(x',t)$, $(x',t)\in\mathbb{R}^{n-1}_T$, in the direct problem equation, if the solution $u(x,t)$ satisfies the supplementary condition on the hyperplane $x_n=0$:

$$u(x',0,t)=h(x',t),\quad (x',t)\in\mathbb{R}^{n-1}_T, \tag{3}$$

where $h(x',t)$ is a given function.To guarantee the well-posedness of the problem, the initial data $\varphi(x)$ and the function $h(x',t)$ are required to satisfy the compatibility condition:

$$h(x',0)=\varphi(x',0),\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{4}$$

We will assume that

$$\varphi(x)\in H^{l+4}(\mathbb{R}^n),\quad h(x',t)\geq h_0>0,\quad h_0=const,\quad h(x',t)\in H^{l+4,\frac{l+4}{2}}\left(\overline{\mathbb{R}}^{n-1}_T\right).$$

.

Lemma 1. The inverse problem (1)-(3) is equivalent to the problem of determining the functions $v(x,t)\in H^{l+2,\frac{l+2}{2}}\left(\overline{\mathbb{R}}^n_T\right)$,$p(x',t)\in H^{l+2,\frac{l+2}{2}}\left(\overline{\mathbb{R}}^{n-1}_T\right)$ from the equations

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v+(1+\alpha)q(x',t)u^{\alpha}(x,t)v(x,t)+p(x',t)v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^n_T,$$

$$v(x,0)=\varphi_{x_n}(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,$$
$$v_{x_n}(x',0,t)=h_t-\Delta_{x'}h+q(x',t)h^{1+\alpha}(x',t)+p(x',t)h(x',t), \quad (x',t)\in\mathbb{R}_T^{n-1},$$

where $u(x,t)\in H^{l+3,\frac{l+3}{2}}\left(\overline{\mathbb{R}}_T^n\right)$ is the solution to problem (1),(2).

Defination 1. Let $\mathcal{K}(T,K)=\left\{u(x,t),v(x,t),p(x',t)\right\}$ be the set of functions belonging to the class $H^{l,\frac{l}{2}}(\mathbb{R}_T^n)$, and satisfying the conditions

$$\left|U-U^0\right|_T^l\le K, \quad u(x,t)>0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}_T^n.$$

Theorem 1. Let $\varphi(x)\in H^{l+4}(\mathbb{R}^n)$,$\varphi(x)\ge\rho$, $h(x',t)\in H^{l+4,\frac{l+4}{2}}\left(\overline{\mathbb{R}}^{n-1}\right)$,$h(x',t)\ge h_0>0$, $h_0=const$, $0<l<1$ and $h(x',0)=\varphi(x',0)$. Then there exists $T^*\in(0,T]$ such that equation (1)-(4) has a unique solution on the set $\mathcal{K}(T^*,K)$.

This work presents a rigorous mathematical analysis of an inverse problem associated with a nonlinear parabolic equation featuring a power-type nonlinearity. Under suitable regularity and compatibility conditions on the initial data and coefficients, we establish the local well-posedness (existence and uniqueness) of the classical solution in HГ¶lder spaces. By converting the problem into an equivalent system of Volterra-type integral equations via the fundamental solution of the heat operator, the proofs are established using a priori estimates and Banach's fixed-point theorem. These theoretical findings advance the analytical framework for coefficient inverse problems in nonlinear partial differential equations and provide a solid foundation for future numerical reconstruction algorithms.

References

1. **Beznoshchenko N.Ya.** *Determination of the coefficient q from the solution of the second boundary value problem for the equation $u_t-\triangle u+qu=f$ in a half space (existence in the large).* Sibirsk. Mat. Zh. **23**(1). - 1982. -3-11 p.
2. **Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.** *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type.* Translations of Mathematical Monographs, Providence, RI. **23** - 1968(In Russian).

UDK 517.957

Solving the Cauchy problem for the extended and loaded fifth-order KortewegвЂ“de Vries equation with a self-consistent source.

Hoitmetov U. A.[1], Sobirov Sh. K.[2]
[1] Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan; x_umid1@mail.ru1
[2] Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan; shexzod19942@mail.ru2

Let us consider the following extended and loaded fifth-order KortewegвЂ“de Vries equation with a self-consistent source:

$$\begin{cases} u_t+P\left(u(x_0,t)\right)\left(u_{xxxxx}-20u_xu_{xx}-10uu_{xxx}+30u^2u_x\right)+Q\left(u(x_1,t)\right)\left(u_{xxx}-6uu_x\right)+ \\ \quad +Z\left(u(x_2,t)\right)u_x=4\sum\limits_{m=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}|\varphi_m|^2, \\ -\varphi_m''+u(x,t)\varphi_m=k_m^2\varphi_m. \end{cases}$$

Where $P(y)$, $Q(z)$ and $Z(s)$ are polynomials of y, z, s and t and $x_0,x_1,x_2\in\mathbb{R}$, respectively. In the case under consideration, the functions $\varphi_m=\varphi_m(x,t)$, $m=1,N$ are the eigenfunctions corresponding to the eigenvalues of the self-adjoint SturmвЂ“Liouville operator

$$L(t):=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x,t),\ t>0$$

and satisfy the following conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_m(x,t)|^2 dx = A_m(t),\ m = \overline{1,\ N}.$$

Where $A_m(t),\ m = \overline{1,\ N}$ are positive functions given. We study the given equation (1) with the following initial condition

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Where $u_0(x)$ is a real function with the following properties:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|u_0(x)|\,dx < \infty$$

2) The operator $L(0) = -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x), x \in \mathbb{R}$ has N eigenvalues $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_N(0)$ and does not possess spectral singularities.

Let us assume that the function $u(x,t)$ has the required smoothness and rather quickly tends to its limits at $x \to \pm\infty$, i.e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(1+|x|)\,|u(x,t)| + \sum_{j=1}^{5} \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| \right] dx < \infty, \qquad (1).$$

The main goal of the work is to obtain representations for the solution $u(x,t)$, $\varphi_m(x,t)$, $m = \overline{1,N}$ for the problem (1)вЂ“(5) within the framework of the inverse scattering transform method for the operator $L(t)$.

The main result of this work is the following theorem.

Theorem. If the functions $u(x,t),\ \varphi_m(x,t),\ m = \overline{1,N},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$ are a solution to the problem (1)-(5), then the scattering data $\left\{r^+(k,t),\ \lambda_m(t),\ B_m(t),\ m = \overline{1,N}\right\}$ of the operator $L(t)$ with potential $u(x,t)$ satisfy the following differential equations:

$$\frac{\partial r^+(k,t)}{\partial t} = \left(32ik^5 P\left(u(x_0,t)\right) + 8ik^3 Q\left(u(x_1,t)\right) - 2ikZ\left(u(x_2,t)\right)\right) r^+(k,t),$$

$$\frac{\partial \lambda_m(t)}{\partial t} = 0,\ m = \overline{1,\ N},$$

$$\frac{dB_m(t)}{dt} = \left(32ik_m^5 P\left(u(x_0,t)\right) + 8ik_m^3 Q\left(u(x_1,t)\right)\right) B_m(t) +$$
$$+ \left(-2ik_m Z\left(u(x_2,t)\right) + 2A_m(t)\right) B_m(t),\ \ m = \overline{1,\ N}.$$

Literature

1. **Gardner C. S., Greene I. M., Kruskal M. D., Miura R. M.** *Method for Solving the Korteweg-de Vries.* Equation, Phys. Rev. Lett.Vol.19. 1967.P.1095-1097.

2. **Wazwaz A. M.** *Abundant solitons solutions for several forms of the fifth-order KdV equation by using the tanh method.* Applied Mathematics and Computation. Vol.182. No.1. 2006. P.283вЂ“300.

3. **Sobirov Sh.K., Hoitmetov U.A.** *Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with time-dependent coefficients and a self-consistent source.* Siberian Mathematical Journal. Vol.65. No.4. P.971-986.

UDK 517.98

LOWER-THRESHOLD ASYMPTOTICS OF DISCRETE EIGENVALUES FOR A TWO-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATOR ON A ONE-DIMENSIONAL LATTICE

Ibrogimov U.B.
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
utkir_ibrogimov1996@mail.ru

Let $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv [-\pi, \pi)$ be the one-dimensional torus and let $L^{2,e}(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable even functions on $\mathbb{T}$. We consider the two-particle discrete Schrödinger operator

$$H_{\mu_1\mu_2}(0) = H_0(0) + V_{\mu_1\mu_2}, \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},$$

acting in $L^{2,e}(\mathbb{T})$. The free part $H_0(0)$ is the multiplication operator by

$$\mathcal{E}_0(p) = 4(1 - \cos p), \qquad p \in \mathbb{T},$$

and $V_{\mu_1\mu_2}$ is the rank-two perturbation corresponding to on-site and nearest-neighbour interactions.

In terms of the orthonormal functions

$$\alpha_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \alpha_2(p) = \frac{\cos p}{\sqrt{\pi}},$$

the perturbation is represented as

$$V_{\mu_1\mu_2} = \mu_1(\cdot, \alpha_1)\alpha_1 + \mu_2(\cdot, \alpha_2)\alpha_2.$$

Since $V_{\mu_1\mu_2}$ is finite-dimensional, Weyl's theorem implies that

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\mu_1\mu_2}(0)\big) = \sigma\big(H_0(0)\big) = [0, 8].$$

Thus, the lower edge of the essential spectrum is the point 0, and the discrete eigenvalues below the essential spectrum may lie only in $(-\infty, 0)$.

For $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 8]$, the Lippmann–Schwinger principle reduces the eigenvalue problem to the equation

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(z) = 0,$$

where

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(z) = \begin{vmatrix} 1 + \mu_1 a_{11}(z) & \mu_1 a_{12}(z) \\ \mu_2 a_{21}(z) & 1 + \mu_2 a_{22}(z) \end{vmatrix},$$

and

$$a_{ij}(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\alpha_i(q)\alpha_j(q)}{\mathcal{E}_0(q) - z}\, dq, \qquad i, j = 1, 2.$$

Near the lower edge 0, the Fredholm determinant has the asymptotic form

$$\Delta_{\mu_1\mu_2}(z) = S^-(\mu_1, \mu_2)(-z)^{-\frac{1}{2}} + B^-(\mu_1, \mu_2) + o\big((-z)^{\frac{1}{2}}\big), \qquad z \nearrow 0,$$

where

$$S^-(\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mu_1 + 2\mu_2 + \frac{\mu_1\mu_2}{2}\right),$$

and

$$B^-(\mu_1, \mu_2) = 1 - \frac{\mu_2}{2} - \frac{\mu_1\mu_2}{8}.$$

The lower critical curve is determined by the equation

$$S^-(\mu_1, \mu_2) = 0.$$

Equivalently,

$$\mu_2 = \mu_2^-(\mu_1) := -\frac{2\mu_1}{\mu_1 + 4}, \qquad \mu_1 \neq -4.$$

This curve consists of two branches

$$\Gamma_0^- = \left\{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_2 = \mu_2^-(\mu_1),\ \mu_1 > -4\right\},$$

and

$$\Gamma_1^- = \left\{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_2 = \mu_2^-(\mu_1),\ \mu_1 < -4\right\}.$$

The corresponding regions are

$$G_0^- = \left\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_2 > \mu_2^-(\mu_1),\ \mu_1 > -4\right\},$$

$$G_1^- = \left\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_2 < \mu_2^-(\mu_1),\ \mu_1 > -4\right\} \cup \{(-4,\mu_2) : \mu_2\in\mathbb{R}\}$$
$$\cup \left\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_2 > \mu_2^-(\mu_1),\ \mu_1 < -4\right\},$$

and

$$G_2^- = \left\{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 : \mu_2 < \mu_2^-(\mu_1),\ \mu_1 < -4\right\}.$$

Theorem 1. The discrete spectrum of $H_{\mu_1\mu_2}(0)$ in the interval $(-\infty,0)$ is characterized as follows:

(i) If $(\mu_1,\mu_2)\in G_0^-\cup\Gamma_0^-$, then $H_{\mu_1\mu_2}(0)$ has no eigenvalues in $(-\infty,0)$.

(ii) If $(\mu_1,\mu_2)\in G_1^-\cup\Gamma_1^-$, then $H_{\mu_1\mu_2}(0)$ has a unique eigenvalue $E_1^-(\mu_1,\mu_2)\in(-\infty,0)$.

(iii) If $(\mu_1,\mu_2)\in G_2^-$, then $H_{\mu_1\mu_2}(0)$ has exactly two simple eigenvalues $E_1^-(\mu_1,\mu_2), E_2^-(\mu_1,\mu_2)$ in $(-\infty,0)$.

The following result describes the behavior of the eigenvalues near the lower edge 0 of the essential spectrum.

Theorem 2. Let $E_1^-(\mu_1,\mu_2)$ and $E_2^-(\mu_1,\mu_2)$ be the eigenvalues of $H_{\mu_1\mu_2}(0)$ in $(-\infty,0)$, described in Theorem 1. Let

$$(\mu_1^0,\mu_2^0)\in\Gamma_0^-, \qquad (\mu_1^1,\mu_2^1)\in\Gamma_1^-$$

be fixed points on the lower critical curve.

(i) As $(\mu_1,\mu_2)\to(\mu_1^0,\mu_2^0)$ from within G_1^-, the eigenvalue $E_1^-(\mu_1,\mu_2)$ has the asymptotic expansion

$$E_1^-(\mu_1,\mu_2) = -\left[a^-(\mu_1^0,\mu_2^0)(\mu_1-\mu_1^0) + b^-(\mu_1^0,\mu_2^0)(\mu_2-\mu_2^0)\right]^2 + o(\rho_0^2),$$

where

$$\rho_0 = |\mu_1-\mu_1^0| + |\mu_2-\mu_2^0|.$$

(ii) As $(\mu_1,\mu_2)\to(\mu_1^1,\mu_2^1)$ from within G_2^-, the second eigenvalue $E_2^-(\mu_1,\mu_2)$ satisfies

$$E_2^-(\mu_1,\mu_2) = -\left[a^-(\mu_1^1,\mu_2^1)(\mu_1-\mu_1^1) + b^-(\mu_1^1,\mu_2^1)(\mu_2-\mu_2^1)\right]^2 + o(\rho_1^2),$$

where

$$\rho_1 = |\mu_1-\mu_1^1| + |\mu_2-\mu_2^1|.$$

Here

$$a^-(\mu_1,\mu_2) = -\frac{\dfrac{\partial S^-}{\partial\mu_1}(\mu_1,\mu_2)}{B^-(\mu_1,\mu_2)}, \qquad b^-(\mu_1,\mu_2) = -\frac{\dfrac{\partial S^-}{\partial\mu_2}(\mu_1,\mu_2)}{B^-(\mu_1,\mu_2)}.$$

At the points under consideration, $B^-(\mu_1,\mu_2)\neq 0$.

Literature

1. **S. N. Lakaev and E. Özdemir** *The existence and location of eigenvalues of the one particle Hamiltonians on lattices.* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics **45**(6) (2016), 1693–1703.
2. **S.N. Lakaev, I.U. Alladustova** *The exact number of eigenvalues of the discrete Schrödinger operators in one-dimensional case.* Lobachevskii J. Math. -**42** (2021), 1294–1303.
3. **B. A. Lippmann and J. Schwinger** *Variational principles for scattering processes.* Phys. Rev. **79** (1950), 469–480.

MSC2020 35G15

DIRICHLET-TYPE PROBLEM FOR AN ODD-ORDER EQUATION WITH A DISCONTINUOUS COEFFICIENT

Irgashev B. Yu.
University of Business and Science, Namangan, Uzbekistan
bahromirgasev@gmail.com

In the domain $\Omega = \{(x,y)\colon\ -a < x < a,\ 0 < y < 1\}$, $a > 0$, the following problem is considered.

Problem D_ν**.** Find a function $u(x,y) \in C^{2n+1,2m}_{x,y}(\Omega \setminus \{x=0\}) \cap C^{2n,2m-1}_{x,y}(\overline{\Omega})$ with finite one-sided limits $\partial^{2n+1}u/\partial x^{2n+1}$ as $x \to \pm 0$, satisfying the conditions:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{2n+1}u}{\partial x^{2n+1}} + \operatorname{sgn}(x)(-1)^m \dfrac{\partial^{2m}u}{\partial y^{2m}} = 0, \quad x \neq 0; \\ \dfrac{\partial^j u(\pm a,y)}{\partial x^j} = \varphi_j^{\pm}(y), \quad j = 0,\dots,n-1; \\ \dfrac{\partial^\nu u(a,y)}{\partial x^\nu} = (-1)^{\nu+1}\dfrac{\partial^\nu u(-a,y)}{\partial x^\nu}, \quad n \le \nu \le 2n; \\ \dfrac{\partial^s u(+0,y)}{\partial x^s} = \dfrac{\partial^s u(-0,y)}{\partial x^s}, \quad s = 0,\dots,2n; \\ \dfrac{\partial^{2t}u(x,0)}{\partial y^{2t}} = \dfrac{\partial^{2t}u(x,1)}{\partial y^{2t}} = 0, \quad t = 0,\dots,m-1, \end{cases} \tag{1}$$

where $n, m \in \mathbb{N}$, $\gcd(2n+1, 2m) = 1$, $n \le \nu \le 2n$ is a fixed integer parameter, $\varphi_j^+ \equiv \varphi_j$, $\varphi_j^- \equiv \psi_j$ are given sufficiently smooth functions.

The simplest linear analogue of such an equation - $u_{xxx} - u_{yy} = 0$ (the Cattabriga equation [1]) - is generalized by introducing a discontinuous coefficient $sgn(x)$, which gives rise to a class of equations with changing direction of evolution [2]. In the simplest case, the equation under study takes the form $u_{xxx} - \operatorname{sgn}(x)\, u_{yy} = 0$. This equation belongs to the class of parabolic equations with multiple characteristics in Cattabriga's terminology [1]: the characteristics are the straight lines $y = \text{const}$ of multiplicity $2n+1$. Changing the sign of $sgn(x)$ at $x = 0$ does not change the characteristics, but changes the sign of the derivative ∂_y^{2m}; thus, the equation belongs to the class of equations with changing direction of evolution [2]. This makes it similar to the class of equations studied in [2-4].

We seek a solution in the form of a series $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \sin \pi k y$. Substituting into (1) leads to the problem for $X_k(x)$:

$$\begin{cases} X_k^{(2n+1)} + \mu_k^{2n+1} X_k = 0, \quad 0 < x < a; \\ X_k^{(2n+1)} - \mu_k^{2n+1} X_k = 0, \quad -a < x < 0; \\ X_k^{(j)}(a) = \varphi_{jk}, \quad X_k^{(j)}(-a) = \psi_{jk}, \quad j = 0,\dots,n-1; \\ X_k^{(\nu)}(a) = (-1)^{\nu+1} X_k^{(\nu)}(-a); \\ X_k^{(s)}(+0) = X_k^{(s)}(-0), \quad s = 0,\dots,2n, \end{cases} \tag{2}$$

where $\mu_k = (\pi k)^{2m/(2n+1)}$, $\varphi_{jk} = 2\int_0^1 \varphi_j \sin \pi k y\, dy$, $\psi_{jk} = 2\int_0^1 \psi_j \sin \pi k y\, dy$.

Roots $\lambda^{2n+1} + \mu_k^{2n+1} = 0$: $\lambda_s = \mu_k e^{i\theta_s}$, $\theta_s = (2s+1)\pi/(2n+1)$, $s = 0,\dots,2n$. For $s = n$: $\lambda_n = -\mu_k$ (real). For $s = 0,\dots,n-1$: $\alpha_s = \cos\theta_s$, $\beta_s = \sin\theta_s$. Let us denote $T^1_{js}(x) = e^{\mu_k \alpha_s x}\cos(\mu_k \beta_s x + j\theta_s)$, $T^2_{js}(x) = e^{\mu_k \alpha_s x}\sin(\mu_k \beta_s x + j\theta_s)$. Taking into account (1), (2) we obtain a system of algebraic equations

(3).

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{n-1}(c_s^1T_{js}^1(0)+c_s^2T_{js}^2(0))-c_n+\sum\limits_{s=0}^{n-1}(d_s^1T_{js}^1(0)+d_s^2T_{js}^2(0))-d_n=0, \quad j=1,3,\dots,2n-1; \\ \sum\limits_{s=0}^{n-1}(c_s^1T_{js}^1(0)+c_s^2T_{js}^2(0))+c_n-\sum\limits_{s=0}^{n-1}(d_s^1T_{js}^1(0)+d_s^2T_{js}^2(0))-d_n=0, \quad j=0,2,\dots,2n; \\ \sum\limits_{s=0}^{n-1}(c_s^1T_{js}^1(a)+c_s^2T_{js}^2(a))+(-1)^jc_ne^{-\mu_k a}=\dfrac{\varphi_{jk}}{\mu_k^j}, \quad j=0,\dots,n-1; \\ \sum\limits_{s=0}^{n-1}(d_s^1T_{js}^1(a)+d_s^2T_{js}^2(a))+(-1)^jd_ne^{-\mu_k a}=\dfrac{(-1)^j\psi_{jk}}{\mu_k^j}, \quad j=0,\dots,n-1; \\ \sum\limits_{s=0}^{n-1}\left[(c_s^1+d_s^1)T_{\nu s}^1(a)+(c_s^2+d_s^2)T_{\nu s}^2(a)\right]+(-1)^\nu(c_n+d_n)e^{-\mu_k a}=0. \end{cases} \tag{3}$$

Theorem 1 (uniqueness criterion). *A solution to problem D_ν is unique if and only if the fundamental determinant Δ of system (3) does not vanish for any $k\in\mathbb{N}$.*

Lemma 1. *The set of "exceptional"values $a>0$ such that $\Delta=0$ for at least one $k\in\mathbb{N}$ is at most countable. In particular, for "almost all"$a>0$, the solution to problem D_ν is unique.*

Theorem 2 (Asymptotics of the main determinant).

$$\Delta=Me^{\mu_k aA(n)}\sin\left\{\pi\left(C(n)\,k^{\frac{2m}{2n+1}}-\frac{B(n)}{D(n)}\right)\right\}(1+o(1)),$$

where

$$A(n)=\begin{cases} 4\sum\limits_{s=0}^{l-1}\alpha_s+\alpha_l, n=2l; \\ 4\sum\limits_{s=0}^{l-2}\alpha_s+3\alpha_{l-1}, n=2l-1; \\ l=1,2,...; \end{cases} \quad C(n)=\begin{cases} \pi^{\frac{2m}{2n+1}-1}\beta_l a, n=2l; \\ \pi^{\frac{2m}{2n+1}-1}\beta_{l-1} a, n=2l-1; \\ l=1,2,...; \end{cases}$$

$$\frac{B(n)}{D(n)}=\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{(\nu+2l(l-1))}{4l+1}, n=2l; \\ \frac{(4l^2-6l+1)}{2(4l-1)}, n=2l-1; \\ l=1,2,.... \end{cases}$$

Theorem 3 (Estimation of the solution). *Let the conditions of Theorem 1 be satisfied. Then for all $x\in[-a,a]$, $k\in\mathbb{N}$:*

$$\left|X_k^{(j)}(x)\right|\le M\,\frac{k^{j\frac{2m}{2n+1}}\,\Phi_k}{\left|\sin\pi\left(Ck^{\frac{2m}{2n+1}}-\frac{B}{D}\right)\right|}, \quad j=0,1,\dots,2n+1,$$

where $\Phi_k=\max_{0\le j\le n-1}(|\varphi_{jk}|+|\psi_{jk}|)$.

Lemma 2 (Rational case). *Let the following conditions be satisfied: 1) Theorem 1 holds; 2) $C^{2n+1}=\frac{p}{q}\in Q$; 3) $p,q\in P(n)=\left\{\begin{array}{l} p,q\in N,\ (p,q)=1\mid\forall s,t\in N: \\ pD^{2n+1}s^{2m}\ne q(B+Dt)^{2n+1} \end{array}\right\}$.*
Then the relation

$$\left|\sin\pi\left(Ck^{\frac{2m}{2n+1}}-\frac{B}{D}\right)\right|\ge\frac{M}{k^{\frac{4nm}{2n+1}}}, \quad 0<M=\text{const}, \quad \forall k\in N.$$

Lemma 3 (Algebraic case). *Suppose the following conditions are satisfied: a) Theorem 1 holds; b) C^{2n+1} is an algebraic irrational number. Then, for any $\varepsilon>0$, there exists a constant $M=M(C,\varepsilon)>0$ such that:*

$$\left|\sin\left(\pi\left\{Ck^{\frac{2m}{2n+1}}-\frac{B}{D}\right\}\right)\right|\ge\frac{M}{k^{\frac{4nm}{2n+1}+2m+\varepsilon}}, \qquad \forall\,k\in\mathbb{N}.$$

Let's introduce notations that depend on the problem parameters:

$$a_1 = \Big[2m + \frac{4nm}{2n+1}\Big], \quad b_1 = \Big\{2m + \frac{4nm}{2n+1}\Big\},$$

$$a_2 = \Big[4m + \frac{4nm}{2n+1}\Big], \quad b_2 = \Big\{4m + \frac{4nm}{2n+1}\Big\},$$

where $[\cdot]$ - is the integer part, $\{\cdot\}$ - is the fractional part of the number.

Theorem 4 (rational case). *Let the following conditions be satisfied:*

1. *Theorem 1 and Lemma 2 hold.*
2. $\varphi_j, \psi_j \in C^{a_1+1}[0,1]$; $\varphi_j^{(a_1+1)}, \psi_j^{(a_1+1)} \in C^{\alpha}[0,1]$, $b_1 < \alpha \le 1$, $j = 0, \dots, n-1$.
3. $\varphi_j^{(s)}(0) = \varphi_j^{(s)}(1) = \psi_j^{(s)}(0) = \psi_j^{(s)}(1) = 0$, $j = 0, \dots, n-1$, $s = 0, 2, 4, \dots, t$, *where*

$$t = \begin{cases} a_1 - 1, & a_1 \text{ odd}, \\ a_1, & a_1 \text{ even}. \end{cases}$$

Then the series $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \sin \pi k y$ *is a regular solution to problem* D_ν.

Theorem 5 (algebraic case). *Let the following conditions be satisfied:*

1. *Theorem 1 and Lemma 3 hold.*
2. $\varphi_j, \psi_j \in C^{a_2+1}[0,1]$; $\varphi_j^{(a_2+1)}, \psi_j^{(a_2+1)} \in C^{\alpha}[0,1]$, $b_2 < \alpha \le 1$, $j = 0, \dots, n-1$.
3. $\varphi_j^{(s)}(0) = \varphi_j^{(s)}(1) = \psi_j^{(s)}(0) = \psi_j^{(s)}(1) = 0$, $j = 0, \dots, n-1$, $s = 0, 2, 4, \dots, t$, *where*

$$t = \begin{cases} a_2 - 1, & a_2 \text{ odd}, \\ a_2, & a_2 \text{ even}. \end{cases}$$

Then the series $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \sin \pi k y$ *is a regular solution to problem* D_ν.

References

1. **L.Cattabriga** *Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13:2 (1959), p.163-203.
2. **С.А. Терсенов** *Параболические уравнения с меняющимся направлением времени.* Наука, Новосибирск. (1985), 105с.
3. **С.Г. Пятков** *О разрешимости одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени.* Докл. АН СССР, 285:6 (1985), с.1322-1327.
4. **А.И. Кожанов , Е.Е.Мациевская** *Вырождающиеся параболические уравнения с переменным направлением эволюции.* Сиб. электрон. мат. изв., 16, (2019), с.718-731.

UDK 517.955

On the Variable-Coefficient KdV Equation

Iskandarov A.U [1], Rajapov X.O.[2]

[1] Khorezm Mamun Academy, Khiva, Uzbekistan; iskandarovabbosbek@gmail.com

[2]Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University named after Abu Rayhon Beruni, Urgench, Uzbekistan; xursandrajapov599@gmail.com

Nonlinear evolution equations, which occupy a central role in the theory of partial differential equations, provide an analytical framework for describing the dynamics of multicomponent physical systems. In such systems, nonlinear interactions play a crucial role, while the explicit time dependence of the equations enables the modeling of the spontaneous emergence of ordered structures during evolution. These equations are extensively used to study phenomena in which self-organization, soliton formation, turbulence, and other nonlinear effects play a decisive role, far beyond the scope of linear models. The well-known inverse scattering transform [1] (IST) has been widely used to solve nonlinear evolution equations [2-3]. One of the advantages of the IST is that it can be applied to a whole hierarchy of evolution equations associated with a given spectral problem. In general, there are two classes of evolution equations, referred to as the isospectral and non-isospectral hierarchies, respectively, associated with the same spectral problem.

In this paper, using the IST method, we solve the initial-value problem for the following variable-coefficient KdV equation

$$u_t - \gamma(t)u(x_0,t)\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) + 4u_x - (xu_x + 2u) = 0. \tag{1}$$

under the initial condition

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

where the function $\mathfrak{u}_0(x)$, $x \in R$ satisfies the following criteria:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)(|u_0(x)| + |u_{0xx}(x)|)dx < \infty. \tag{3}$$

The solution $\mathfrak{u}(x,t)$ is assumed to exhibit sufficient smoothness and sufficiently rapidly decreasing as $x \to \pm\infty$, quantified by the condition:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\left(|u(x,t)| + \sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx < \infty. \tag{4}$$

The aim of this work is to derive explicit representations for the solution $\mathfrak{u}(x,t)$ of the problem (1)-(4) using the inverse scattering transform (IST) framework method.

Theorem 1. If the functions $\mathfrak{u}(x,t)$ is the solution to the problem (1)-(4), then the scattering data of the equation

$$-\psi_{xx} + u(x,t)\psi = \lambda\psi,$$

vary with t as follows:

$$\frac{dR}{dt} = -8ik\left(\gamma(t)\,u(x_0,t)\,k^2 + 1\right)R, \qquad (\operatorname{Im} k = 0),$$

$$\frac{dc_n}{dt} = \left(\frac{1}{2} + 4k_n - \gamma(t)\,u(x_0,t)\,4k_n^3\right)c_n,$$

$$\frac{dk_n}{dt} = k_n.$$

Literature

1. **Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.** *To the spectral theory of mixed type equations.* Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095вЂ“1097.
2. **Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C.** *Solitons and Nonlinear Wave Equations.* Academic Press, London 1982.
3. **Ablowitz M.J. and Segur H.** *Solitons and the Inverse Scattering Transform.* Philadelphia, SIAM 1987.

UDK 517.95

On the uniqueness classes of solutions of the first boundary value problem for a non-stationary third-order equation of composite type

Khashimov A. R.
Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
abdukomilxashimov@gmail.com

In an unbounded domain $Q = \Omega \times (0,T)$, where $\Omega = \{x : x_1 > 0\}$ and $0 < T < \infty$, consider the equation

$$lAu + Bu = f(x,t) \tag{1}$$

with conditions

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad u\big|_{\{x\in\partial\Omega:\alpha^k(x)\nu_k(x)>0\}\times(0,T)} = 0 \tag{2}$$

Here l is a first-order differential operator; A, B are second-order differential operators.

For problem (1), (2), the following energy estimates are established.

Theorem (Analog of Saint-Venant's principle). Let the function $u(x,t)$ be a generalized solution of equation (1) in a domain $Q_\tau = \{x : 0 < x_1 < \tau\} \times (0,T)$ satisfying conditions (2) and $f(x,t) = 0$ in $Q_\tau = \{x : 0 < x_1 < \tau\} \times (0,T)$. Then for any τ_1, τ_2 such that $0 \le \tau_1 \le \tau_2$, the estimate holds:

$$\int_{Q_{\tau_1}} E(u)\,dxdt \le \Phi^{-1}(\tau_1,\tau_2) \int_{Q_{\tau_2}} E(u)\,dxdt$$

where $E(u)$ is the energy integral, and $\Phi(x_1,\tau_2)$ is the solution of the following problem:

$$\Phi'(x_1,\tau_2) = \mu(x_1)\Phi(x_1,\tau_2), \quad \tau_1 \le x_1 \le \tau_2,$$
$$\Phi(\tau_2,\tau_2) = 1, \quad \Phi'(\tau_2,\tau_2) = 0.$$

Literature

1. **Tao T .** *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis.* American Mathematical Society, 2006. 373 p.
2. **Vallee O, Soares M.** *Airy Functions and Applications to Physics.* London: Imperial College Press, 2010. 280 p.

UDK 517.95

FUNDAMENTAL SOLUTION OF A THIRD-ORDER LINEAR EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Khashimov A. R.[1], Kurbanov O. T.[2]
[1]Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
abdukomilxashimov@gmail.com
[2]Tashkent State University of Economicss, Tashkent, Uzbekistan;
odiljonkurbanov69@gmail.com

This paper is devoted to constructing and justifying a fundamental solution to a linear model third-order partial differential equation of the form

$$u_{xxx} + u_{yyy} - u_t = 0$$

which is a two-dimensional generalization of the classical Airy equation. A combined research method is employed: the Fourier transform with respect to the spatial variables x, y is applied to reduce the original equation to a first-order linear ordinary differential equation with respect to the Fourier transform, after which a self-similar variable of the form $\xi = x \cdot t^{-\frac{1}{3}}$ restores the explicit coordinate form of the solution via the special Airy function Ai. It is proved that the symbol of the differential operator factorizes into

a sum of one-dimensional terms, as a result of which the two-dimensional fundamental solution can be represented as a product of two one-dimensional fundamental solutions of the Airy equation:

$$G(x,y,t) = (3t)^{-\frac{2}{3}} Ai(x(3t)^{-\frac{1}{3}}) Ai(y(3t)^{-\frac{1}{3}}).$$

The following is established: 1) the exact factorization of the operator symbol in Fourier space is proved, entailing the factorization of the fundamental solution into a product of one-dimensional solutions of the Airy equation; 2) a direct analytical verification of the obtained formula is performed by the substitution method using the differential identity for the Airy function, yielding an exact identity satisfaction of the equation; 3) the normalization condition for the solution is numerically confirmed. 4) A significant asymmetry in the asymptotic behavior of the solution with respect to the sign of the spatial coordinates was established: exponential decay for $x > 0, y > 0$ versus oscillatory power-law decay for $x < 0, y < 0$.

The results obtained are of theoretical significance for the classification of odd-order linear dispersion equations and can be used as the kernel of an integral representation of solutions to inhomogeneous problems and the Cauchy problem using the convolution method. A promising direction for further research is to generalize the method to the class of equations of the form $u_t = L_1[u] + L_2[u]$ with operators L_1, L_2 of arbitrary odd order, as well as to analyze the influence of lower-order nonlinear perturbations on the established structure of the fundamental solution using perturbation theory and energy estimates. The results complement the theory of odd-order linear dispersion equations and can serve as a basis for constructing solutions to inhomogeneous problems and Cauchy problems using the convolution method with the found kernel.

Literature

1. **Tao T .** *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis.* American Mathematical Society, 2006. 373 p.
2. **Vallee O, Soares M.** *Airy Functions and Applications to Physics.* London: Imperial College Press, 2010. 280 p.

УДК 517.955

Growing polyharmonic functions and the Cauchy problem for some domains in R^2

Khasanov A. B.[1], Juraeva U. Y.[2]

[1],[2] Samarkand State Universitety named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
ahasanov2002@mail.ru
umida_9202@mail.ru

Let R^2 - two dimensional real Euclidean space, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2), x \in R^2, y \in R^2, x' = (x_1, 0)$, $y' = (y_1, 0), r = |x - y|, s = |x' - y'|$, $\alpha^2 = s$, and D - unbounded domain lying in layer $\{y : y = (y_1, y_2), y_1 \in R, 0 < y_2 < h, h = \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0, \}$ with boundary where $L = \{y : y_2 = 0\}$, $S = \{y : y_2 = f(y_1)\}, f(y_1)$- is a function with a limited partial derivative in the domain.

Problem. Let

$$\Delta^2 u = 0, \ u \in C^4(D), \ y \in D \tag{1}$$

$$u(y) = F_0(y), \ \Delta u(y) = F_1(y), \ y \in S,$$

$$\frac{du(y)}{dn} = G_0(y), \ \frac{du(y)}{dn} = G_1(y), \ y \in S, \tag{2}$$

where $F_i(y), G_i(y)$ given on ∂D continuous functions, n-external normal to ∂D. Restore $u(y)$ in D is required.

This work is devoted to the study Cauchy problem polyharmonic equation of second order. Moreover, we observe extension of polyharmonic function to D, by given values of function and Laplacian of this function and also values of normal derivative of the function and Laplacian on a part of boundary. When considering the problem with respect to the boundary conditions given on part of the boundary, it is

not possible to recover the values of the solution throughout the entire domain for arbitrary initial data. However, if the boundary and initial data are analytic and can be analytically extended into the interior of the domain, such an extension exists and is unique, though it is not stable. Therefore, this type of problem is ill-posed. In 1926, Carleman introduced an integral formula for a class of bounded functions, proposing to modify the Cauchy formula by adding an auxiliary function that depends on a positive parameter. This approach allows, through a limiting process, to attenuate the influence of integrals along the part of the boundary where the function to be extended is not specified. Carleman's research remained largely unpursued for many years, but unstable problems continued to appear in applications. In 1943, Tikhonov identified the fundamental nature of ill-posed problems, emphasizing their practical significance and demonstrating that constraining the solution space to a compact set could stabilize these problems. Based on these developments, Lavrentev introduced the concept of Carleman's function and used it to regularize the solution to ill-posed problems. From 1955 in several works, M.M Lavrentev for some problems of mathematical physics, correctness by A.N.Tixonov pointed out how select class of correctness and prepared steady methods of solving. Using ideas of M.M Lavrentev Sh. Yarmukhamedov constructed (in 1977) explicitly a special fundamental solution for harmonic functions, when D_ρ is a simply connected bounded domain with boundary ∂D_ρ, consisting of the cone surface ∂G_ρ and the smooth part of the surface S lying in $\overline{G_\rho} = G_\rho \cup \partial G_\rho$, where $G_\rho = \{y : y = (y^{'}, y_m), |y^{'}| \leq \tau y_m, \tau = \tan\frac{\pi}{2\rho}, \rho > 1\}$ In 2009,in the work [] obtained the regularization and solvability of the Cauchy problem for polyharmonic equations of n order in certain unbounded domains (for arbitrary odd m).

We will assume that the solution to the problem (1)-(3) exists and is continuously differentiable three times, up to the boundary endpoints, and satisfies a certain growth condition (correctness class) that ensures the uniqueness of the solution.

We specify the function $\Phi_\sigma(y,x)$ by the equality

$$\Phi_\sigma(y,x) = \frac{\exp\left(a\cosh\left(i\rho_1\left(x_2-\frac{h}{2}\right)\right)\right)}{\exp(\sigma x_2 + x_2^2)} \int_{\sqrt{s}}^{\infty} Im\left[\frac{exp\left(\sigma\omega+\omega^2-a\cosh\left(i\rho_1\left(x_2-\frac{h}{2}\right)\right)\right)}{\omega - x_2}\right](u^2-s)du$$

where $\omega = iu + y_2, s > 0, \sigma > 0, a \geq 0, 0 < \rho_1 < \rho < 1$ (for the sake of convenient writing, in what follows, we designate all constant numbers by c_0)

The following propositions hold.

Theorem. *The function $\Phi_\sigma(y,x)$ has the form*

$$\Phi_\sigma(y,x) = c_0(r^2\ln r + G_\sigma(y,x))$$

and is a biharmonic function, where $G_\sigma(y,x)$ is a biharmonic function, in R^2/S with respect to variable y.

Let us introduce the notation

$$A = -\sigma y_2 - y_2^2 + \sigma x_2 + x_2^2 + s + a\cosh(\rho_1 s^2)\cos\left(\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right).$$

Lemma 1. *The function $\Phi_\sigma(y,x)$satisfies the inequalities*

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \leq (\sigma r + 1)\frac{c_0}{\exp A}.$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right| \leq \left((1+\sigma+\sigma^2)(1+r+\frac{1}{r}) + \sigma r^2\right)\frac{c_0}{\exp A}.$$

Lemma 2. *The Laplacian and the normal derivative of the Laplacian of function $\Phi_\sigma(y,x)$* satisfy the inequalities:

$$|\Delta\Phi_\sigma(y,x)| \leq \left((1+\sigma+\sigma^2)(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}) + \sigma r\right)\frac{c_0}{\exp A}.$$

$$\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right| \leq \left((1+\sigma+\sigma^2)(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}) + \sigma + \sigma r + \sigma^2 + \frac{\sigma^3}{r^2}\right)\frac{c_0}{exp\sigma A}.$$

Using the above given lemmas, we can prove the following theorem.

Theorem 2. *Function $\Phi_\sigma(y,x)$, that depends on parameter $\sigma>0$, is Carleman's function for $y\neq x$ for point $x\in D$ and ∂D*

$$\int_{\partial D}\left(|\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|+|\Delta\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|\right)|ds|\leq\frac{C(x)}{\exp(\sigma A)}$$

where C(x) is the polynomial that depends only on x and n is outer normal to boundary ∂D.

Let's designate the biharmonic functions defined in the domain D, $u(y)=v(y_1,y_2)\in C^4(D)\cap C^3(\bar{D})$ by $B_{\rho_2}(D)$,which maintain the condition

$$\sum_{m=0}^{1}(|\Delta^m u(y)|+|\operatorname{grad}\Delta^m u(y)|)\leq c_0\exp(\mathrm{o}(\exp(\rho_2|y'|))),\quad \rho_2<\rho_1,\quad y\in D.$$

According to above results, we prove the following theorem.

Theorem 3. Let the function $u\in B_{\rho_2}(D)$ at any point $y\in\partial D$, and

$$\sum_{m=0}^{1}\left(|\Delta^m u(y)|+\left|\frac{\partial\Delta^m u(y)}{\partial\vec{n}}\right|\right)\leq c_0\exp\left(b\cos\frac{\rho_3(2\eta_2-h)}{2}\exp\rho_3|y'|\right),$$

where $\rho_3<\rho_2<\rho_1<\rho$, then for all x_0 points of the domain D, we have

$$u(x_0)=\sum_{m=0}^{1}\int_{\partial D}\left(\Delta^m\Phi_\sigma(y,x_0)\frac{\partial\Delta^{1-m}u(y)}{\partial\vec{n}}-\Delta^{1-m}y(y)\frac{\partial\Delta^m\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial\vec{n}}\right)ds.$$

Литература

1. **Ярмухамедов Ш.Я.** *Формула Грина в бесконечной области и ее применение.* ДАН СССР. - 1985. - Т. 285. - С. 697–700.

2. **Khasanov A.B., Juraeva U.Yu.** *On the Phragmen–Lindelof Type Theorem for Biharmonic Functions.* J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. - 2025. - Vol. 18, No. 6. - P. 847–858.

3. **Ашурова З.Р., Маллаева Ф.У., Джураева У.Ю., Джураева Н.Ю.** *Теорема единственности для бигармонических функций в трехмерном евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^3$. Chebyshev Sb. - 2025. - Т. 26, № 5. - С. 62–70.

4. **Ашурова З.Р.,Маллаева Ф.У., Джураева Н.Ю., Джураева У.Ю.** *Об одном свойстве бигармонической функции в неограниченной области* $\mathbb{R}^3$. Differential Equations. - 2025. - Т. 61, № 8. - С. 1048–1058.

5. **Хасанов А., Джураева У.** *Интегральное представление для полигармонических функций в двумерном евклидовом пространстве.* Samarkand State Univ. Papers. - 2025.

УДК 517.957

Inverse Spectral Integration of nmKdV–L equation

Khasanov A. B.[1], Abdivokhidov A. A.[2], Eshbekov R. Kh.[3]
Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
[1]ahasanov2002@mail.ru, [2]abdivoxidovazamat@mail.ru, [3]rayxonbek@mail.ru

Using the inverse spectral problem method for the periodic Dirac operator, a number of nonlinear evolution equations in the class of periodic infinite-gap functions are integrated [1-4].

We consider a mixed problem for the negative order of the modified Korteweg-de Vries-Liouville (nmKdV–L) equation of the form

$$\begin{cases}u_{xt}=e^{2u}+u_{xxxt}-(2u_x\mu_{xt})_x,\\ \mu_{xx}=u_x^2,\end{cases}\tag{1}$$

with the conditions

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x+\pi) = u_0(x) \in C^5(\mathbb{R}), \\ u(x,t)\big|_{x=0} = \alpha(t), \quad \mu_x(x,t)\big|_{x=0} = \eta(t), \ u_0(0) = \alpha(0), \\ \big[u_{xt}(x,t) + \mu_{xt}(x,t)\big]\Big|_{x=0} = \zeta(t) \end{cases} \tag{2}$$

in the class of real infinite-gap π-periodic functions in the variable x that satisfy the following smoothness conditions

$$u(x,t) \in C^{4,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \geq 0), \quad \mu(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \geq 0), \tag{3}$$

where $\alpha(t), \eta(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0)$ and $\zeta(t) \in C(t \geq 0)$ are real given bounded functions

In this work, we establish the existence and uniqueness of a global solution $\{u(x,t), \mu_x(x,t), x \in \mathbb{R}, t>0\}$, to the mixed problem (1)–(3) in the class of periodic infinite-gap functions using the Inverse Spectral Problem Method for periodic Dirac operator with shifted argument:

$$\mathfrak{L}(\tau,t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & u'_x(x+\tau,t) \\ u'_x(x+\tau,t) & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y.$$

The main result of the paper is formulated as follows.

Main Theorem. If a periodic infinite-gap function $u_0(x)$ satisfies the condition

$$u_0(x+\pi) = u_0(x), \quad u_0 \in C^5(\mathbb{R}),$$

and the functions $\alpha(t), \beta(t), \zeta(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0)$ are bounded, then there exists a unique global solution $u(x,t)$, $\mu_x(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t>0$, of the mixed problem (1)–(3), which is defined by the following formulas:

$$u(x,t) = \alpha(t) + \int_0^x \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s,t) h_k(\xi(s,t)) \right\} ds,$$

$$\mu_x(x,t) = \beta(t) + \int_0^x u_s^2(s,t) ds.$$

References

1. **Khasanov A.B., Abdivokhidov A.A., Eshbekov R.K.** *Negative Order Modified Korteweg–de Vries–Liouville (nmKdV-L) Equation in the Class of Periodic Infinite-gap Functions.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, 45. - P. 6497–6514.

2. **Khasanov A.B., Eshbekov R.Kh., Khasanov T.G.** *Integration of a non-linear Hirota type equation with additional terms.* Izvestiya: Mathematics, 2025, 89(1). - P. 196–219.

3. **Khasanov A.B., Normurodov K.N., Khudaerov U.O.** *Integrating the modified Korteweg–de Vries–sine–Gordon equation in the class of periodic infinite-gap functions.* Theoretical and Mathematical Physics, 2023, 214. - P. 170–182.

4. **Нормуродов Х.Н., Хасанов А.Б.** *Смешанная задача для нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических бесконечнозонных функций.* Математические заметки, 2025, 117(5). - С. 719–735.

UDC 517.95

On an inverse problem for a Boussinesq-Type differential equation

Khalmukhamedov A. R.[1], Kuchkorov E. I.[2], Bobokhujayeva N. Sh.[3]

[1] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; khalmukhamedov@gmail.com

[2] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; e_kuchkorov@mail.ru

[3] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; nazokatbobokhujayeva@gmail.com

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an arbitrary bounded domain with piecewise smooth boundary $\partial\Omega$, and let $T > 0$. Consider in the cylinder $\Omega \times (0,T)$ the equation

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \nu^2 \Delta u = f(x), \qquad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

where $\nu > 0$ is a parameter.

Let A be a positive self-adjoint extension of the Laplace operator $-\Delta$:

$$Au = -\Delta u, \qquad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

such that

$$(Au, u) \geq \mu(u, u), \qquad \mu > 0, \qquad u \in D(A).$$

We assume that A has a compact inverse A^{-1}. In particular, such a self-adjoint extension can be generated by boundary conditions of the form

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

for suitable functions $\alpha(x)$ and $\beta(x)$.

We consider the nonlocal conditions

$$u(x,0) = u(x,T), \tag{2}$$

$$\int_0^T u(x,t)\,dt = \varphi(x), \tag{3}$$

and the additional condition

$$u(x,t_0) = \psi(x), \qquad 0 < t_0 < T. \tag{4}$$

In the present paper, we study forward and inverse problems for equation (1). In [1]–[3], the third term $-\nu^2\Delta$ of the equation is a positive definite operator, whereas in our case $\nu^2\Delta$ is negative definite. This significantly affects the results.

Definition 1. A function $u(x,t)$ is called a solution of the nonlocal forward problem (1)–(3) if the following conditions hold:

1. $u(\cdot,t) \in D(A)$ for all $t \in (0,T)$, and $u(x,t)$ is continuous in t in the $L_2(\Omega)$-norm;
2. $u(x,t)$ and $Au(x,t)$ are twice continuously differentiable in t on $(0,T)$ in the $L_2(\Omega)$-norm;
3. $u(x,t)$ satisfies equation (1) and the nonlocal conditions (2), (3).

We define a solution of the inverse problem (1)–(4) to be the pair $\{u(x,t), f(x)\}$ determined from the prescribed functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$.

To formulate existence and uniqueness results, we introduce several important parameters. Let λ_k and $v_k(x)$ be the eigenvalues and corresponding eigenfunctions of the self-adjoint operator A:

$$Av_k(x) = \lambda_k v_k(x), \qquad x \in \Omega.$$

By our assumptions,

$$\mu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \to \infty.$$

Set

$$\nu_k = \nu\sqrt{\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}}. \tag{5}$$

For any $\varphi, \psi, f \in L_2(\Omega)$, the spectral decompositions have the form

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \qquad \varphi_k = (\varphi, v_k),$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k v_k(x),\qquad \psi_k=(\psi,v_k),$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k v_k(x),\qquad f_k=(f,v_k).$$

Introduce the following notation:

$$\Lambda_0(\nu):=\left\{\lambda_k\in\mathrm{Sp}(A):\varphi_k+\frac{T}{\nu^2\lambda_k}f_k=0\right\},$$

$$\Lambda_1(\nu):=\left\{\lambda_k\in\mathrm{Sp}(A):\frac{\nu_k T}{2}\cosh\left[\nu_k\left(t_0-\frac{T}{2}\right)\right]-\sinh\frac{\nu_k T}{2}=0\right\}.$$

Obviously, the set $\Lambda_1(\nu)$ is finite, $\dim\Lambda_1(\nu)<\infty$.

We introduce the subspace $L_1(\nu)$ corresponding to $\Lambda_1(\nu)$:

$$L_1(\nu)=\left\{h:\ h(x)=\sum_{\lambda_k\in\Lambda_1(\nu)}(h,v_k)v_k(x)\right\}.$$

Denote by $L_1^{\perp}(\nu)$ the set of functions in $L_2(\Omega)$ orthogonal to $L_1(\nu)$:

$$L_1^{\perp}(\nu)=L_2(\Omega)\ominus L_1(\nu).$$

For the forward problem (1)–(3), the following result is valid.

Theorem 1. Let $\varphi\in D(A)$ and $f\in L_2(\Omega)$. Then the solution of problem (1)–(3) exists and is unique:

$$u(x,t)=\sum_{\lambda_k\notin\Lambda_0(\nu)}\left[\frac{1}{T}\left(1+\frac{A(\nu_k,t)}{\sinh(\nu_k T/2)}\right)\varphi_k+\frac{A(\nu_k,t)}{\sinh(\nu_k T/2)}\frac{f_k}{\nu^2\lambda_k}\right]v_k(x)-\sum_{\lambda_k\in\Lambda_0(\nu)}\frac{f_k}{\nu^2\lambda_k}v_k(x),$$

where

$$A(\nu,t)=\frac{\nu T}{2}\cosh\left[\nu\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]-\sinh\frac{\nu T}{2}.$$

We now present the main results.

Theorem 2. Assume that $\Lambda_1(\nu)=\varnothing$, $A(\nu,t_0)\neq 0$, and $\varphi,\psi\in D(A)$. Then the inverse problem (1)–(4) has a unique solution $\{u(x,t),f(x)\}$, and this solution has the form

$$\sum_{\lambda_k\notin\Lambda_0(\nu)}\left[\frac{A(\nu_k,t)}{A(\nu_k,t_0)}\psi_k+\frac{1}{T}\left(1-\frac{A(\nu_k,t)}{A(\nu_k,t_0)}\right)\varphi_k\right]v_k(x)+\sum_{\lambda_k\in\Lambda_0(\nu)}\psi_k v_k(x).\tag{6}$$

and

$$\begin{aligned}f(x)=&\sum_{\lambda_k\notin\Lambda_0(\nu)}\left[\frac{\sinh(\nu_k T/2)}{A(\nu_k,t_0)}\psi_k-\frac{1}{T}\left(1+\frac{\sinh(\nu_k T/2)}{A(\nu_k,t_0)}\right)\varphi_k\right]\nu^2\lambda_k v_k(x)\\&-\nu^2\sum_{\lambda_k\in\Lambda_0(\nu)}\lambda_k\psi_k v_k(x).\end{aligned}\tag{7}$$

Theorem 3. Assume that $\Lambda_1(\nu)=\varnothing$, $A(\nu,t_0)=0$, and $\varphi,\psi\in D(A^2)$. Then the inverse problem (1)–(4) has a unique solution given by (6)–(7).

Theorem 4. Assume that $\Lambda_1(\nu)\neq\varnothing$, $A(\nu,t_0)\neq 0$, and $\varphi,\psi\in D(A)$. If

$$\psi-\frac{1}{T}\varphi\in L_1^{\perp}(\nu),$$

then the inverse problem (1)–(4) has a solution of the form

$$u(x,t)=\sum_{\lambda_k\notin\Lambda_0(\nu)\cup\Lambda_1(\nu)}\left[\frac{A(\nu_k,t)}{A(\nu_k,t_0)}\psi_k+\frac{1}{T}\left(1-\frac{A(\nu_k,t)}{A(\nu_k,t_0)}\right)\varphi_k\right]v_k(x)+$$

$$+\sum_{\lambda_k\in\Lambda_1(\nu)}\left[\frac{1}{T}\left(1+\frac{A(\nu_k,t)}{\sinh(\nu_kT/2)}\right)\varphi_k+\frac{A(\nu_k,t)}{\sinh(\nu_kT/2)}\frac{g_k}{\nu^2\lambda_k}\right]v_k(x)+\sum_{\lambda_k\in\Lambda_0(\nu)}\psi_kv_k(x), \tag{8}$$

and

$$\begin{aligned}f(x)=&\sum_{\lambda_k\notin\Lambda_0(\nu)\cup\Lambda_1(\nu)}\left[\frac{\sinh(\nu_kT/2)}{A(\nu_k,t_0)}\psi_k-\frac{1}{T}\left(1+\frac{\sinh(\nu_kT/2)}{A(\nu_k,t_0)}\right)\varphi_k\right]\nu^2\lambda_kv_k(x)\\&+\sum_{\lambda_k\in\Lambda_1(\nu)}g_kv_k(x)-\nu^2\sum_{\lambda_k\in\Lambda_0(\nu)}\lambda_k\psi_kv_k(x),\end{aligned} \tag{9}$$

where g_k is an arbitrary real number.

Theorem 5. Assume that $\Lambda_1(\nu)\neq\varnothing$, $A(\nu,t_0)=0$, and $\varphi,\psi\in D(A^2)$. If

$$\psi-\frac{1}{T}\varphi\in L_1^{\perp}(\nu),$$

then problem (1)–(4) has a solution given by (8)–(9).

Note. If $\psi-\frac{1}{T}\varphi\notin L_1^{\perp}(\nu)$, the inverse problem has no solution.

References

1. **Sh. A. Alimov, A. R. Khalmukhamedov.** *On a Non-Local Problem for a Boussinesq Type Differential Equation* ISSN 1995-0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 4, 916-923.

2. **A. R. Khalmukhamedov and E. I. Kuchkorov.** *On the solvability of a nonlocal problem for a Boussinesq type differential equation* Russ. Math. (Iz. VUZ) 67 (10), 54-62 (2023).

3. **A. R. Khalmukhamedov and E. I. Kuchkorov.** *On the solvability of a nonlocal problem for a Boussinesq type inhomogeneous differential equation* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2026, Vol. 47, No. 4, pp. 1632-1640

UDC 517.956

Blow-up and global existence results for Semilinear Damped Wave Equations with Forcing Terms in Exterior Domains

Mamanazarov A.O.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;
mamanazarovaz1992@gmail.com

In the present talk, we consider the existence and nonexistence of global weak solutions for the following non-homogeneous semilinear damped wave equation with a forcing term formulated in exterior domains

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u+u_t=|u|^p+f(x), & \text{in } D^c\times(0,\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x) & \text{in } D^c,\end{cases} \tag{1}$$

where p, T are given positive constants such that $p>1$, Δ is the Laplace operator, and $D=\overline{B(0,1)}$ denotes the closed unit ball, and D^c is its complement in $\mathbb{R}^N, N>1$.

Problem (1) is studied subject to one of the following boundary conditions:

Dirichlet boundary condition:

$$u(x,t)=0,\ \text{in } \partial D\times(0,\infty); \tag{2}$$

Neumann boundary condition:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}=0,\ \text{in } \partial D\times(0,\infty); \tag{3}$$

Robin boundary condition:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}+\alpha u(x,t)=0,\ \text{in } \partial D\times(0,\infty), \tag{4}$$

where $\alpha > 0$ and n denotes the outward unit normal vector to ∂D.

The term u_t in problem (1) represents damping and describes energy dissipation in the system. Damped wave equations arise in various physical applications, including electrical signal propagation, viscoelasticity, acoustics, and wave propagation in dissipative media. They also have important geophysical applications, such as seismic imaging, reservoir prediction, lithological identification, and the analysis of attenuation and dispersion in porous and fluid-saturated media. The forcing term $f(x)$ may represent an external source, localized excitation, or stationary energy supply.

Throughout the paper, we shall refer to the pairs $\{(1),(2)\}$, $\{(1),(3)\}$, and $\{(1),(4)\}$ as Problems I, II, and III, respectively.

Definition 1. Let $u_0,\, u_1, f \in L^1_{\mathrm{loc}}\,(D^c)$. We say that u is a local weak solution to Problem I if there exists $0 < T < \infty$, with $Q = D^c \times (0,T)$, such that $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(Q)$, and satisfies

$$\begin{aligned}\int_Q |u(x,t)|^p \varphi_1(x,t)\,dxdt + \int_Q f(x)\varphi_1(x,t)\,dxdt + \int_{D^c} (u_0(x)+u_1(x))\varphi_1(x,0)\,dx \\ - \int_{D^c} u_0(x)\partial_t\varphi_1(x,0)dx = \int_Q u(x,t)\,\partial_{tt}\varphi_1(x,t)\,dxdt \\ - \int_Q u(x,t)\,\partial_t\varphi_1(x,t)\,dxdt - \int_Q u(x,t)\,\Delta\varphi_1(x,t)\,dxdt\end{aligned} \tag{6}$$

for every test function $\varphi_1 \in C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q}) \cap C^{2,2}_{x,t}(Q)$ such that

$$\varphi_1(x,T) = \partial_t\varphi_1(x,T) = 0, \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{on} \quad \partial D,$$

and

$$\exists R > 1 \text{ such that } \varphi_1(x,t) = 0 \quad \text{for all} \quad t \in (0,T) \quad \text{whenever} \quad |x| \geq R.$$

Definition 2. Let $u_0,\, u_1, f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D^c)$. We say that u is a local weak solution to Problem II if there exists $0 < T < \infty$, with $Q = D^c \times (0,T)$, such that $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(Q)$, and satisfies the identity (6), with φ_1 replaced by φ_2, for every test function

$$\varphi_2 \in C^{1,1}_{x,t}(\bar{Q}) \cap C^{2,2}_{x,t}(Q)$$

such that

$$\varphi_2(x,T) = \partial_t\varphi_2(x,T) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial D,$$

and

$$\exists\, R > 1 \text{ such that } \varphi_2(x,t) = 0 \quad \text{for all } t \in (0,T) \text{ whenever } |x| \geq R.$$

Definition 3. Let $u_0,\, u_1, f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D^c)$. We say that u is a local weak solution to Problem III if there exists $0 < T < \infty$, with $Q = D^c \times (0,T)$, such that $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(Q)$, and satisfies the identity (6), with φ_1 replaced by φ_3, for every test function

$$\varphi_3 \in C^{1,1}_{x,t}(\bar{Q}) \cap C^{2,2}_{x,t}(Q)$$

such that

$$\varphi_3(x,T) = \partial_t\varphi_3(x,T) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} + \alpha\varphi_3 = 0 \quad \text{on } \partial D,$$

and

$$\exists\, R > 1 \text{ such that } \varphi_3(x,t) = 0 \quad \text{for all } t \in (0,T) \text{ whenever } |x| \geq R.$$

We note that if $T > 0$ can be chosen arbitrarily in Definitions 1, 2, and 3, then u is called a global weak solution to the corresponding problems.

Now, we formulate our main results:

Theorem 1. Let $Hu_0, Hu_1, Hf \in L^1(D^c)$ and $f \not\equiv 0$. Assume that

$$\int_{D^c} H(x)f(x)\,dx > 0,$$

where

$$H(x) = \begin{cases} \ln|x|, & N = 2, \\ 1 - |x|^{2-N}, & N \geq 3, \end{cases}$$

is the harmonic function satisfying

$$\Delta H = 0 \quad \text{in } D^c, \qquad H = 0 \quad \text{on } \partial D.$$

Then the following assertions hold:

(i) If $N = 2$, then Problem I admits no global weak solution for every $p > 1$.

(ii) Let $N \geq 3$. If $1 < p \leq \frac{N}{N-2}$, then Problem I admits no global weak solution.

(iii) If $p > \frac{N}{N-2}$, then, for every sufficiently small nonnegative forcing term f, there exists a positive stationary weak solution of Problem I. Consequently, choosing

$$u_0 = u_{stat}, \qquad u_1 \equiv 0,$$

where u_{stat} denotes the stationary solution, Problem I admits a positive global-in-time weak solution.

Theorem 2. Let $u_0, u_1, f \in L^1(D^c)$ and $f \not\equiv 0$. Assume that

$$\int_{D^c} f(x)\,dx > 0.$$

Then the following assertions hold:

(i) If $N = 2$, then Problem II admits no global weak solution for every $p > 1$.

(ii) Let $N \geq 3$. If $1 < p \leq \frac{N}{N-2}$, then Problem II admits no global weak solution.

(iii) If $p > \frac{N}{N-2}$, $f \geq 0$ is sufficiently small, and $u_1 \equiv 0$, then there exists a positive stationary solution u_{stat} of Problem II. Consequently, choosing $u_0 = u_{stat}$, Problem II admits a positive global-in-time weak solution.

Theorem 3. Let Gu_0, Gu_1, $Gf \in L^1(D^c)$ and $f \not\equiv 0$. Assume that

$$\int_{D^c} G(x) f(x)\,dx > 0,$$

where

$$G(x) = \begin{cases} \ln|x| + \dfrac{1}{\alpha}, & N = 2, \\ \dfrac{N-2+\alpha}{\alpha} - |x|^{2-N}, & N \geq 3, \end{cases}$$

is the harmonic function satisfying

$$\Delta G = 0 \quad \text{in } D^c, \qquad \frac{\partial G}{\partial n} + \alpha G = 0 \quad \text{on } \partial D.$$

Then the following assertions hold:

(i) If $N = 2$, then Problem III admits no global weak solution for every $p > 1$.

(ii) Let $N \geq 3$. If $1 < p \leq \frac{N}{N-2}$, then Problem III admits no global weak solution.

(iii) If $p > \frac{N}{N-2}$, $f \geq 0$ is sufficiently small, and $u_1 \equiv 0$, then there exists a positive stationary solution u_{stat} of Problem III. Hence, $u(x,t) \equiv u_{stat}(x)$ is a positive global-in-time weak solution of Problem III.

Remark. Part (iii) of Theorems 1–3 follows from the existence theory for the corresponding stationary elliptic problems. More precisely, adapting the arguments developed in [1],[2], one proves the existence of a positive stationary solution for sufficiently small nonnegative forcing terms. Taking this stationary solution as the initial displacement and choosing $u_1 \equiv 0$ yields a positive global-in-time weak solution of the corresponding damped wave equation.

References

1. **Tobakhanov, N.N., Torebek, B.B.** *On the critical behavior for the semilinear biharmonic heat equation with forcing term in exterior domain.* Journal of Differential Equations. 451, 113758, 2026.
2. **Jleli, M., Samet, B.** *New blow-up results for nonlinear boundary value problems in exterior domains.* Nonlinear Anal. 178, 348–365, 2019.

УДК 517.95

TO‘RTINCHI TARTIBLI KARRALI XARAKTERISTIKALI BUZILUVCHI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING YAGONALIGI HAQIDA

Meliqo‘ziyeva D. M.
Namangan davlat texnika universiteti, Namangan, O‘zbekiston;
meliquziyevadilshoda@gmail.com.

Xususiy hosilali tenglamalar nazariyasida buzilish va singulyar tenglamalar uchun masalalarni o‘rganish bo‘yicha A.V. Bitsadze , M.S. Salaxitdinov , T.D.Djurayev, M.M. Smirnov kabi olimlarning fundamental ishlari asosiy poydevor bo‘lib xizmat qilgan. Keyinchalik yuqori tartibli va buziladigan differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar I.E. Egorov, S.G.Pyatkov, S.V. Popov [1], E.I. Moiseev [2], Yu.P.Apakov va B.Yu.Irgashev [3] maqolalarida o‘rganilgan. Shunga qaramasdan, to‘rtinchi tartibli karrali xarakteristikali buziluvchi tenglamalarga chegaraviy masalalarni o‘rganish dolzarb sanaladi.

$D = \{(x,y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ sohada quyidagi

$$L[u(x,y)] = u_{xxxx}(x,y) - y^m u_{yyy}(x,y) = 0, \quad 0 < m < 1 \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz. Bu yerda $p, q > 0$.

A **masala.** D sohada $u(x,y) \in C^{4,3}_{x,y}(D) \cap C^{3,2}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$ sinfga tegishli (1) tenglamani va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechim topilsin:

$$u(0,y) = u_x(0,y) = u(p,y) = u_x(p,y) = 0, \quad 0 \le y \le q, \tag{2}$$

$$u_y(x,0) = \psi_1(x), \quad u_{yy}(x,0) = \psi_2(x), \quad u_{yy}(x,q) = \psi_3(x), \quad 0 \le x \le p, \tag{3}$$

$\psi_i(x), \ \ i = \overline{1,3}$ – esa berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Teorema. Agar A masala yechimga ega bo‘lsa u yagonadir.

Isboti. Teskarisidan faraz qilaylik, A masalaning ikkita $u_1(x,y)$ va $u_2(x,y)$ yechimi bo‘lsin, u holda $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ funksiya (1) tenglamani bir jinsli chegaraviy shartlar bilan $(\psi_i(x) \equiv 0)$ qanoatlantiradi. $\overline{D}$ yopiq sohada $u(x,y) \equiv 0$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$$y^{-m} u L[u] = 0,$$

yoki

$$y^{-m}\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot u_{xxx} - u_x u_{xx}) + y^{-m} u_{xx}^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(-u u_{yy} + \frac{1}{2}u_y^2\right) = 0, \tag{4}$$

ayniyat o‘rinli.

(4) ayniyatni $D_\varepsilon = \{(x,y) : \ 0 < x < p, \quad \varepsilon < y < q\}, \quad \varepsilon > 0$ sohada integrallaymiz, Grin formulasidan foydalanib,

$$\int_\varepsilon^q y^{-m}\left[u(p,y)\,u_{xxx}(p,y) - u_x(p,y)\,u_{xx}(p,y)\right]dy -$$
$$-\int_\varepsilon^q y^{-m}\left[u(0,y)\,u_{xxx}(0,y) - u_x(0,y)\,u_{xx}(0,y)\right]dy + \int_\varepsilon^q\int_0^p y^{-m} u_{xx}^2 dx dy +$$
$$+\int_0^p \left(-u(x,q)\,u_{yy}(x,q) + u(x,\varepsilon)\,u_{yy}(x,\varepsilon)\right)dx +$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^p \left(u_y^2(x,q) - u_y^2(x,\varepsilon)\right)dx = 0.$$

(2) chegaraviy shartni hisobga olib,

$$\int_{\varepsilon}^{q}\int_{0}^{p} y^{-m}u_{xx}^{2}dxdy+\int_{0}^{p}\left(-u\left(x,q\right)u_{yy}\left(x,q\right)+u\left(x,\varepsilon\right)u_{yy}\left(x,\varepsilon\right)\right)dx+ \\ +\frac{1}{2}\int_{0}^{p}\left(u_{y}^{2}\left(x,q\right)-u_{y}^{2}\left(x,\varepsilon\right)\right)dx=0. \tag{5}$$

Endi $\varepsilon \to +0$ limitni qaraymiz, masala shartiga ko‘ra $u\left(x,y\right) \in C_{x,y}^{3,2}\left(\overline{D}\right)$ bo‘lgani sababli, $u\left(x,y\right),\ u_{y}\left(x,y\right),\ u_{yy}\left(x,y\right)$ funksiyalar uzluksizdir. Natijada $\varepsilon \to +0$ da (5) dan

$$\iint_{D} y^{-m}u_{xx}^{2}dxdy+\frac{1}{2}\int_{0}^{p}u_{y}^{2}\left(x,q\right)dx=0 \tag{6}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $0<m<1$ shartidan $y^{-m}>0,\ y\in(0,q)$ hamda

$$\int_{0}^{q} y^{-m}dy=\frac{q^{1-m}}{1-m}<\infty.$$

Demak, (6) tenglikdagi ikkala qo‘shiluvchi ham manfiy emas. Ularning yig‘indisi nolga teng bo‘lganligi sababli 1-qo‘shiluvchidan $u_{xx}(x,y)\equiv 0$. Bundan $u(x,y)=f_1(y)\cdot x+f_2(y)$. (2) chegaraviy shartni hisobga olib, $u(0,y)=0\Rightarrow f_2(y)=0$, $u(p,y)=0\Rightarrow f_1(y)\cdot p=0\Rightarrow f_1(y)=0$ (chunki $p>0$) $u(x,y)\equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

Adabiyotlar

1. **Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В.** *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка.* -Новосибирск: ВЦ СО РАН, -1995. - 133 с.
2. **Моисеев Е.И.** *О решении методом Фурье краевых задач для уравнений смешанного типа.* - Дифференциальные уравнения, 1990 Т.26, -1, С. 92-105.
3. **Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю.** *Краевая задача в бесконечной области для уравнения третьего порядка, имеющего вырождение первого рода.* Дифференциальные уравнения и процессы управления. -Санкт-Петербург, 2008. -4. - С. 41–50.

UDK 511.92

Uch o’lchamli uchburchakli panjaradagi diskret Shredinger operatori xos qiymatlari haqida

Muminov M. I.[1,2], Jumayeva G. A.[3]
[1]Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O’zbekiston;
[2]O’zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Samarqand bo’limi, Samarqand, O’zbekiston;
mimuminov@mail.ru
[3]Samarqand davlat pedagogika instituti, Samarqand, O’zbekiston;
jumayevaguljahon725gmail.com

$L_2(\mathbb{T}^3)$ orqali $\mathbb{T}^3=[-\pi,\pi]^3$ da aniqlangan, kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosini belgilaymiz. Uchburchakli panjarada diskret Shredinger operatori $L_2(\mathbb{T}^3)\to L_2(\mathbb{T}^3)$ fazoda quyidagi formula orqali aniqlanadi [1]:

$$H=H_0+\mu V, \tag{1}$$

bu yerda

$$(H_0f)(x)=\varepsilon(x)f(x),\quad (Vf)(x)=\int_{\mathbb{T}^3} v(x-s)f(s)ds,$$

hamda

$$\varepsilon(x) = -\frac{1}{6}\Big(\sum_{i=1}^{3}\cos x_i + \sum_{i<j}^{3}\cos(x_i - x_j)\Big),$$

$$v(x-s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k(x_1 - s_1), \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty, \quad a_k > 0.$$

Ma'lumki, H operator $L_2(\mathbb{T}^3)$ fazoda chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operatordir. Muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga asosan H operatorning $\sigma_{ess}(H)$ muhim spektri kompakt V qo'zg'alishda o'zgarmaydi va qo'zg'almas H_0 operatorning spektri $\sigma(H_0)$ bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, $\sigma_{ess}(H)$ muhim spektr $\varepsilon(x)$ funksiyaning qiymatlar to'plamidan iborat bo'ladi, ya'ni:

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0) = [m, M],$$

$$m = min(\varepsilon(x)) = -1 = \varepsilon(0), \quad M = max(\varepsilon(x)) = \frac{1}{3} = \varepsilon(p)\Big|_L, \quad L = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

bu yerda

$$\gamma_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = \pi, \quad x_2 = \pi + x_3\},$$
$$\gamma_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = \pi + x_3, \quad x_2 = \pi\},$$
$$\gamma_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = \pi + x_2, \quad x_3 = \pi\}.$$

$L_2^e(\mathbb{T}^3)$ va $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ orqali mos ravishda $L_2(\mathbb{T}^3)$ fazodagi juft va toq funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Ma'lumki, bu to'plamlar $L_2(\mathbb{T}^3)$ fazoda qism fazo tashkil etadi.

Lemma. H operator $L_2^e(\mathbb{T}^3)$ va $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ fazolarga nisbatan invariant va bu fazolarda mos ravishda quyidagi ko'rinishda ta'sir qiladi:

$$H_e = H_0 + \mu V^e, \quad H_o = H_0 + \mu V^o,$$

bu yerda

$$(V^e f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx_1 \int_{\mathbb{T}^3} \cos ks_1 f(s)ds,$$

$$(V^o f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx_1 \int_{\mathbb{T}^3} \sin ks_1 f(s)ds.$$

Asosiy natija quyidagi teoremadan iborat.

Teorema. Ixtiyoriy $\mu > 0$ uchun H_e operator $(\frac{1}{3}, \infty)$ oraliqda cheksiz ta xos qiymatga ega bo'ladi. Quyidagi operatorni kiritamiz:

$$Wf(x) = \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}[\mu_1 \cos k(x_1 - s_1) + \mu_2 \cos k(x_2 - s_2) + \mu_3 \cos k(x_3 - s_3)]f(s)ds.$$

Natija. $H = H_0 + W$ operator ixtiyoriy $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3_+$ uchun $(\frac{1}{3}, \infty)$ oraliqda cheksiz ta xos qiymatga ega bo'ladi.

Literature

1. **Ando K., Kazunori, Hiroshi Isozaki, Hisashi Morioka** *Spectral properties of Schrödinger operators on perturbed lattices.* Annales Henri Poincaré, Springer International Publishing. -**17** 2016.

УДК 517.958

Solvability of the initial-boundary value problem for a fourth-order differential equation

Odinaev R.R. [1]
[1]**Bukhara State University, 200100, 11 M. Ikbal St. Bukhara, Uzbekistan**
odinayevrashid@mail.ru

Abstract

We study the solvability of the initial-boundary value problem for a fourth-order differential equation. The solution is constructed by the Fourier method using the eigenfunctions corresponding to the boundary conditions. This reduces the original fourth-order problem to a second-order equation with conditions involving higher-order derivatives. For the resulting formulation, we derive an equivalent second-order Volterra integral equation. Applying standard results from the theory of integral equations, we prove that this Volterra equation admits a solution. Finally, under appropriate smoothness assumptions on the given data, we conclude that the initial–boundary value problem possesses a classical solution.

Keywords: Integral equation, Existence, uniqueness, Fourier method, spectral problem.

We consider the following equation

$$u_{tt} + u_{xxxx} + q(t)u = f(x,t), \tag{1}$$

in the domain $D := \{(x,t);\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le t \le T\}$ with initial

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^{k+1}}(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where $k \ge 1$ is a fixed integer and $T > 0$ is a given number .

In the problem (1)–(3), it is required to find a function $u(x,t)$ satisfying relations (1)–(3) and the condition

$$u(x,t) \in C^{4,k+1}_{x,t}(D),$$

for sufficiently smooth functions $q(t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

We impose the following conditions on the functions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(t)$ and $f(x,t)$:

(A1) $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$,

(A2) $\psi(x) \in C[0,1]$, $\psi'(x) \in L_2(0,1)$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$,

(A3) $f(x,t) \in C^{2,k+1}_{x,t}(D)$, $f_{xxx}(\cdot,t) \in L_2(0,1)$, $f(0,t) = f(1,t) = f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t) = 0$,

(A4) $q(t) \in C^{(k+1)}[0,T]$, $q^{(j)}(0) = 0$, $j = 0,1,\dots,k$.

Lemma 1. *Under the conditions* $(A1) - (A3)$ *one has the relations*

$$\varphi_n = -\frac{1}{\mu_n^3}\varphi_n^{(3)}, \quad \psi_n = \frac{1}{\mu_n}\psi_n^{(1)}, \quad f_n(t) = -\frac{1}{\mu_n^3} f_{n,xxx}(t), \tag{4}$$

where

$$\varphi_n^{(3)} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi^{(3)}(x)\cos\mu_n x\,dx,$$

$$\psi_n^{(1)} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi'(x)\cos\mu_n x\,dx,$$

$$f_{n,xxx}(t) = \sqrt{2}\int_0^1 f_{xxx}(x,t)\cos\mu_n x\,dx,$$

with the estimates

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(3)}|^2 \le \|\varphi^{(3)}\|^2_{L_2(0,1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n^{(1)}|^2 \le \|\psi'\|^2_{L_2(0,1)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n,xxx}(t)|^2 \le \|f_{xxx}\|^2_{C([0,T],L_2(0,1))}. \tag{5}$$

Integrating by parts one times in the integrals for ψ_n and three times in the integrals for φ_n and $f_n(t)$ and taking into account the assumptions of Lemma 1, we obtain relation (4). Inequalities (5) follow from Bessel's inequality applied to the Fourier coefficients of the functions $\varphi^{(3)}(x)$, $\psi'(x)$, and $f_{xxx}(x,t)$ with respect to the cosine system $\{1, \sqrt{2}\cos(\mu_n x)\}$ on $[0,1]$.

Theorem *Let the functions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(t)$ and $f(x,t)$ satisfy the conditions of $(A1)-(A4)$, then the initial-boundary value problem (1)–(3) has a unique solution which can be represented by formula*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x), \tag{6}$$

with coefficients

$$u_n(t) = \frac{\varphi_n}{\mu_n^{2k}}\cos\left(\mu_n^2 t - \frac{\pi k}{2}\right) + \frac{\psi_n}{\mu_n^{2k+2}}\sin\left(\mu_n^2 t - \frac{\pi k}{2}\right)$$
$$- \sum_{i=0}^{[\frac{k+1}{2}]-1}(-1)^i\mu_n^{4i-2k-2}\ f_n^{(k-1-2i)}(0)\sin\left(\mu_n^2 t - \frac{\pi k}{2}\right)$$
$$- \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]-1}(-1)^i\mu_n^{4i-2k}\ f_n^{(k-2-2i)}(0)\cos\left(\mu_n^2 t - \frac{\pi k}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{\mu_n^2}\int_0^t f_n(t-\tau)\sin\mu_n^2\tau d\tau - \frac{1}{\mu_n^2}\int_0^t q(t-\tau)u_n(t-\tau)\sin\mu_n^2\tau d\tau.$$

Conclusion

We proved the existence and uniqueness of a classical solution to the problem (1)–(3). Using the Fourier method with eigenfunctions of the corresponding boundary-value spectral problem, the PDE is reduced to a system of Volterra integral equations for the Fourier coefficients. By successive approximations we obtain convergence and the required estimates, which justify termwise differentiation. Under the stated smoothness and compatibility assumptions on $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(t)$ and $f(x,t)$ the solution satisfies $u(x,t) \in C^{4,k+1}_{x,t}(D)$.

References

1. **Strutt J., Rayleigh B.** *The Theory of Sound.* London: Macmillan, 1877. Vol. 1. Translated under the title *Teoriya zvuka.* Moscow: Gosudarstv. Izdat. Tekhn.-Teor. Lit., 1955.
2. **Tikhonov A.N., Samarskii A.A.** *Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of Mathematical Physics).* Moscow: Nauka, 1966.
3. **Durdiev U.D.** Inverse problem of determining an unknown coefficient in the beam vibration equation. *Differential Equations* 58, 37–44 (2022). DOI: 10.1134/S0012266122010050.

UDK 517.955

A CAUCHY PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER EQUATION INVOLVING THE D'ALAMBERT OPERATOR

Oripov Sh. A.[1], Abdullayeva Kh. A.[2]
[1,2]Fergana state university, Fergana, Uzbekistan;
shoripov1991@gmail.com
ahurriyatxon@gmail.com

In the theory of partial differential equations, the study of boundary and initial-boundary value problems for high-order hyperbolic equations represents one of the crucial and relevant research directions. In particular, high-order models involving the classical d'Alembert (wave) operator and the Klein-Gordon operator are widely applied in the mathematical modeling of various practical problems in continuum mechanics, acoustics, elasticity theory, and quantum field theory.

In this work, the Cauchy problem is studied for the fourth-order partial differential equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega \tag{1}$$

involving the D'Alembert operator in the upper half-plane $\Omega = \{(x,y) : x \in R, y > 0\}$, where λ is a real number.

Cauchy problem. Find a solution of equation (1) defined in the domain Ω and satisfying the following conditions:

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_y(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_{yy}(x,0) = \varphi_2(x), \quad u_{yyy}(x,0) = \varphi_3(x), \tag{2}$$

where $\varphi_k(x), (k = 0,1,2,3)$ are given smooth functions.

This problem is solved by reducing it to a system of second-order equations. The integral form of the solution is found.

Reference

1. **Salakhiddinov M.S., Urinov A.K.** *Degenerate differential equations of hyperbolic type.* Fergana. - 2005.
2. **Dzhuraev T.D., Sopuev A.** *On the theory of fourth-order partial differential equations.* Tashkent: FAN. - 2000. - 144 p.
1. **Karimov Sh.T., Oripov Sh.A.** *Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation of the fourth order with the Bessel operator by the method of transmutation operators.* // BoletГn de la Sociedad Matemtica Mexicana. 2023. Vol. 29. Issue 2. Article number 28. - pp. 1-15.

УДК 517.984

On eigenfunction expansions of continuous functions associated with B-elliptic operators

Pirmatov Sh.T.
Tashkent State Technical University
shamshod@rambler.ru

Denote by the symbol R_N^+ the half-space of points (x', x_N), where $x' = (x_1, x_2, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ and $x_N > 0$.

Let a bounded domain Ω^+ with a smooth boundary Γ be located in the half-space R_N^+ and be adjacent to the hyperplane $x_N = 0$. The part of the boundary Γ which is located in R_N^+, denote by Γ^+, and the part of the boundary Γ lying on the hyperplane $x_N = 0$ denote by Γ^0.

In the domain Ω^+ consider a singular Bessel type elliptic differential operator of the form

$$\Delta_B = \frac{1}{x_N^k}\frac{\partial}{\partial x_N} x_N^k \frac{\partial}{\partial x_N} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

where k is a fixed positive number. The theory of boundary value problems for such operators and their spectral properties were studied in detail by I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov (see monographs [1] and [2]).

The domain of the operator Δ_B is the set of functions $u \in C_0^\infty(\Omega^+ \bigcup \Gamma^0)$ satisfying the condition

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} \;=\; 0, \quad x \in \Gamma^0. \tag{2}$$

Denote by the symbol A an arbitrary positive self-adjoint extension in $L_{2,k}(\Omega^+)$ of the operator $(-\Delta_B)$ (see [3], Chapter XII). The unit decomposition corresponding to the operator A is denoted by $\{E_\lambda\}$.

According to L. Garding's theorem, the orthoprojector E_λ is an integral operator whose kernel is $\theta(x, y, \lambda)$ is called the spectral function of the operator A (see [3], Chapter XIV). For any function $f \in L_2(\Omega^+)$ its spectral decomposition $E_\lambda f$ is represented as

$$E_\lambda f(x) = \int\limits_{\Omega^+} \theta(x, y, \lambda) f(y) y_N^k dy. \tag{3}$$

For any $s \geq 0$, we introduce the Riesz means of order s

$$E_\lambda^s = \int\limits_0^\lambda (1 - t/\lambda)^s dE_t.$$

In this paper, we study the Riesz means $E_\lambda^s f$ of spectral decompositions of functions belonging to the space $L_{2,k}(\Omega^+)$ and continuous in the domain $\Omega^+ \cup \Gamma^0$. We show that the effect of accelerating the growth of the spectral function discovered by V. V. Katrakhov and its refinement obtained in [4] make it possible to find the exact conditions for the Riesz summability of arbitrary functions from the mentioned class at each point of the singular part of the Γ^0 boundary of the Γ region Ω^+.

We will say that the compact $K \subset \Gamma^0$ lies inside Γ^0 if $\mathrm{dis}\{K, \Gamma^+\} > 0$.

The main purpose of this article is to prove the following theorems.

Theorem 1. *Let the condition*

$$s \;>\; \frac{N + k - 1}{2} \tag{4}$$

be fulfilled.

Then for any continuous in the domain of $\Omega^+ \cup \Gamma^0$ function $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$ uniformly on each compact K lying inside Γ^0, the equality holds

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda^s f(x) \;=\; f(x).$$

Theorem 2. *Let x be an arbitrary point lying inside Γ^0, and let the equality*

$$s \;=\; \frac{N + k - 1}{2} \tag{5}$$

Then there is a function $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$ that is continuous in the domain of $\Omega^+ \cup \Gamma^0$ and such that

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} E_\lambda^s f(x) \;=\; +\infty.$$

In the case of the Laplace operator (i.e., for $k = 0$), a similar result for expansions into the N-fold Fourier integral is classical and was obtained by S. Bochner in [5]. In this regard, the exponent $s = (N-1)/2$ was called critical (see [6], Chapter VII, Sec. 2). Further, this result was extended sequentially for the Laplace operator in an arbitrary domain, for the Schrödinger operator, for the general elliptic operator of the second order and, finally, in in the works of L. Hörmander [7] and [8] for an elliptic operator of arbitrary order with smooth coefficients. For the corresponding bibliography, see the article [8], as well as in the review papers [9] and [10].

Theorems 1 and 2 allow us to assert that for spectral expansions associated with B-elliptic operators, the critical exponent at the boundary of the singularity is determined by equality (5).

Note that in [11], results of the opposite type were obtained, namely, it was proved that the convergence of the Riesz means of the spectral decomposition at some point $x \in \Gamma^0$ implies generalized continuity of the decomposed function at this point.

Литература

1. **Kipriyanov I.A.** *Singular Elliptic Boundary Value Problems.* Moscow, (1997). (Russian)
2. **Katrakhov V. V., Sitnik S. M.** *Method of transformation operators and boundary-value problems for singular elliptic equations*, Sovr. Mat., Fund. Napravl,**64** (2). 211–426 (2018).
3. **Dunford N. and Schwartz J. T.** *Linear Operators, Part II, Spectral Theory.* Interscience Publishers, NY-London, (1963).
4. **Kipriyanova N.I.** *Asymptotics of the spectral function of singular differential operators*, Dokl.AN SSSR **239:3** 523–525 (1978).
5. **Bochner S.** *Summation of multiple Fourier series by spherical means* Amer. Math. Soc. 40, 175–207(1936).
6. **Stein E.M., Weiss G.** *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton, NJ, Princeton Univ. Press, (1971).
7. **Hörmander L.V.** *On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators*, Proc. Annual Sci. Conf., Belfer Grad. School Sci., 155–202 (1966).
8. **Hörmander L.** *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math., **121** (3-4). 193–218 (1968).
9. **Alimov Sh. A., Il'in V. A., Nikishin E. M.** *Convergence problems of multiple trigonometric series and spectral decompositions. I*, Russian Math. Surveys, **31** (6). 29–86 (1976).
10. **Alimov Sh.A., Ashurov R.R., Pulatov A.K.** *Multiple Fourier series and Fourier integrals*, Commutative harmonic analysis. IV. Encyclopedia Math. Sci.,Berlin-Heidelberg, Springer Verlag, **42**. 1–95 (1991).
11. **Alimov S.A., Pirmatov S.T.** *On the smoothness of a function at the convergence point of its spectral expansion associated with B-elliptic operators*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **44** (8). 3206–3216 (2023).

УДК 517.958

Coefficient inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a non-characteristic line of type change.

Rajabova M. O.[1]
[1]Bukhara branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan; rajabovamadina31@gmail.com

Abstract. In this paper, we study a direct problem and an inverse problem for a model equation of mixed parabolic-hyperbolic type. In the direct problem, we consider the Tricomi problem for this equation with a non-characteristic line of type change and special conditions prescribed on the interval of type change, which have a specific physical meaning. The unknown in the inverse problem is a variable coefficient of the lower-order term in the parabolic equation. To determine this coefficient, we study the inverse problem: for the solution defined in the parabolic part of the domain, an integral overdetermination condition is imposed. Theorems on the local unique solvability of the stated problems in the sense of classical solutions are proved.

Keywords: inverse problem, mixed-type equations, characteristic, contraction mapping principle, existence, uniqueness.

Let $T > 0$ be fixed. Define the domain $\Omega_T := \Omega_{1T} \cup \Omega_2 \cup (0, T)$ with

$$\Omega_{1T} = \{(x, t) : 0 < x < T, \quad 0 < y \leq 1\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, t) : -y \leq x \leq y + T, \quad -\frac{T}{2} < y < 0\}.$$

In the domain Ω_T, we consider the equation

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy} - q(x)u = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = 0, & y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Direct problem. For a known function $q(x)$, find a solution of equation (1) in the domain Ω_T, satisfying the boundary conditions:

$$u|_{x=0} = f(y), \qquad y \in [0,1], \qquad u|_{y=1} = 0, \qquad x \in [0,T], \tag{2}$$

$$u|_{y=-x} = 0, \qquad x \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \tag{3}$$

and the condition on the interval of type change of equation (1):

$$u(x,0+) = u(x,0-), \quad e^{ax}u_y(x,y)|_{y=0+} = b\int\limits_0^x e^{b\xi}u_y(\xi,y)|_{y=0-}d\xi, \quad x \in (0,T). \tag{4}$$

In (2)-(4), the function f(y) and the positive numbers T,a,b are known.

Inverse problem. Determine $q(x)$ in (1), by the overdetermination condition on the solution of the direct problem (1)-(4):

$$\int\limits_0^1 h(y)u(x,y)dy = H(x), \quad x \in [0,T] \tag{5}$$

where, $h(y)$ and $H(x)$ are given sufficiently smooth functions.

Throughout this paper, with respect to the given functions, we will assume that the following conditions are satisfied:

$(B1)$ $f(y) \in C^3[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 f'(y)\cos(\sqrt{\lambda_0}(1-y)) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = f''(1) = 0$, $f'''(0) = 0$, λ_0 is the smallest eigenvalue of the corresponding spectral problem.

$(B2)$ $h(y) \in C^2[0,1]$, $h(0) = h(1) = 0$, $h'(0) = 0$.

$(B3)$ $H(x) \in C^1[0,T]$, $H(x) \neq 0$, $0 \leq x \leq T$, $\int\limits_0^1 h(y)f(y)dy = H(0)$.

Theorem 1. Let $q(x) \in C[0,T]$ and suppose that conditions (B1) are satisfied. Then there exists a unique classical solution of the direct problem (1)-(4) in the domain of Ω_{1T} .

References

1. **Kapustin N.Yu., Moiseev E.I.** *On spectral problems with a spectral parameter in the boundary condition.* Differential equations. - 1997. -Vol.33. - Issue 1. - pp. 16-21.

2. **Kapustin N.Yu., Moiseev E.I.** *On the convergence of spectral expansions of functions from the Holder class for two problems with a spectral parameter in the boundary condition.* Differential equations. - 2000. -Vol.36. - Issue 8. - pp. 1069-1074.

UDK 517.957

Biological invasion in a competition model with a free boundary

Rasulov M. S., Khabibullayev M. M.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;
rasulovms@bk.ru, mirolimhabibullayev7@gmail.com

The spread of new or invasive species is a central topic in ecology, and substantial research has been devoted to understanding the mechanisms of such spread. Environmental problems often require a hierarchy of models capable of describing not only different levels of organization of biological systems but also the interactions between these levels. Significant advances in the study of species invasions have been achieved through the analysis of frontal spread (see, e.g., [1-3]).

In this article, we study the dynamics of a Lotka-Volterra-type competitive system with free boundary. The interaction between two competing species is formulated as the following free boundary problem:

$$u_t - d_1 u_{xx} + m v_x u_x = u\left(a_1 - b_1 u - c_1 v\right), \quad t > 0, \quad 0 < x < s(t), \tag{1}$$

$$v_t - d_2 v_{xx} = v\left(a_2 - b_2 u - c_2 v\right), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le s\left(0\right) \equiv s_0, \tag{3}$$

$$v\left(0, x\right) = v_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$u_x\left(t, 0\right) = 0, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$u\left(t, s\left(t\right)\right) = 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$s'\left(t\right) = -\mu u_x\left(t, s\left(t\right)\right), \quad t > 0, \tag{7}$$

$$v_x\left(t, 0\right) = 0, \quad t > 0, \tag{8}$$

$$v_x\left(t, 0\right) = 0, \quad t > 0, \tag{9}$$

$$u(t, x) \equiv 0, \quad s(t) \le x \le l, \tag{10}$$

where $u(t,x)$ and $v(t,x)$ are the population densities of the invasive and native species. $s\left(t\right)$ is the free boundary representing the expanding propagation front of the invader; d_i is diffusion coefficient, a_i are coefficients of the specific growth rate of populations, $i = 1, 2$; c_1 and b_2 are coefficients of interspecies competition, c_2 and b_1 are intraspecific competition coefficients, $u_0\left(x\right)$, $v_0\left(x\right)$ are the initial population densities are respectively located in the intervals $[0, s_0]$ and $[0, l]$. And the parameter μ respectively represents the speed of propagation into new region for $u(t,x)$.

Assume that the data of the problem satisfy the following conditions:

(i) d_i, m_i, a_i, b_i, c_i, μ are positive constants, $i = 1, 2$;

(ii) $u_0\left(x\right), v_0\left(x\right) \in C^2[0, s_0]$, $0 < u_0\left(x\right) \le \frac{a_1}{b_1}$ in $(0, s_0)$ $\quad 0 < v_0\left(x\right) \le \frac{a_2}{c_2}$ in $(0, l)$,
$u_0\left(0\right) = v_0\left(0\right) = 0$, $u_0\left(s_0\right) = v_0\left(h_0\right) = 0$, $u_0'\left(s_0\right) < 0$, $v_0'\left(h_0\right) < 0$.

References

1. **Du Y., Lin Z.G.** *The diffusive competition model with a free boundary: invasion of a superior or inferior competitor.* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 19, 3105-3132, 2014.
2. **Khan, K., Liu, S., Schaerf, T.M. et al.** *Invasive behaviour under competition via a free boundary model: a numerical approach.* J. Math. Biol. 83, 23 2021.
3. **Du, Y., Li, L., Ni, W. et al.** *Invasion dynamics of super invaders: elimination of Allee effects by a strategy at the range boundary.* J. Math. Biol. 91, 69, 2025.

УДК 517.946

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE VECTOR HELMHOLTZ EQUATION IN THE BOUNDED DOMAIN

Sattorov E. N.[1], Ermamatova Z. E.[2], Axmadova M. T.[3]
[1]Samarkand State Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan;
Sattorov-e@rambler.ru
[2]Zarmed University , Samarkand, Uzbekistan;
ermamatovazuxro94@gmail.com
[3]Samarkand State Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan;
madinaaxm99@gmail.com

The Helmholtz equation arises in many areas, especially in practical physical applications, such as acoustics, wave propagation and scattering, structural vibration, electromagnetic scattering, and so on (see [1,2,3,4]).

The Cauchy problem for the Helmholtz equation is an inverse problem and is severely ill-posed. This means the solution does not depend continuously on the given Cauchy data, and any small perturbation in the given data may cause a large change in the solution.

Let a continuously differentiable function $U(x)$ be given in a three-dimensional bounded domain Ω with a piecewise smooth boundary $\partial\Omega$, where

$$x = (x_1, x_2, x_3)\,,\ \ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2)\,,\ \ y' = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2\,, \quad r^2 = |y - x|^2 = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2\,.$$

Consider the propagation of acoustic waves in a homogeneous isotropic medium in $\mathbb{R}^3$ with density ρ, sound speed c, and absorption coefficient γ. To determine the wave motion, it is sufficient to find the velocity potential $\Psi = \Psi(x,t)$, from which the velocity field U is obtained in the form $U = (1/\rho)\,\mathrm{grad}\,\Psi$, and the pressure p is in the form

$$p - p_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \gamma\Psi,$$

where p_0 is the pressure in the undisturbed medium. In the linearized theory, the velocity potential Ψ satisfies the dissipative wave equation [33; pp. 77–78]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial \Psi}{\partial t} - c^2\Delta\Psi = 0.$$

Therefore, for harmonically time-dependent acoustic waves of the form $\Psi(x,t) = U(x)e^{-i\omega t}$ with frequency $\omega > 0$, we obtain that the coordinate-dependent amplitude U satisfies the reduced wave equation or the Helmholtz equation

$$\Delta U(x) + \lambda^2 U(x) \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \lambda^2 U(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

where the wave number $\lambda \neq 0, \lambda^2 = \omega(\omega + i\gamma)/c^2$. We choose the sign of λ so that the condition $\mathrm{Im}\,\lambda \geq 0$ is satisfied.

Therefore, regularizing algorithms are needed to determine the solution in some stable way. Consider the Cauchy problem in a bounded simply connected domain Ω in the three-dimensional space $\mathbb{R}^3$ with boundary $\partial\Omega$ consisting of a compact connected part T of the plane $y_3 = 0$ and a smooth piece of the Lyapunov surface S lying in the half-space $y_3 \geq 0, \bar{\Omega} = \Omega \mathrm{U} \partial\Omega, \partial\Omega = S\mathrm{U}T$.

Denote by $H(\Omega)$ the set of functions satisfying the Helmholtz equation in the domain Ω and belonging to the class $C^1(\bar{\Omega}) \cup C^2(\Omega)$.

Problem 1 (Cauchy problem). The Cauchy data

$$U(y)|_S = f_1(y), \quad \left.\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|_S = f_2(y), \quad y \in S \tag{2}$$

are known on the surface S for the solution of the inhomogeneous Helmholtz equation

$$\Delta U(x) + \lambda^2 U(x) \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \lambda^2 U(x) = -f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

where functions $f_1(y)$ and $f_2(y)$ are belong to the classes $C^1(S)$ and $C(S)$, respectively, defined on S. It is required to reconstruct the function $U(x)$ in Ω, based on the given $f_1(y)$ and $f_2(y)$, that is to solve the problem of analytic continuation of the solution of the Helmholtz equation in the spatial domain from its values on a smooth piece of the boundary S.

For the Helmholtz equation (**??**) in the domain Ω, the Kirchhoff spatial integral formula is valid [34; Chapter V, pp. 417–423; Chapter VII, pp. 503–524]:

$$U(x) = \int_{\partial\Omega} \left[\Phi_0(y,x;\lambda)\frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y)\frac{\partial \Phi_0(y,x;\lambda)}{\partial n}\right] dS_y + \int_\Omega f(y)\Phi_0(y,x;\lambda)dy, \tag{3}$$

where $\Phi_0(y,x;\lambda)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-i\lambda|y-x|}}{|y-x|}$ and $\bar{n}\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ is an outer normal of the surface $\partial\Omega$ at the point y. Let a function f be Hölder continuous with exponent $\alpha\in(0;1)$, that is $f\in C^{s,\alpha}(\overline{\Omega})$ and $s\in\mathbb{Z}_+$.

From Green's formula, it follows that formula (**??**) is also valid if an arbitrary regular solution of the Helmholtz equation is added to $\Phi_0(y,x;\lambda)$, that is the following formula holds

$$U(x)=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial U}{\partial n}(y)\Phi_\sigma(y,x;\lambda)-U(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x;\lambda)}{\partial n}\right]dS_y+\int_\Omega f(y)\Phi_\sigma(y,x;\lambda)dy.$$

According to [14], we define the Carleman–Yarmukhammedov function $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ by equality

$$\Phi_\sigma(y,x;\lambda)=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma\left(i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3-x_3\right)^2}}{i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3-x_3}\right]\frac{\mathrm{ch}(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du. \tag{4}$$

Now, separate the imaginary part of the expression under the integral (**??**), we obtain

$$2\pi^2 e^{\sigma x_3^2+\sigma\alpha^2-\sigma y_3^2}\,\Phi_\sigma(y,x;\lambda)=\int_0^\infty\frac{\varphi_\sigma(y,x;u)}{u^2+r^2}e^{-\sigma u^2}\,\mathrm{ch}(\lambda u)du,$$

where

$$\varphi_\sigma(y,x;u)=\cos\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}-(y_3-x_3)\,\frac{\sin\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},\ \tau=2\sigma y_3,$$

$$w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3-x_3,\alpha^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2.$$

This paper considers the problem of extending the solution of the inhomogeneous vector Helmholtz equation in a three-dimensional bounded domain, that is, the Cauchy problem

Литература

1. **J.T. Chen, F.C. Wong**, *Dual formulation of multiple reciprocity method for the acoustic mode of a cavity with a thin partition* ,– J. Sound Vibrat. 217, (1), 75–95 (1998).
2. **W.S. Hall, X.Q. Mao,** *Boundary element investigation of irregular frequencies in electromagnetic scattering* – Eng. Anal. Bound. Elem. **16** (3), 245–252 (1995).
3.**I. Harari, P.E. Barbone, M. Slavutin, R. Shalom,** *Boundary infinite elements for the Helmholtz equation in exterior domains* – Int. J. Numer. Meth. Eng. **41** (6), 1105–1131 (1998).
4. **L. Marin, L. Elliott, P.J. Heggs, D.B. Ingham, D. Lesnic, X. Wen,** *Conjugate gradient-boundary element solution to the Cauchy problem for Helmholtz-type equations* „ Comput. Mech. **31** (3–4), 367–377 (2003).

UDK 517.957

A Nonlocal Free Boundary Problem for an Age-Structured Invasive Plant Model

Takhirov J. O.[1], Rasulov M. S.[1], Samandarov T. N.[2]
[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;
[2]University of Business and Science;
prof.takhirov@yahoo.com, rasulovms@bk.ru, tojiddinsamandarov@gmail.com

Biological invasions pose severe ecological and socioeconomic threats globally, critically impacting agriculture, livestock habitats, and public health. While statistical methods and computer simulations are often constrained by the scarcity of empirical data across vast spatial and temporal scales, mathematical modeling provides a vital framework to uncover invasion transmission dynamics and inform effective control strategies. To capture these dynamics, the age-structured continuous-space (ASCS) model proposed by Kuznetsov et al. [1] is adopted as follows:

$$\begin{cases} u_t=\delta\beta w-\gamma(v)u-fu, & x\in\Omega,\ t>0,\\ v_t=fu-gv, & x\in\Omega,\ t>0,\\ w_t=dw_{xx}+\alpha v-\beta w, & x\in\Omega,\ t>0,\\ w(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x),\quad w(x,0)=w_0(x) & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Here, $u(x,t)$ and $v(x,t)$ denote the plant densities of the young and old age classes in the domain Ω at time t, respectively. The function $w(x,t)$ represents the density of airborne seeds over Ω. In system (), $\delta \in (0,1]$ is the seed establishment rate, $\gamma(v) > 0$ is the density-dependent mortality of young plants, $f > 0$ is the aging rate, and $g > 0$ is the mortality rate of old plants. Furthermore, $d > 0$ represents the spatial diffusion rate of seeds, while $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ denote the seed production and deposition rates, respectively. Homogeneous Dirichlet boundary conditions are imposed on $\partial\Omega$ for w, and u_0, v_0, w_0 are nonnegative initial functions.

Recently, Li et al. [2] proposed a reaction-diffusion model with two moving free boundaries and the mortality term $\gamma(v) = \gamma v$, where $\gamma > 0$ is a sufficiently small constant reflecting the strong viability of invasive plants, to investigate their spatial expansion.

Inspired by the former work, we extend the one-dimensional ASCS model by introducing double free boundaries and nonlocal dispersal as follows:

$$\begin{cases} u_t = \delta\beta w - \gamma v u - f u, & h(t) < x < s(t),\ t > 0, \\ v_t = f u - g v, & h(t) < x < s(t),\ t > 0, \\ w_t = d\left[\displaystyle\int_{h(t)}^{s(t)} J(x-y)w(y,t)\,dy - w(x,t)\right] + \alpha v - \beta w, & h(t) < x < s(t),\ t > 0, \\ u(x,t) = v(x,t) = w(x,t) = 0, & x \le h(t) \text{ or } x \ge s(t),\ t > 0, \\ h'(t) = -\mu \displaystyle\int_{h(t)}^{s(t)} \int_{-\infty}^{h(t)} J(x-y)w(x,t)\,dy\,dx, & t > 0, \\ s'(t) = \mu \displaystyle\int_{h(t)}^{s(t)} \int_{s(t)}^{+\infty} J(x-y)w(x,t)\,dy\,dx, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), & -s_0 \le x \le s_0, \\ h(0) = -s_0, \quad s(0) = s_0, \end{cases} \tag{2}$$

where $h(t)$ and $s(t)$ represent the moving left and right free boundaries, respectively, which are to be determined jointly with the solutions (u,v,w). Here, $s_0 > 0$ and $\mu > 0$ denote the initial domain boundary position and the expansion capability parameter, respectively. In contrast to classical local Stefan conditions, the nonlocal boundary conditions for $h'(t)$ and $s'(t)$ imply that the boundary expansion speed is directly proportional to the total flux of seeds jumping across the free boundaries from the interior habitat $[h(t), s(t)]$ into the exterior environment.

The rest of this work is organized as follows. First, the global existence, uniqueness, and qualitative properties of the solution to problem (2) are established using the contraction mapping theorem. Next, comparison principles are formulated to analyze the long-time behavior, specifically deriving the conditions for successful invasion versus spreading failure. Finally, numerical simulations and a brief discussion are provided to illustrate the main theoretical results.

Literature

1. **Kuznetsov Y. A., Antonovsky M. Ya., Biktashev V. N., Aponina E. A.** *A cross-diffusion model of forest boundary dynamics.* Journal of Mathematical Biology. Vol.32. No.3. 1994. pp.219-232.
2. **Li R., Zhu L., Zhou Y.** *The conditions of failing and successful plant invasions with free boundary.* Scientific Reports. Vol.15. 2025. Art.17910. pp. 1-15.

UDK 517.98

Discrete spectrum of a fermion–boson pair on the one-dimensional lattice

Ulashov S. S.[1], Khamidov Sh. I.[2]
[1] Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
sobirulashov19@gmail.com
[2]V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, UzAS, Tashkent, Uzbekistan;
shoh.hamidov2021@gmail.com

Abstract. We consider a fermion–boson pair on $\mathbb{Z}$ with an on-site interaction. After reduction to fixed total quasi-momentum, the Hamiltonian is a Jacobi operator with a rank-one perturbation. We state the explicit formula for its unique simple eigenvalue outside the essential spectrum and the corresponding eigenfunction, including the exceptional fiber where the spectral band collapses to a point. The location and monotonicity of the eigenvalue are also described.

Model and fiber Hamiltonian. Two-particle lattice Hamiltonians provide a setting for studying bound states generated by short-range interactions; see, for example, [1,2]. Let $\gamma > 0$ be the mass-ratio parameter and $\mu \in \mathbb{R}$ the interaction strength. The Hamiltonian on $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ is

$$\begin{aligned}(\widehat{h}_{\mu,\gamma}\psi)(x_1,x_2) = {} & 2(1+\gamma)\psi(x_1,x_2) \\ & - \psi(x_1+1,x_2) - \psi(x_1-1,x_2) \\ & - \gamma\psi(x_1,x_2+1) - \gamma\psi(x_1,x_2-1) \\ & + \mu\delta_{x_1,x_2}\psi(x_1,x_2), \qquad x_1,x_2 \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

where δ is the Kronecker delta. The interaction is attractive for $\mu < 0$ and repulsive for $\mu > 0$. Since the two particles are distinguishable, no exchange-symmetry restriction is imposed.

Diagonal translation invariance makes the total quasi-momentum a natural parameter. Introduce the coordinates $R = x_2$, $r = x_1 - x_2$ and the unitary coordinate map

$$(U_0\psi)(R,r) = \psi(R+r,R).$$

The interaction then acts only at $r = 0$. Applying the partial Fourier transform

$$(\mathcal{F}_R\varphi)(k,r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{R\in\mathbb{Z}} e^{-ikR}\varphi(R,r), \qquad k \in \mathbb{T} := (-\pi,\pi],$$

reduces the problem to operators on $\ell^2(\mathbb{Z})$ indexed by the total quasi-momentum k. The discrete spectrum of each such fiber describes bound states in the relative coordinate.

Fiber operator and essential spectrum. For $U = \mathcal{F}_R U_0$, the Hamiltonian admits the decomposition

$$U\widehat{h}_{\mu,\gamma}U^{-1} = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} h_{\mu,\gamma}(k)\,dk \quad \text{in } L^2(\mathbb{T};\ell^2(\mathbb{Z})),$$

where

$$\begin{aligned}(h_{\mu,\gamma}(k)w)(r) = {} & 2(1+\gamma)w(r) - (1+\gamma e^{-ik})w(r+1) \\ & - (1+\gamma e^{ik})w(r-1) + \mu\delta_{r,0}w(r).\end{aligned}$$

The two hopping coefficients are complex conjugates, with common modulus

$$a_\gamma(k) = |1+\gamma e^{-ik}| = \sqrt{1+2\gamma\cos k+\gamma^2}.$$

For $a_\gamma(k) > 0$, set $\vartheta_\gamma(k) = -\arg(1+\gamma e^{-ik})$ and define the unitary map $(G_k u)(r) = e^{-i\vartheta_\gamma(k)r}u(r)$. The operator $H_{\mu,\gamma}(k) = G_k h_{\mu,\gamma}(k)G_k^{-1}$ has real symmetric hopping coefficients:

$$(H_{\mu,\gamma}(k)u)(r) = 2(1+\gamma)u(r) - a_\gamma(k)\big[u(r+1)+u(r-1)\big] + \mu\delta_{r,0}u(0).$$

Here $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, the Hilbert space of complex sequences with $\sum_{r\in\mathbb{Z}}|u(r)|^2 < \infty$. The fiber is bounded and self-adjoint and can be written as

$$H_{\mu,\gamma}(k) = H_{0,\gamma}(k) + \mu V, \qquad (Vu)(r) = \delta_{r,0}u(0),$$

where V is the rank-one orthogonal projection onto the vector $\delta_{\cdot,0}$.

The dispersion relation of the free fiber is

$$\varepsilon_{k,\gamma}(p) = 2(1+\gamma) - 2a_\gamma(k)\cos p, \qquad p \in \mathbb{T}.$$

The essential spectrum of the interacting fiber is the interval

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\mu,\gamma}(k)\big) = \big[\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)\big],$$

with edges $\varepsilon_{\min}(k) = 2(1+\gamma) - 2a_\gamma(k)$ and $\varepsilon_{\max}(k) = 2(1+\gamma) + 2a_\gamma(k)$. Its width is $4a_\gamma(k)$.

The identity $a_\gamma(k)^2 = (\gamma-1)^2 + 4\gamma\cos^2(k/2)$ shows that the exceptional case $a_\gamma(k) = 0$ occurs exactly at $(\gamma, k) = (1, \pi)$. Fiber formula remains valid there without a phase transformation and gives

$$H_{\mu,1}(\pi) = 4I + \mu V, \qquad \sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\mu,1}(\pi)\big) = \{4\}.$$

Main result. The following theorem gives the complete description of the eigenvalue outside the essential spectrum and its eigenfunction. The numbering of the source manuscript is retained.

Theorem. Let $\gamma > 0$, $k \in \mathbb{T}$ and $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Then the following assertions hold.

(i) If $a_\gamma(k) > 0$, the operator $H_{\mu,\gamma}(k)$ has a unique simple eigenvalue outside its essential spectrum, given by

$$E_\gamma(k,\mu) = 2(1+\gamma) + \operatorname{sgn}(\mu)\sqrt{\mu^2 + 4a_\gamma(k)^2}. \tag{1}$$

A corresponding eigenfunction is

$$u(r) = C\alpha^{|r|}, \qquad C \neq 0, \quad r \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

where

$$\alpha = -\operatorname{sgn}(\mu)\frac{2a_\gamma(k)}{|\mu| + \sqrt{\mu^2 + 4a_\gamma(k)^2}}, \qquad 0 < |\alpha| < 1. \tag{3}$$

(ii) If $a_\gamma(k) = 0$, then necessarily $\gamma = 1$, $k = \pi$, and $H_{\mu,1}(\pi)$ has the unique simple eigenvalue

$$E_1(\pi,\mu) = 4 + \mu \tag{4}$$

outside its essential spectrum. A corresponding eigenfunction is

$$u(r) = C\delta_{r,0}, \qquad C \neq 0.$$

In both cases, the eigenvalue lies below the essential spectrum for $\mu < 0$ and above it for $\mu > 0$. Moreover, for fixed γ and k, the mapping $\mu \mapsto E_\gamma(k,\mu)$ is strictly increasing on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

The result characterizes the bound state at every fixed total quasi-momentum. In the nonexceptional case the eigenfunction decays exponentially in the relative coordinate. At the exceptional fiber it is supported only at the interaction site $r = 0$.

Literature

1. **D. C. Mattis** *The few-body problem on a lattice.* Rev. Mod. Phys. -**58** 1986, 361–379.
2. **M. Valiente, D. Petrosyan** *Two-particle states in the Hubbard model.* J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. -**41** 2008.

УДК 517.956

Смешанная задача для объединенного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза и Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы

Азимов Д. Б.
Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;
doniyor.azimov.97@bk.ru

В работе [1] изучено интегрируемость объединенного уравнения КдФ-нКдФ. В этой работе изучается интегрирование уравнения КдФ-нКдФ отрицательного порядка самосогласованным источником

$$\begin{cases} q_t = -2\,p\,p_x + 6\,q\,q_x + q_{xxx} + 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t)\, s(\pi,\lambda_k,t)\left(\psi_+^2(x,\lambda_k,t)\right)_x, \\ p\,q - p_{xx} = 0 \end{cases}$$

$$t > 0, \quad x \in R^1, \tag{1}$$

с условиями

$$\begin{aligned} q(x,t)|_{t=0} &= q_0(x), \\ p(x,t)|_{x=0} &= p_0(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где $q_0(x)$, и $p_0^2(t)$ действительные функции причём $q_0(x)$ π - периодическая функция. Требуется найти действительные функции $q(x,t)$ и $p(x,t)$, которые π - периодические по переменной x :

$$p^2(x+\pi,t) \equiv p^2(x,t), \quad q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad t \geq 0, \quad x \in R^1 \tag{3}$$

и удовлетворяют условиям гладкости:

$$\begin{aligned} &q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \\ &p(x,t) \in C_x^2(t>0) \cap C(t \geq 0). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\alpha_k(t) \in C([0,\infty))$ - заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\alpha_k(t) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, $k \to \infty$, $\psi_+(x,\lambda,t)$ - решения Флоке уравнения Штурма-Лиувилля

$$L(t)y \equiv -y'' + (-q(x,t))y = \lambda y, \quad x \in R^1, \tag{5}$$

(нормированные условием $\psi_+(0,\lambda,t) = 1$), а $s(x,\lambda,t)$ - решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = 0$, $s'(0,\lambda,t) = 1$.

Спектр оператора (5) состоит из следующего множества $E = \bigcup\limits_{n \in N} [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$ задачи Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, для уравнения (5) вместе со знаками $\sigma_n = \operatorname{sign}\left\{s'(\pi,\xi_n) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n)}\right\}$, $n \in \mathbb{Z}$ называются спектральными параметрами задачи (5).

Теорема. Пусть $(q(x,t), p(x,t))$ - решение задачи (1)-(4). Тогда спектр оператора (5) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n =& 2(-1)^{n+1}\sigma_n(t)\left\{\frac{1}{2\xi_n}p^2(0,t) + 2q(0,t) + 4\xi_n(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda_k,t)\alpha_k(t)}{\xi_n - \lambda_k}\right\} \times \\ &\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{6}$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \geq 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \geq 1$ - спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x)$.
Следствие. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Метод обратной спектральной задачи.

Литература

1. **Allami M., Mutashar A. K., Rashid A. S.** *On solutions of the combined KdV-nKdV equation* // Al-Mustansiriyah Journal of Science. – 2019. – Vol. 30, no. 2. – Pp. 33–45.
2. **Baltaeva I., Khasanov M. M., Rakhimov I. D.** *A generalized (G'/G)-expansion method for the combined mKdV-nmKdV equation* // "Ali Qushji – an outstanding ambassador of the scientific school of Ulughbeg" international conference. – Samarkand, 2023. – Pp. 353–355.
3. **Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б.** *Интегрирование объединенного уравнения мКдФ-нмКдФ в классе периодических функций* // Материалы международной научной конференции «Ali Qushchi – Mirzo Ulug'bek ilmiy maktabining buyuk elchisi». – Самарканд, 2023. – С. 194–195.
4. **Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Азимов Д. Б.** *Интегрирование объединенного уравнения КдФ-нКдФ в классе периодических функций* // Тезисы докладов международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». – Ташкент, 2023. – С. 266–267.
5. **Хасанов М. М., Якубов Б. М., Машарипов Ф. М.** *Интегрирование нагруженного объединенного уравнения КДФ-НКдФ самосогласованным источником в классе периодических функций* // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, прикладной математики и информационных технологий». – Т. I. – Нукус: Каракалпакский государственный университет, 2026. – С. 179–181.
6. **Хасанов М. М., Каримов Х. Х., Машарипов Ф. М.** *Интегрирование объединенного уравнения МКдФ-нмКдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций* // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, прикладной математики и информационных технологий». – Т. I. – Нукус: Каракалпакский государственный университет, 2026. – С. 395–396..

УДК 517.956

Об областях определения комплексных степеней эллиптического оператора Шрёдингера с сингулярным коэффициентом в банаховом пространстве

Аликулов Т.Н.[1], Эргашева Д.А.[2]
[1]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан; tolibaka@gmail.com1
[2]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан; durdona@mail.ru2

При исследованиии мнимых степеней эллиптических дифференциальных операторов представляет большой интерес изучение вопросов их ограниченности. Проблеме ограниченности, связанной с мнимыми степенями эллиптических операторов, посвящены многочисленные исследования ряда математиков (см., например, [1-4]). Изучение свойств мнимых степеней дифференциального оператора играет важную роль при решении многих задач, в частности, особый интерес изучению мнимых степеней операторов вызван с возможностью их применения при решении задачи Коши для дифференциального уравнения и при использовании интерполяционных теорем об ограниченности операторов в промежуточных пространствах, (например, теоремы Е.М. Стейна). Кроме того, с помощью свойств дробных степеней операторов можно изучать поведение спектральных разложений $E_\lambda f$ функций в пространстве $L_p(R^n)$.

В этой работе изучается эллиптический оператор второго порядка вида

$$(Lu)(x) = -\Delta u(x) + q(x)u(x) \tag{1}$$

с областью определения $W_p^2(R^n), \quad n > 1, \quad 1 < p < \frac{n}{1+\tau}, \quad$ где потенциал $q(x)$ оператора $L(x, D)$ является комплекснозначной функцией действительных переменных, допускающей особенность вида

$$|D^\alpha q(x)| \le \frac{const}{|x|^{(1+|\alpha|+\tau)}}, \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Здесь α - мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i, \ 0 \le \tau < 1.$

Далее, пусть X - комплексное банахово пространство и $L(x,D)$ - замкнутый линейный оператор в пространстве X. Обозначим через $D(L), R(L), N(L), \rho(L), \sigma(L)$ соотвественно область определения, область значения, ядро, множество регулярных точек и спектр оператора $L(x,D)$.

Определение 1. *Будем говорить, что $L(x,D)$ - секториальный оператор, если $D(L)$ и $R(L)$ плотны в пространстве X, $N(L)=0$, $(-\infty,0)\subset\rho(L)$ и существует такая константа M, что для любого $t>0$ выполняется неравенство $\|t(t+L)^{-1}\|_p\le M$.*

Класс таких операторов $L(x,D)$ обозначим через $\Lambda_0(R^n)$.

Пусть оператор $L(x,D)$ из $\Lambda_0(R^n)$. Тогда мнимая степень этого оператора определяется по формуле [1]:

$$L^z f=-\frac{\sin\pi z}{\pi}\Big\{\frac{f}{z}-\frac{L^{-1}f}{1+z}+\int\limits_0^1 t^{z+1}(t+L)^{-1}L^{-1}f\,dt+\int\limits_1^{+\infty} t^{z-1}(t+L)^{-1}Lf\,dt\Big\},\tag{3}$$

для любой функции $f\in D(L)\cap R(L)$, $|Rez|<1$.

Определение 2. *Будем говорить, что мнимая степень оператора $L(x,D)$ является ограниченной, если для любого $s\in R$ выполняется неравенство $\sup_{|s|\le 1}\|L^{is}\|_p<\infty$.*

Класс операторов $L(x,D)$, удовлетворяющих этому неравенству, обозначим через $BIP(\Omega)$ (*bounded imaginary powers*). Пусть $\sum_\theta=\{\lambda\in C:\ \lambda\neq 0,\ |arg\lambda|<\theta\}$.

Имеет место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $1<p<\frac{n}{1+\tau}$, $0\le\tau<1$, $0<\theta<\pi$, $N(L)=0$ $\sigma(L)\subset\Sigma_\theta$. Тогда существует постоянная $C>0$ такая, что для всех $\lambda\notin\sigma(L)$ выполняется соотношение*

$$\big\|(\lambda+L)^{-1}\|_{L_p(R^n)}\le C|\lambda|^{-1}\tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть α и $\beta-$ комплексные числа, удовлетворяющие условию $0<Re\alpha<Re\beta<\infty$ и $0<\omega<1$, то*

$$\Big[D(L^\alpha),D(L^\beta)\Big]_\omega=D(L^{\alpha(1-\omega)+\beta\cdot\omega}),\tag{5}$$

где $\Big[D(L^\alpha),D(L^\beta)\Big]_\omega$ интерполяционная пара ω.

Теорема 3. *Пусть $1<p<\frac{n}{1+\tau}$, $0\le\tau<1$ и $0<\alpha<1$. Тогда для любой функции $u\in W_p^2(R^n)$ выполняется неравенство*

$$\big\|L^\alpha u\big\|_{L_p(R^n)}\le const\|u\|_{W_p^{2\alpha}(R^n)}\tag{6}$$

Литература

1. **Prüss J., Sohr H. Imaginary powers of elliptic second order differential operators in Lp - spaces**// J. Math, Sec. Japan. 1993. V. 23. P. 161 – 192.

2. **Khalmukhamedov A.R. Complex powers of the Schrödinger operator with singular potential**// American Mathematical Society. Contemporary Mathematics. 2016. V. 59. P. 205 – 215.

3. **Гиль А. В., Ногин В А.** *Комплексные степени одного дифференциального оператора, связанного с оператором Шрёдингера*// Изв. вузов. Матем. 2017. Том №19. Выпуск №1. С. 18-25.

4. **Khalmuxamedov A.R., Alikulov T.N. On the Boundedness of Imaginary Powers of an Elliptic Operator in Banach Spece with Potential Singular on Manifolds**// Lobachevsku journal of mathematics. 2025. Vol 46, №12. P. 6251-6251.

УДК 517.956

Применение дробных степеней бигармонического оператора с сингулярным коэффициентом к исследованию дифференциального уравнения гиперболического типа в банаховом пространстве

Аликулов Т.Н.[1], Норкобилова Ф. Э.[2]
[1]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
tolibaka@gmail.com1
[2]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
feruza@mail.ru2

Свойства дробных степеней дифференциальных операторов играет важную роль при решении разных математических задач. В частности, ряд приложений дробных степеней операторов к нелинейным интегральным уравнениям, к смешанным задачам для параболических уравнений, к исследованию скорости сходимости спектральных разложений и в других указанных работах (см. например [1-4]). Задача усложняется, когда приходится исследовать дробные степени несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве или операторов, действующих в банаховом пространстве.

В настоящей работе в $n-$ мерном евклидовом пространстве R^n рассмотрим бигармонический оператор с сингулярным коэффициентом вида

$$A(x,D)=\Delta^2+q(x), \tag{1}$$

с областью определения $\mathbb{D}(A)=W_p^4(R^n)$, $1\le p<\frac{n}{2+\tau}$, где потенциал оператора $q(x)$ допускает особенность вида

$$\left|D^\mu q(x)\right|\le\frac{const}{|x|^{1+|\mu|+\tau}}.$$

Здесь $\mu-$ мультииндекс, $0\le|\mu|=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i,\quad 0\le\tau<1$, $\tau-$ целое число.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+Au(t)=f(t), \tag{2}$$

где t изменяется на промежутке $[0,T]$. Решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0)=u_0,\quad u_t(0)=v_0, \tag{3}$$

может быть записано в виде (см. [5], с. 456)

$$u(t)=cos(A^{\frac12}t)u_0+A^{-\frac12}sin(A^{\frac12}t)v_0+A^{-\frac12}\int\limits_0^t sin(A^{\frac12}t-A^{\frac12}s)f(s)ds, \tag{4}$$

где

$$cos(A^{\frac12}t)u_0=\sum_{i=1}^{\infty}cos(t\sqrt{\lambda_i})(u,e_i)e_i,$$

$$sin(A^{\frac12}t)v_0=\sum_{i=1}^{\infty}sin(t\sqrt{\lambda_i})(u,e_i)e_i.$$

Очевидно, что операторы $cos(L^{\frac12}u)$ и $sin(A^{\frac12}u)$ ограничены в $L_2(R^n)$ при любом t, и их нормы не превосходят единицы.

Для решения (4) часто применяют метод Фурье. В этом методе решение (6) заменяется последовательностью приближенных решений (см. [5], с. 457)

$$u_N(t)=P_N[cos(A^{\frac12}t)u_0+A^{-\frac12}sin(A^{\frac12}t)v_0+A^{-\frac12}\int\limits_0^t sin(A^{\frac12}t-A^{\frac12}s)f(s)ds], \tag{5}$$

где

$$P_N u = \sum_{i=1}^{N} (u, e_i) e_i \quad (u \in L_2(R^n)).$$

В работе получены следующее основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \frac{n}{2+\tau}$. *Тогда*

$$\|(A + lI)^{-1}\|_{L_p(R^n)} \le \frac{C}{1+l} \quad (l \ge 0). \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \frac{n}{2+\tau}$, $\|A^\alpha u\|_{L_p(R^n)} \le C\|u\|_{L_2(R^n)}$, $0 < \alpha < 1$, $u_0 \in D(A^{\nu-\alpha})$, $v_0 \in D(A^{\nu-\alpha-\frac{1}{2}})$ *и* $f(t) \in D(A^{\nu-\alpha-\frac{1}{2}})$ *при всех* $t \in [0,T]$, *причем функция*

$$\varphi(t) = A^{\nu-\alpha-\frac{1}{2}} f(t) \tag{7}$$

непрерывна по норме пространства $L_2(R^n)$ *на* $[0,T]$. *Тогда приближения Фурье* (7) *сходятся к решению задачи* (4), (5) *по норме пространства* $L_p(R^n)$ *равномерно относительно* $t \in [0,T]$. *Скорость сходимости характеризуется неравенством*

$$\|u(t) - u_N(t)\|_{L_p(R^n)} = o(\lambda_N^{-\nu}). \tag{8}$$

Литература

1. **Ильин В.А.** *Ядра дробного порядка*// Мат. сб. 1957. Т. 4, № 41. С.459–480.
2. **Алимов Ш.А.** *Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций*// Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 9, № 8. С. 1609–1626.
3. **Костин В.А., Небольсина М.Н.** *О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка*// ДАН , 2009. № 428(1). С. 20–22.
4. **Халмухамедов А.Р.** *Об отрицательных степенях сингулярного оператора Шрёдингера и сходимость спектральных разложений*// Мат. заметки. 1996. № 59(3). С. 428–436.
5. **Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник П.Е., Соболевский П.Е.** *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* М.: Наука, 1966. –500 с.

УДК 517.955

Функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка.

Ашурова З. Р.[1], Жураева У. Ю.[2], Маллаева Ф. У[3]
[1,2] Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан;
umida_9202@mail.ru

Работа посвящена выяснению дифференциальных свойств полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), заданное в неограниченные области лежащие в полуплоскости $\{-\infty < y_1 < \infty; y_2 \ge 0\} = R_2^+$ в зависимости от дифференциальных свойств граничных функций.

Мы будем рассматривать краевую задачу для уравнения

$$\Delta^2 u = 0$$

в области $\{-\infty < y_1 < \infty;\ y_2 \ge 0\}$ при условии

$$u(y) = F_0(y), \quad \Delta u(y) = F_1(y), \quad \frac{du(y)}{dn} = G_0(y), \quad \frac{d\Delta u(y)}{dn} = G_1(y), \quad y_2 = 0.$$

В данной работы строится функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), определенных в области D.

Функции $\varphi_\sigma(y,x)$ и $\Phi_\sigma(y,x)$, при $s>0$, $\sigma\geq 0$ определим следующими равенствами:

$$c_2\varphi_\sigma(y,x)K(x_2)=\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K\left(i\sqrt{u^2+s}+y_2\right)}{i\sqrt{u^2+s}+y_2-x_2}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}} \tag{1}$$

где $c_2=2^{-1}\pi\omega_2$, ω_2 — площадь единичного круга в $\mathbb{R}^2$.

$$K(\omega)=\frac{\exp[-\sigma(\omega+1)^{\rho_1}]}{(\omega+x_2)^2},\qquad \omega=i\sqrt{u^2+s}+y_2,\quad \varepsilon>0,\quad y_2>0,\quad 0<\rho_1<1.$$

Здесь берется регулярная ветвь аналитической функции в ω^ρ плоскости с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси, которая вещественна при вещественном ω.

$$\Phi_\sigma(y,x)=cr^2\varphi_\sigma(y,x) \tag{2}$$

где $c\in\mathbb{R}$, $\rho_1>0$, $\sigma>0$. В дальнейшем через c обозначаем все постоянные числа,

$$K(x_2)=\frac{\exp[-\sigma(x_2+1)^{\rho_1}]}{(2x_2)^2}\neq 0.$$

Лемма 1. Функция $\varphi_\sigma(y,x)$, определенная формулой (1), при $\alpha>0$ является гармонической функцией по переменной y.

$$|\varphi_\sigma(y,x)|\leq\frac{c}{rr_1\exp\left[\sigma_0\left(\sqrt{\alpha^2+(y_2+1)^2}\right)^{\rho_1}\right]}$$

и

$$\left|\frac{\partial\varphi_\sigma(y,x)}{\partial y_i}\right|\leq\frac{c}{rr_1^2\exp\left[\sigma_0\sqrt{\alpha^2+(y_2+1)^2}^{\rho_1}\right]},\qquad i=1,2.$$

$$\left|\frac{\partial^2\varphi_\sigma(y,x)}{\partial y_i\partial y_j}\right|\leq\left(\frac{1}{rr_1^2}+\frac{1}{rr_1^3}+\frac{1}{r^2r_1^2}\right)\frac{1}{\exp\left[\sigma_0\sqrt{\alpha^2+(y_2+1)^2}^{\rho_1}\right]},\qquad i,j=1,2.$$

Теорема 1. Функция $\Phi_\sigma(y,x)$ определенная формулой (2) имеет вид

$$\Phi_\sigma(y,x)=-r^2\int_0^\infty\frac{\left[\beta(\beta^2-\eta^2)-2\beta\eta^2\right]\cos\lambda}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2\exp\{A\}}\frac{u\,du}{\eta}-r^2\int_0^\infty\frac{\sin\lambda\left[(\beta^2-\eta^2)+2\beta\beta_1\right]}{(u^2+r^2)(u^2+r_1^2)^2\exp\{A\}}\,udu$$

при $\alpha>0$ является полигармонической функцией второго порядка (т.е. является бигармонической функцией), справедливо равенство

$$\Phi_\sigma(y,x)=c\left(r^2\ln\frac{1}{r}+r^2G(y,x)\right),$$

где $\eta^2=u^2+\alpha^2$

$$\lambda=\left\{\sigma\left((y_2+1)^2+\eta^2\right)^{\frac{\rho_1}{2}}\sin\rho_1\operatorname{arcctg}\frac{\eta}{y_2+1}\right\},A=\left\{\sigma\left((y_2+1)^2+\eta^2\right)^{\frac{\rho_1}{2}}\cos\rho_1\operatorname{arcctg}\frac{\eta}{y_2+1}\right\}.$$

$r_2^2=\alpha^2+(y_2-x_2)^2$, $r_1^2=\alpha^2+(y_2+x_2)^2$, $G_\sigma(y,x)$ гармоническая функция по переменной y, включая и точку x.

Теорема 2. Для функции $\Phi_\sigma(y,x)$, справедливо:

$$|\Phi_\sigma(y,x)|\leq\frac{c}{\exp\left[\sigma_0\left(\sqrt{\alpha^2+(y_2+1)^2}\right)^{\rho_1}\right]}.$$

$$|\Delta\Phi_\sigma(y,x)| \le \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1^2}\right)\frac{c}{\exp\left[\sigma_0\left(\sqrt{\alpha^2+(y_2+1)^2}\right)^{\rho_1}\right]}.$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial\vec{n}}\right| \le \frac{c}{r_1\exp\left[\sigma_0\left(\sqrt{\alpha^2+(y_2+1)^2}\right)^{\rho_1}\right]}.$$

$$\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma}{\partial\vec{n}}\right| \le \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_1r_2}\right)\frac{c}{\exp\left[\sigma_0\sqrt{\alpha^2+(y_2+1)^2}\right]}.$$

$\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе ∂D.

Теорема. Функция $\Phi_\sigma(y,x)$, зависящая от параметра $\sigma>0$, при $y\neq x$ является функцией Керрмана для точки $x\in D$.

1) D – неограниченная область, лежащая в верхнем полупространстве $\{y: y=(y_1,y_2),\ y_1\in R,\ 0<y_2\}$, с границей ∂D

$$\partial D=\{y: y=(y_1,y_2),\ y_2=f(y_1)\},$$

$y_2=f(y_1)$ непрерывная функция, имеющая ограниченные частные производные первого порядка.

2) $D=\{y: y=(y_1,y_2),\ y_2\ge 0\}\subset R^2$ с границей внутри некоторого круга удовлетворяет условию Ляпунова, а вне круга

$$S=\{y: y=(y_1,y_2),\ y_2=y_1^2\}.$$

3) $D=\{y: y=(y_1,y_2),\ y_2\ge 0\}\subset R^2$ с границей внутри некоторого круга удовлетворяет условию Ляпунова, а вне круга

$$S=\{y: y=(y_1,y_2),\ y_2=chy_1\}.$$

$$\int_{\partial D}\left(|\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|+|\Delta\Phi_\sigma(y,x)|+\left|\frac{\partial\Delta\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|\right)ds\le\frac{c(x)}{\exp(\sigma A)}$$

где $c(x)$ – многочлен зависящий только от x, n – внешняя нормаль к границе ∂D.

Обозначим через $B_\rho(D)$ пространство бигармонических функций определенных в D, имеющих непрерывные частные производные порядка 2 вплоть до конечных точек границы ∂D и удовлетворяющих условию:

$$\sum_{k=0}^{1}\left(|\Delta^k u(y)|+|grad\Delta^{1-k}u(y)|\right)\le c\exp(|y|^\rho),\qquad \rho>0,\quad y\in D.$$

Теорема 3. Пусть для функции $u\in B_{\rho_2}(D)$ в любой точке $y\in\partial D$ выполняется неравенство:

$$\sum_{k=0}^{1}\int_{\partial D}\left|\frac{\partial\Delta^{1-k}u(s)}{\partial n}\frac{ds}{s\exp\left[\sigma_0(\sqrt{s}+1)^{\rho_1}\right]}\right|<\infty,$$

$$\sum_{k=0}^{1}\int_{\partial D}\left|\frac{\Delta^{1-k}u(s)\,ds}{s\exp\left[\sigma_0(\sqrt{s}+1)^{\rho_1}\right]}\right|<\infty.$$

Тогда $\forall x_0\in D$, имеет место равенство:

$$u(x_0)=\sum_{k=0}^{1}\int_{\partial D}\left[\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)\frac{\partial\Delta^{1-k}u(y)}{\partial n}-\Delta^{1-k}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}\right]ds.$$

Также справедливо

Литература

1. **Ярмухамедов Ш.Я.** *Формула Грина в бесконечной области и ее применение.* ДАН СССР. - 1985. - Т. 285. - С. 697–700.
2. **Ашурова З.Р., Маллаева Ф.У., Жураева У.Ю., Жураева Н.Ю.** *Теорема единственности для бигармонических функций в трехмерном евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^3$. Chebyshev Sb. - 2025. - Т. 26, № 5. - С. 62–70.
3. **Ашурова З.Р.,Маллаева Ф.У., Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю.** *Об одном свойстве бигармонической функции в неограниченной области* $\mathbb{R}^3$. Differential Equations. - 2025. - Т. 61, № 8. - С. 1048–1058.
4. **Хасанов А., Джураева У.** *Интегральное представление для полигармонических функций в двумерном евклидовом пространстве.* Samarkand State Univ. Papers. - 2025.
5. **Khasanov A.B., Juraeva U.Yu.** *On the Phragmen–Lindelof Type Theorem for Biharmonic Functions.* J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. - 2025. - Vol. 18, No. 6. - P. 847–858.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. Э. Бахтиерова

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент,

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим гиперболическое уравнение

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \tag{1}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $f(x, y)$ – известные функции.

Задачи с интегральными условиями образуют один из классов нелокальных задач, к исследованию которых приводят математические модели различных физических процессов. Представляют интерес смешанные задачи для гиперболических уравнений с нелокальными интегральными условиями, они активно изучаются в работах [1], [2].

Для уравнения (1) в области D изучаем нелокальную задачу в следующей постановке.

Задача. Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \alpha(x) \int_0^h u(x, y)dy + \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0, y) = \beta(y) \int_0^l u(x, y)dx + \mu(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{3}$$

здесь $\alpha(x)$, $\beta(y)$, $\varphi(x)$ и $\mu(y)$ – заданные функции.

Поставленная и исследованная в данной работе задача характерно также тем, что содержат в краевых условиях нелокальность по времени, такие задачи впервые изучены в работах А.И.Кожановым (см. например в [2]).

В работе доказано существование единственного регулярного решения, для чего задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пулькина Л.С.** Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений Самара. Самарский университет. 2012. - 194 с.

2. **Кажанов А.И.** Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера// Дифференц. уравнения. 2004. Том 40, №6 – С. 763–774.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Д. А. Бозорова

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент,

В настоящее время представляют интерес смешанные задачи для уравнений в частных производных третьего порядка с интегральными условиями, они активно изучаются (см. например [1]–[2]).

В данной работе изучается нелокальная задача с интегральными условиями для псевдопараболического уравнения третьего порядка.

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка

$$u_t = u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u + f(x,t), \tag{1}$$

где $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ – известные функции.

Нелокальная задача. *Найти регулярное в области D решение $u(x,t)$, уравнения (1) из класса $C^{1,0}_{x,t}\left(\bar{D}\right) \cap C^{2,1}_{x,t}\left(D\right)$, удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = \int_0^\ell k(x)u(x,t)dx + \mu_1(t), \qquad u_x(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

здесь $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ и $k(x)$ – заданные функции, причем

$$\varphi(0) = \int_0^\ell k(x)\varphi(x)dx + \mu_1(0), \qquad \varphi'(l) = \mu_2(0).$$

Имеет место следующая теорема о разрешимости изучаемой нелокальной задачи.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $a(x,t)$, $a_x(x,t)$, $a_{xx}(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t) \in C(\overline{D})$;

2) $\mu_1(t)$, $\mu_2(t) \in C^1[0,T]$; $\varphi(x) \in C^2[0,\ell]$; $k(x) \in C^1[0,\ell]$.

Тогда нелокальная задача (1)–(3) имеет единственное регулярное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пулькина Л.С.** *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений* Самара. Самарский университет. 2012. - 194 с.

2. **Kozhanov A.I., zikirov O.S., Kholikov D.K.** Mixed problem with integral condition for a loaded third order pseudoparabolic equation// *Journal of Mathematical Sciences,* 2023. Vol. 277, December No. 3. P. 420–430.

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О. С. Зикиров[1], **Д. К. Холиков**[2]

[1]Национальный университет Узбекистана, Ташкент;

[2]Ташкентский архитектурно-строительный университет, Узбекистан

zikirov@yandex.ru xoliqov23@mail.ru

В работе исследуются разрешимость нелокальных и смешанных краевых задач и задачи с интегральными условиями для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка вида

$$Mu \equiv Lu + \int_0^\ell k(x,t)u(x,t)dx = -f(x,t), \tag{1}$$

где $Lu \equiv u_{xxt}+a(x,t)u_{xx}+b(x,t)u_{xt}+c(x,t)u_x+d(x,t)u_t+e(x,t)u$ — псевдопараболический оператор, а $k(x,t)$ — заданная функция.

Такого вида уравнения возникают в теории фильтрации жидкостей в пористых средах, не установившегося движения грунтовых вод со свободной поверхностью, в теории влагопереноса в почве, динамике распространения волн и многих других дисциплинах, связанных с математическим моделированием.

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < \ell,\ 0 < t < T\}$ плоскости независимых переменных (x,t) рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

Для уравнения (1) поставим следующую задачу: *Найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

и следующим граничным условиям:

$$u(0,t) = \beta(t)\int_0^\ell u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(\ell,\tau)d\tau + \psi_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(\ell,t) = \psi_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

здесь функции $\varphi_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\beta(t)$, $\rho(t,\tau)$ заданы, непрерывны на $[0,\ell]$ и $[0,T]$, $0 \le \tau \le t$, соответственно. Кроме того удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi_0(0) = \beta(0)\int_0^\ell \varphi_0(x)dx + \psi_1(0), \qquad \varphi_0'(\ell) = \psi_2(0).$$

Доказательство теорем существования и единственности классических решений нелокальных задач (2)–(4) для уравнения (1) проводится методами Римана и иинтегральных уравнений.

В данной работе кроме этого изучаются разрешимость нелокальных задач с условиями типа А.А.Самарского и задачи с интегральными условиями для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка (1). С помощью метода Римана доказиваются теоремы существования и единственности регулярных решений исследуемых задач.

517.946

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТИПА ХОПФА

Имомназаров Х. Х. [1], **Эркинова Д. А.**[2]

[1]**Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Россия ;**
[2]**Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан;**

Одномерным аналогом уравнений Навье-Стокса для сжимаемых жидкостей можно считать систему уравнений типа Хопфа, которая представляет собой систему нелинейных уравнений конвекции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -b\,(u - v) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon\, b\,(u - v) \tag{2}$$

с начальными условием при $t = 0$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \qquad v|_{t=0} = v_0(x) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

где $u_0(x)$ и $v_0(x)$ — произвольные ограниченные измеримые в R функции; $|u_0(x)| \le M_0$, $|v_0(x)| \le M_0$, $\varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ – безразмерная положительная постоянная, b-положительная постоянная.

Определение. Ограниченные измеримые в Π_T функции $u(t,x)$ и $v(t,x)$, называются обобщенным энтропийным решением (по Кружкову) задачи (3), если:

а) Для любой константы $k_1, k_2 \in R$ и для любых пробных функций $\varphi(t,x), \psi(t,x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\varphi(t,x) \ge 0, \psi(t,x) \ge 0$ выполняются неравенства

$$\int_{\Pi_T} \left\{ |u-k_1|\varphi_t + sign(u-k_1)\left[\frac{1}{2}(u^2-k_1^2)\varphi_x - b(u-v)\varphi\right]\right\} dxdt \ge 0 \tag{4}$$

$$\int_{\Pi_T} \left\{ |v-k_2|\psi_t + sign(v-k_2)\left[\frac{1}{2}(v^2-k_2^2)\psi_x - \varepsilon b(v-u)\psi\right]\right\} dxdt \ge 0 \tag{5}.$$

b) $u(t,x) \to u_0(x)$, $v(t,x) \to v_0(x)$ при $t \to +0$ в пространстве $L_{1,loc}(R)$ то есть для любого отрезка $[a,b]$:

$$\lim_{t\to+0}\int_a^b |u(t,x)-u_0(x)|dx = 0\,, \quad \lim_{t\to+0}\int_a^b |v(t,x)-v_0(x)|dx = 0\ .$$

Обобщенное решение $u(t,x)$, $v(t,x)$ в смысле интегрального тождества формулируется следующим образом

$$\int\limits_{\Pi_T} \left\{ u\varphi_t + \frac{1}{2}u^2\varphi_x - b(u-v)\varphi \right\} dxdt = 0 \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Pi_T} \left\{ v\psi_t + \frac{1}{2}v^2\psi_x + \varepsilon b(u-v)\psi \right\} dxdt = 0. \tag{7}$$

Справедливых для любых пробных функций $\varphi(t,x)$, $\psi(t,x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, а начальные условия (9) выполняются для почти всех $x \in R$.

Справедливо следующее

Предложение. Если функции $u(t,x)$, $v(t,x)$, являются обобщенным энтропийным решением в смысле Определения задачи (1)-(3), то оно является обобщенным решением системы (1), (2) в смысле интегрального тождества (6), (7).

Доказательство предложение следует из неравенств (4), (5), при $k_1 = \pm\sup|u(t,x)|$, $k_2 = \pm\sup|v(t,x)|$ в силу произвольности функций $\varphi(t,x) \ge 0, \psi(t,x) \ge 0$.

Единственность обобщенного решения задачи (1)-(3) вытекает из следующего предложения об устойчивости решений относительно изменения начальных данных по норме пространства L_1:

Теорема. Пусть функции , $u(t,x)$, $v(t,x)$ и $\tilde{u}(t,x)$, $\tilde{v}(t,x)$ являются обобщенными решениями задачи (1)-(3) с начальными функциями $u_0(x)$, $v_0(x)$ и $\tilde{u}_0(x)$, $\tilde{v}_0(x)$ соответственно, причем $|u(t,x)| \le M$, $|v(t,x)| \le M$ и $|\tilde{u}(t,x)| \le M$, $|\tilde{v}(t,x)| \le M$,почти всюду в четырехугольнике $[0,T_0] \times K_r$ где $K_r = \{x : |x| \le r\}$. Тогда для почти всех $t \in [0,T_0]$

$$\int_{-r}^{r} \{\rho_1 |u(t,x) - \widetilde{u}(t,x)| + \rho_2 |v(t,x) - \widetilde{v}(t,x)|\}\ dx \le \int_{-r}^{r} \{\rho_1 |u_0(x) - \widetilde{u}_0(x)| + \rho_2 |v_0(x) - \widetilde{v}_0(x)|\}\ dx.$$

Literature

1. **Erkinova D.A., ImomnazarovKh.Kh.** *Cauchy problem for a Hopf-type system // Scientific journal of Samarkand State university, 2026, No. 1, pp. 153-157.*
2. **Имомназаров Б.Х. Эркинова Д.А.** *Метод слабой аппроксимации для задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Хопфа // Математические заметки СВФУ, 2022, т. 29, No. 4, с. 11–20.*
3. **Имомназаров Б.Х., Эркинова Д.А., Имомназаров Х.Х.** *Задача Коши для одной квазилинейной системы // Тезисы докладов респ. научной конференции с участием зарубежных ученых "Сарымсаковские чтения", 16-18 сентября 2021 г., г. Ташкент, с. 66-67.*
4. **Перепечко Ю.В., Сорокин К.Э., Имомназаров Х.Х.** *Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде // Труды XVII Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды Ростова-на-Дону, 2014, с. 166-169.*
5. **Кружков С. Н.** *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Математ. сборник. 1970. Т. 81. 2. С. 228–255*

УДК 517.956.6

Краевая задача с условиями периодичности для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка в прямоугольной области

Исломов Б. И. [1], Кылышбаева Г. К. [2]
[1]Национальный Университет Узбекистана имени М. Улугбека;
islomovbozor@yandex.com
[2]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха;
kalbaevna85@mail.ru

В последние годы в работе [1] возник интерес к исследованию прямых и обратных задач для модельного уравнения смешанного типа второго порядка в прямоугольной области с использованием метода спектрального анализа.

Локальные краевые задачи для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов в прямоугольных областях, когда главная часть содержит оператор

$$a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c,$$

где $a,\ b,\ c\in R\equiv(-\infty,+\infty),\ \ a^2+b^2+c^2\neq 0$ мало изучены. Отметим работы [2–3].

В настоящей работе исследуется краевая задача с периодическими условиями для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в прямоугольной области.

В прямоугольной области $D=\{(x,y):\ 0<x<l,\ \ -p<y<q\ \}$, рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+c\right)Lu=0, \tag{1}$$

где

$$Lu\equiv\begin{cases} L_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda^2u, & \text{при}\quad x>0,\ \ y>0,\\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\lambda^2u, & \text{при}\quad x>0,\ \ y<0,\end{cases} \tag{2}$$

$p>0,\ q>0,\ \ l>0,\ \lambda-$ действительные числа, $a\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty),\ \ c\in(-\infty,+\infty)$.

Введем обозначения: $J=\{(x,y):\ 0<x<l,\ y=0\}$,

$$D_1=D\bigcap\{(x,y):\ x>0,\ y>0\},D_2=D\bigcap\{(x,y):\ \ x>0,\ \ y<0\},D=D_1\bigcup D_2\bigcup J.$$

Через $C_\theta^k(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производных по θ до $k-$ го порядка включительно в области M.

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача P_{ac}**.** Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y)\in C^1(\bar{D}), u\in C_y^2(\bar{D}_2), u\in C_x^2(\bar{D}), u_{xy}\in C(D_1), u_{xyy}\in C(D_2), u_{xxx}\in C(D_1\cup D_2), \tag{3}$$

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+c\right)Lu=0,\quad (x,y)\in D_1\cup D_2, \tag{4}$$

$$\begin{array}{c}(au_x(x,y)+cu(x,y))|_{x=0}=(au_x(x,y)+cu(x,y))|_{x=l}\,,\\ (au_{xx}(x,y)+cu_x(x,y))|_{x=0}=(au_{xx}(x,y)+cu_x(x,y))|_{x=l}\,,\end{array}\quad -p\le y\le q, \tag{5}$$

$$u(0,y)=\psi(y),\quad -p\le y\le q, \tag{6}$$

$$u(x,-p)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l\,, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $-$заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\varphi(0)=\varphi(l)\ ,\ \ \varphi'(0)=\varphi'(l).$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если существует решение нелокальной задачи* P_{ac}*, то оно единственно только тогда, когда при всех* $n\in N_0$ *выполнены условия*

$$\Delta_p(n)=cos\rho_n p+\rho_n sin\rho_n p\neq 0,$$

где $\rho_n^2=\lambda^2+{\mu_n}^2$, $\mu_n=\frac{2\pi n}{l}$, $n\in N_0=N\cup\{0\}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $\varphi_1(x)\in C^4[0,l]$, $\varphi_1^{(i)}(0)=\varphi_1^{(i)}(l)\,i=0,3$; $\psi(y)\in C^2[-p,q]$ и $\Delta_p(n)\ge\delta>0$, $\forall n\in N_0$. *Тогда существует единственное решение задачи* P_{ac} *и оно определяется по формуле*

$$u(x,y)=\frac{1}{c^2}\psi(y)exp\left\{-\frac{c}{a}x\right\}+v(x,y),$$

$$v(x,y)=\frac{1}{\sqrt{l}}v_0(y)+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[v_n(y)cos\mu_n x+\omega_n(y)sin\mu_n x\right]\ .$$

принадлежащий к классу (3), где $\varphi_1(x)=a\varphi'(x)+c\varphi(x)$,

$$v_0(y)=\begin{cases}\frac{\varphi_{10}}{\Delta_p(0)}exp\left\{-\lambda^2 y\right\}, & y>0\ ,\\ \frac{\varphi_{10}}{\Delta_p(0)}\left(cos\lambda y-\lambda sin\lambda y\right), & y<0,\end{cases}\quad v_n(y)=\begin{cases}\frac{\varphi_{1n}}{\Delta_p(n)}exp\left\{-\rho_n^2 y\right\}, & y>0\ ,\\ \frac{\varphi_{1n}}{\Delta_p(n)}\left(cos\rho_n y-\rho_n sin\rho_n y\right), & y<0,\end{cases}$$

$$\omega_n(y)=\begin{cases}\frac{\tilde{\varphi}_{1n}}{\Delta_p(n)}exp\left\{-\rho_n^2 y\right\}, & y>0,\\ \frac{\tilde{\varphi}_{1n}}{\Delta_p(n)}\left(cos\rho_n y-\rho_n sin\rho_n y\right), & y<0,\end{cases}$$

$$\varphi_{10}=\frac{1}{\sqrt{l}}\int_0^l\varphi_1(x)\,dx\ ,\quad \varphi_{1n}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\varphi_1(x)\,cos\mu_n x dx,\quad \tilde{\varphi}_{1n}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l x\,\varphi_1(x)\,sin\,\mu_n x dx\,.$$

С использованием методов общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, математического и спектрального анализа доказываются теоремы 1 и 2 (см. [1], с. 95–105).

Литература

1. **Сабитов К.Б.** *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.* Москва. 2016. "Наука". 271 с.

2. **Islomov B.I., Kilishbaeva G.K.** *Boundary value problems for third-order mixed equations in the rectangular domain.* Science and Education in Karakalpakstan. 2022. 2/1(24). P.32-41.

3. **Islomov B. I., Kylyshbaeva G. K.** *On a boundary value problem for a third order elliptic-hyperbolic equation with superposition operators of the first and second orders in a rectangular domain.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. **45**(11). P. 5413–5423.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЪЕДИНЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА И МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В ВИДЕ СУММЫ

Исмоилов О. Б.[1], Салиев И. Б.[2], Азимов Д. Б.[3], Машарипов Ф. М.[4]
[1] Хорезмское отделение Института математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ургенч, Узбекистан bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com
[2]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха; saliev22islam93@gmail.com
[3]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; doniyor.azimov.97@bk.ru
[4]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни;

В этой работе изучается интегрирование уравнения мКдФ-нмКдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t + 6q^2q_x - q_{xxx} + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, t)\psi_1^+(x, \lambda_k, t)\psi_2^-(x, \lambda_k, t), \\ \_\mu_x = -q^2 \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in R. \tag{1}$$

Требуется найти решение $q(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad [q_t(x,t) - \mu_t(x,t)]|_{x=0} = \beta(t), \tag{2}$$

$$q(x+\pi, t) = q(x,t), t \geq 0, \quad x \in R,$$

$$\begin{array}{c} q(x,t) \in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \\ \mu(x,t) \in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \end{array} \tag{3}$$

где $q_0(x) \in C^3(R)$,$\gamma(t) \in C[0,\ \infty)$, $\mu_0(t) \in C^1[0,\ \infty)$ и $\beta(t) \in C[0,\ \infty)$ заданные действительные функции, $q_0(x)$ имеет период π, а функция $\beta(t)$ ограничена.
В рассматриваемой задаче $\alpha_k(t) \in C([0,\ \infty))$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\alpha_k(t) = O\left(k^{-3}\right),\ k \to \pm\infty$,
$\psi^{\pm} = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\ \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ - решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, x \in R, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t),\ s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = (0,\ 1)^T$.

Спектр оператора (4) состоит из множества $E = \bigcup\limits_{n\in Z}[\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n \in Z$ задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (4) вместе со знаками $\sigma_n(t) = sign\left\{s_2(\pi, \xi_n(t), t) - 1/s_2(\pi, \xi_n(t), t)\right\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (4).

Целью данной работы является интегрирования комбинированного уравнения мКдФ-нмКдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций с помощью методом обратной спектральной задачи.

Литература

1. **M. Allami, A.K. Mutashar, A.S. Rashid** *On solutions of the combined KdV-nKdV equation.* // Al-Mustansiriyah Journal of Science. - 2019. - V. 30. - No. 2. - P. 33-45.
2. **Baltaeva I., Khasanov M.M., Rakhimov I.D.** *A generalized (G'/G)-expansion method for the combined mKdV-nmKdV equation.* // "Ali Qushji – an outstanding ambassador of the scientific school of

Ulughbeg" celebrating the 620th anniversary of Ali Qushji's birth international conference. - Samarkand, Uzbekistan. - September 21-22, 2023. - P. 353-355.
3. **Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Исмоилов О.Б.** *Интегрирование объединенного уравнения мКдФ-нмКдФ в классе периодических функций.* // Ali Qushchining 620 yillik tavalludiga bag'ishlangan "Ali Qushchi – Mirzo Ulug'Bek Ilmiy maktabining buyuk elchisi" mavzusidagi xalqaro ilmiy anjuman materiallari. - Samarqand, O'zbekiston. - 2023-Yil 21-22 Sentyabr. - C. 194-195.
4. **Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Азимов Д.Б.** *Интегрирование объединенного уравнения КдФ-нКдФ в классе периодических функций.* // Тезисы докладов международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». - Ташкент. - 23-25 ноября, 2023 г. - С. 266-267.

УДК 517.95

Условная корректность задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения третьего порядка

Фаязов К.С.[1], Хажиев И.О.[2]
[1]Туринский политехнический университет в г. Ташкенте,
e-mail: kudratillo52@mail.ru
[2]Национальный университет Узбекистана,
Туринский политехнический университет в г. Ташкенте,
e-mail: kh.ikrom04@gmail.com

Пусть $u(t) : [0, T] \to H$ — функция скалярного аргумента со значениями в гильбертовом пространстве H.

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение третьего порядка

$$Bu_{ttt}(t) = Au(t) + Bf(t) \tag{1}$$

где $A : D(A) \subset H \to H$ — плотно определенный самосопряженный положительный оператор, $B : H \to H$ — самосопряженный оператор, являющийся изоморфизмом H на H, а $f(t) \in H$ — заданная функция.

Пусть спектр оператора B содержит как положительную, так и отрицательную части. Обозначим через E^+ и E^- спектральные проекторы, соответствующие положительной и отрицательной частям спектра оператора B. Тогда $E^+ + E^- = I$, $E^+E^- = 0$, и

$$H = H^+ \oplus H^-, \quad H^+ = E^+H.$$

Задача Коши. Найти решение уравнения (1) такое, что

$$u|_{t=0} = \xi, \quad u_t|_{t=0} = \psi, \quad u_{tt}|_{t=0} = \zeta. \tag{2}$$

В случае $B = I$ задача для дифференциальных уравнений первого и второго порядков исследованы в работах [1, 2]. Для более общих случаев аналогичные задачи рассмотрены в [4]. В исследовании [5] изучены вопросы условной корректности и построения приближённых решений для дифференциальных уравнений четвёртого и 2^n-го порядков, $n \in \mathbb{N}$.

Рассматриваемая нами задача (1), (2) относится к некорректно поставленным задачам математической физики. В настоящей работе получена оценка условной устойчивости решения задачи (1), (2), а также доказаны теоремы единственности и условной устойчивости. Это дает нам возможность построить регуляризованное приближенное решение поставленной задачи.

В работе [4] исследовано свойство собственных функций спектральной задачи вида

$$Au = \lambda Bu. \tag{3}$$

Пусть $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H, $B = E^+ - E^-$. Пусть φ_k^+, φ_k^- — собственные функции задачи (3), соответствующие положительным λ_k^+ и отрицательным λ_k^- собственным значениям. Нормируем собственные функции

$$(B\varphi_l^\pm, \varphi_k^\pm) = \pm\delta_{l,k},$$

($\delta_{l,k}$ — символ Кронекера).

В работе [4] доказано, что собственные функции задачи (3) образуют базис Рисса в H. Тогда имеем

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^+(t)\varphi_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^-(t)\varphi_k^-, \tag{4}$$

где $u_k^{\pm} = \pm(Bu, \varphi_k^{\pm})$,

$$\|u\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(|(Bu, \varphi_k^+)|^2 + |(Bu, \varphi_k^-)|^2 \right), \tag{5}$$

причем данная норма эквивалентна исходной норме пространства H. Кроме того, для любого $p \geq 0$ определим пространство $H_p = D(A^p)$, где $D(A^p)$ — область определения дробной степени оператора A^p:

$$D(A^p) = \{u \in H : A^p u \in H\}.$$

На пространстве H_p введем норму

$$\|u\|_{D(A^p)} = \|A^p u\|_0. \tag{6}$$

При $p = 0$ оператор A^0 является тождественным оператором, поэтому

$$H_0 = D(A^0), \quad \|u\|_0 = \|A^0 u\|_0.$$

Тогда для дробных степеней оператора A соответствующие нормы имеют спектральное представление, эквивалентное

$$\|u\|_{D(A^p)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^+|^{2p} |u_k^+|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^-|^{2p} |u_k^-|^2.$$

Лемма 1. Пусть $u(t)$ является решением задачи

$$\frac{d^3u}{dt^3} - \mu^2 u = f(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда справедлива оценка

$$\|u(t)\|^2 \leq 4 \left(\|u(0)\|^2 + \alpha \right)^{1-t/T} \left(\|u(T)\|^2 + \alpha \right)^{t/T} + 2\alpha,$$

где

$$\alpha = 4T \int_0^T \left(2\|u_t(0)\|_0^2 + 2\|u(0)\|_{D(A^{1/3})}^2 + \beta \right)^{1-t/T} \left(2\|u_t(T)\|_0^2 + 2\|u(T)\|_{D(A^{1/3})}^2 + \beta \right)^{t/T} dt + 2\beta T^2,$$

$$\beta = 4T \int_0^T \left(3 \sum_{j=0}^{2} \left\| \frac{d^j u}{dt^j}\Big|_{t=0} \right\|_{D(A^{(2-j)/3})}^2 + T \int_0^T \|f(s)\|_0^2 ds \right)^{1-t/T}$$
$$\times \left(3 \sum_{j=0}^{2} \left\| \frac{d^j u}{dt^j}\Big|_{t=T} \right\|_{D(A^{(2-j)/3})}^2 + T \int_0^T \|f(s)\|_0^2 ds \right)^{t/T} dt + 2T^3 \int_0^T \|f(s)\|_0^2 ds.$$

Введем обозначение

$$M = \left\{ u(t) : \sum_{j=0}^{2} \left\| \frac{d^j u}{dt^j}\Big|_{t=T} \right\|_{D(A^{(2-j)/3})}^2 \leq m^2 \right\}.$$

Теорема 1. Пусть решение задачи (1)–(2) существует и $u(t) \in M$. Тогда решение задачи (1)–(2) единственно.

Теорема 2. Пусть операторы A и B удовлетворяют указанным выше условиям и $u(t), u_\varepsilon(t) \in M$. Предположим, что

$$\|\xi - \xi_\varepsilon\|_{D(A^{2/3})} \le \varepsilon, \quad \|\psi - \psi_\varepsilon\|_{D(A^{1/3})} \le \varepsilon, \quad \|\zeta - \zeta_\varepsilon\|_0 \le \varepsilon, \ \max_{0\le t\le T} \|f(t) - f_\varepsilon(t)\|_0 \le \varepsilon.$$

Тогда для любого $t \in (0,T)$ справедлива оценка

$$\|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_0 \le \omega(t,\varepsilon,m)$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \omega(t,\varepsilon,m) = 0, \quad 0 \le t < T,$$

где

$$\omega(t,\varepsilon,m) = \left[4(\varepsilon^2+\alpha_\varepsilon)^{1-t/T}(4m^2+\alpha_\varepsilon)^{t/T} + 2\alpha_\varepsilon\right]^{1/2},$$

$$\alpha_\varepsilon = 4T^2 L(4\varepsilon^2+\beta_\varepsilon, 8m^2+\beta_\varepsilon) + 2T^2\beta_\varepsilon, \ \beta_\varepsilon = 4T^2 L((9+T^2)\varepsilon^2, 12m^2+T^2\varepsilon^2) + 2T^4\varepsilon^2.$$

$u_\varepsilon(t)$ - решение задачи (1), (2) с приближенными данными ξ_ε, ψ_ε, ζ_ε в условии (2), $L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$, $a, b > 0$, $a \ne b$, и $L(a,a) = a$.

Литература

1. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. **Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.** Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. – 941 с.
3. **Пятков С.Г.** Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. – Новосибирск, 1986. – С. 65–84.
4. **Фаязов К.С.** Некорректная задача Коши для дифференциального уравнения первого и второго порядков с операторными коэффициентами // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т. 35, № 3. – С. 702–706.
5. **Фаязов К.С., Хажиев И.О.** Некорректная начально-краевая задача для уравнения смешанного типа высокого порядка // Сиб. электрон. матем. изв. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 179–190.

УДК 517.956.6

Нелокальная задача на собственные значения для уравнения смешанного типа второго рода с двумя линиями вырождения

Каримов К. Т.[1], **Фармонов Ш. Р.**[2]
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
[1]**karimovk80@mail.ru** [2]**farmonovsh@gmail.com**

Пусть Ω — конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная отрезками $\overline{AB} = \{(x,y)\colon x+y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$, $\overline{DO} = \{y=0,\ -1\le x\le 0\}$, $\overline{EO} = \{x=0,\ -1\le y\le 0\}$ и характеристическими дугами $\overline{BD} = \{(x,y)\colon \sqrt{-x}+\sqrt{y}=1,\ x\le 0,\ y\ge 0\}$, $\overline{EA} = \{(x,y)\colon \sqrt{x}+\sqrt{-y}=1,\ x\ge 0,\ y\le 0\}$.

Координатные оси $x=0$, $y=0$ и прямая $x+y=0$ разбивают Ω на пять подобластей: $\Omega_0 = \Omega\cap\{x>0,\ y>0\}$, $\Omega_j = \Omega\cap\{\kappa_j(x+y)>0,\ \sigma_j x+\sigma_{j-1}y<0\}$, $j=\overline{1,4}$, где $\kappa_j = (-1)^{[(j-1)/2]}$, $\sigma_j = \frac{1+(-1)^j}{2}$, а $[\cdot]$ — целая часть числа. Обозначим $G = \Omega\setminus\{xy(x+y)=0\}$.

В области G рассматривается уравнение

$$L_{\alpha,\alpha}[u] \equiv x\,u_{xx} + y\,u_{yy} + \alpha\,u_x + \alpha\,u_y + sgn(x+y)\,\lambda\,u = 0, \tag{1}$$

где $0<\alpha<\frac{1}{2}$, λ — спектральный параметр. Введём обозначения

$$\beta = \alpha - \frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \qquad \sigma = 1-\alpha > \frac{1}{2}.$$

Задача $F_\lambda^{(3)}$. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,2}_{x,y}(G)$, удовлетворяющие уравнению (1) и следующим условиям:

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \overline{AB}; \tag{2}$$

$$u(x,0) + m\,u(-x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1; \qquad u(0,y) - m\,u(0,-y) = 0, \quad 0 \le y \le 1; \tag{3}$$

$$u\big[x, -(1-\sqrt{x})^2\big] = u\big[(1-\sqrt{x})^2, -x\big], \quad \tfrac{1}{4} \le x \le 1; \tag{4}$$

$$u\big[-(1-\sqrt{y})^2, y\big] = u\big[-y, (1-\sqrt{y})^2\big], \quad \tfrac{1}{4} \le y \le 1; \tag{5}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^\alpha u_y = -\lim_{y\to+0} y^\alpha u_y, \quad 0 < x < 1; \tag{6}$$

$$\lim_{x\to-0}(-x)^\alpha u_x = -\lim_{x\to+0} x^\alpha u_x, \quad 0 < y < 1. \tag{7}$$

Здесь $m = \pm 1$.

При $\lambda \ne 0$ нетривиальные в $\overline{\Omega}_0$ решения задачи $F_\lambda^{(3)}$ ищем методом разделения переменных. Введём обобщённые полярные координаты

$$\sqrt{x} = r\cos\varphi, \qquad \sqrt{y} = r\sin\varphi, \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Подстановка $u(x,y) = R(r)\Phi(\varphi)$ в (1) и замена $\widetilde{R}(r) = r^{2\beta}R(r)$ приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$r^2\widetilde{R}''(r) + r\widetilde{R}'(r) + (\lambda r^2 - \omega^2)\widetilde{R}(r) = 0, \qquad 0 < r < 1; \tag{8}$$

$$\Phi''(\varphi) + 4\beta\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}\,\Phi'(\varphi) + (\omega^2 - 4\beta^2)\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Ограниченное при $r \to 0$ решение уравнения (8) имеет вид

$$R(r) = r^{-2\beta}J_\omega(2\sqrt{\lambda}\,r), \qquad \operatorname{Re}\omega > -2\beta.$$

Замена $t = \sin^2\varphi$ сводит (9) к гипергеометрическому уравнению Гаусса с параметрами

$$a = \beta + \frac{\omega}{2}, \quad b = \beta - \frac{\omega}{2}, \quad c = \frac{1}{2} + \beta.$$

Тогда общее решение уравнения (1) в области Ω_0 записывается следующим образом:

$$u(x,y) = r^{-2\beta}J_\omega(2\sqrt{\lambda}\,r)\Big\{c_1F\big(\beta+\tfrac{\omega}{2}, \beta-\tfrac{\omega}{2}; \tfrac{1}{2}+\beta; \sin^2\varphi\big) + c_2(\sin^2\varphi)^\sigma F\big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\omega}{2}, \tfrac{1}{2}-\tfrac{\omega}{2}; \tfrac{3}{2}-\beta; \sin^2\varphi\big)\Big\}. \tag{10}$$

Отсюда на линиях вырождения получим

$$\begin{aligned} u(x,0) &= c_1\,x^{-\beta}J_\omega\left(2\sqrt{\lambda x}\right), \qquad 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) &= \left[k_1(\omega)c_1 + k_2(\omega)c_2\right] y^{-\beta}J_\omega\left(2\sqrt{\lambda y}\right), \qquad 0 \le y \le 1, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$k_1(\omega) = \frac{\cos(\omega\pi/2)}{\cos(\beta\pi)}, \qquad k_2(\omega) = \frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}-\beta\big)\Gamma\big(\frac{1}{2}-\beta\big)}{\Gamma\big(1-\beta+\frac{\omega}{2}\big)\Gamma\big(1-\beta-\frac{\omega}{2}\big)}. \tag{12}$$

В области $\overline{\Omega}_1$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$W(x,y) = u(x,y) - u(-y,-x).$$

Оператор $L_{\alpha,\alpha}$ инвариантен относительно замены $(x,y) \mapsto (-y,-x)$.

Следовательно, функция $W(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в области Ω_1 и условию

$$W|_{x+y=0} = 0.$$

Согласно (4), $W(x,y)$ обращается в нуль также на характеристической дуге $\overline{EA}\cap\partial\Omega_1$. По теореме единственности задачи Гурса для гиперболического уравнения с данными на двух характеристиках [1] имеем $W\equiv 0$ в области $\overline{\Omega}_1$, т.е.

$$u(x,y)=u(-y,-x)\qquad (x,y)\in\overline{\Omega}_1. \tag{13}$$

Аналогично из условия (5) получим

$$u(x,y)=u(-y,-x)\qquad (x,y)\in\overline{\Omega}_2. \tag{14}$$

Переходя в (13), (14) к пределу при $y\to -0$ и $x\to -0$ соответственно и используя непрерывность решения в $\overline{\Omega}$, находим

$$u(x,0)=u(0,-x),\qquad u(0,y)=u(-y,0),\quad 0\le x,y\le 1. \tag{15}$$

Из (15) вытекает

$$u(-x,0)=u(0,x),\qquad u(0,-x)=u(x,0).$$

Подставляя эти тождества в нелокальные условия (3), приходим к однородной алгебраической системе

$$\begin{pmatrix} 1 & m\\ -m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(x,0)\\ u(0,x)\end{pmatrix}=0.$$

Определитель матрицы равен $1+m^2=2\neq 0$, поэтому

$$u(x,0)\equiv 0,\qquad u(0,x)\equiv 0\qquad x\in[0,1]. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (11), получим

$$c_1=0,\qquad c_2k_2(\omega)=0.$$

Так как $c_2\neq 0$, необходимо $k_2(\omega)=0$. Числитель функции $k_2(\omega)$ конечен и отличен от нуля при $\beta\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$. Следовательно, нули $k_2(\omega)$ совпадают с полюсами гамма-функции $\Gamma\left(1-\beta-\frac{\omega}{2}\right)$. Отсюда

$$\omega_n=2(n+1-\beta),\qquad n=0,1,2,\dots \tag{17}$$

Полученная последовательность $\{\omega_n\}$ не зависит от знака $m=\pm 1$.

Условие Дирихле (2) при $r=1$ даёт $J_{\omega_n}(2\sqrt{\lambda})=0$.

Обозначим через $\theta_{n,k}$ k-й положительный нуль функции Бесселя $J_{\omega_n}(z)$. Тогда собственные значения задачи $F_\lambda^{(3)}$ определяются формулой

$$\lambda_{n,k}=\frac{\theta_{n,k}^2}{4},\qquad n=0,1,2,\dots,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{18}$$

Подставляя $\omega=\omega_n$, $\lambda=\lambda_{n,k}$ в (10) с учётом $c_1=0$, получаем собственные функции в эллиптической подобласти Ω_0:

$$u_{n,k}(x,y)=c_{n,k}(x+y)^{-\beta}J_{\omega_n}\left(\theta_{n,k}\sqrt{x+y}\right)\left(\frac{y}{x+y}\right)^{\sigma}F\left(\tfrac{1-\omega_n}{2},\tfrac{1+\omega_n}{2};\tfrac{3}{2}-\beta;\frac{y}{x+y}\right), \tag{19}$$

где $c_{n,k}\neq 0$ — произвольные постоянные.

В гиперболических подобластях Ω_j $(j=\overline{1,4})$ собственные функции однозначно восстанавливаются как решения соответствующих видоизменённых задач Коши. При этом используются условия сопряжения (6), (7) и установленная симметрия $u(x,y)=u(-y,-x)$ в областях Ω_1 и Ω_2.

Теорема. *Система собственных функций $\{u_{n,k}\}$, определяемая формулами (19), полна в пространстве $L_2(\Omega_0)$.*

Доказательство. Угловые функции

$$\Phi_n(\varphi)=(\sin^2\varphi)^{\sigma}F\left(\tfrac{1-\omega_n}{2},\tfrac{1+\omega_n}{2};\tfrac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right)$$

являются собственными функциями сингулярной задачи Штурма–Лиувилля

$$\left(\sin^{2\beta}(2\varphi)\,\Phi'\right)' + \omega^2 \sin^{2\beta}(2\varphi)\,\Phi = 0$$

с нулевыми граничными условиями на концах интервала $(0, \pi/2)$. Согласно спектральной теории сингулярных задач [3], система $\{\Phi_n\}$ полна и ортогональна в весовом пространстве $L_2\big(0, \pi/2; \sin^{2\beta}(2\varphi)\,d\varphi\big)$. При каждом фиксированном n система радиальных функций $\{J_{\omega_n}(\theta_{n,k}r)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $L_2(0,1;r\,dr)$ [2]. Так как отображение $(r,\varphi) \mapsto (x,y)$ является взаимно однозначным с положительным якобианом внутри Ω_0, отсюда следует полнота системы $\{u_{n,k}\}$ в пространстве $L_2(\Omega_0)$.

Таким образом, в работе построены собственные значения и собственные функции нелокальной задачи $F_\lambda^{(3)}$ для уравнения смешанного типа второго рода с двумя линиями вырождения, а также установлена полнота соответствующей системы собственных функций в эллиптической части области.

Литература

1. **Салахитдинов М.С., Уринов А.К.** *К спектральной теории уравнений смешанного типа.* Т.: Mumtoz so'z, 2010. 356 с.
2. **Ватсон Дж.Н.** *Теория бесселевых функций.* Т. 1. М.: ИЛ, 1949. 798 с.
3. **Наймарк М.А.** *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. 528 с.

УДК 517.9

Фундаментальные решения дифференциально – разностного бипараболического уравнения и их свойства

Каримов Ш. Т. [1], Толибжонов Б.Б. [2]
[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан; shaxkarimov@gmail.com
[2]Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан; botir20000102@gmail.com

В области $\Omega = \{(x,t):\ x \in R,\, t \in R_+\}$, $R = (-\infty, +\infty)$, $R_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим задачу нахождения фундаментального решения $E_1(x,t)$ уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 E_1(x,t) + bE_1(x-h,t) = 0 \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$E_1|_{t=0} = \delta(x),\ \ E_{1t}|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

где $a > 0,\ h \neq 0,\ b \neq 0$ - заданные вещественные числа, $\delta(x)$ -Дельта функция Дирака.

Применим формально к равенству (1) преобразование Фурье по переменной x, действующее по правилу

$$\hat{E_1}(\xi,t) := F_x[E_1(x,t)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_1(x,t)\,e^{-i\xi x}dx$$

и перейдем к двойственной переменной $\xi \in R$. Получим для функции $\hat{E_1}(\xi,t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\hat{E_1}(\xi,t)}{dt^2} + 2a^2\xi^2\frac{d\hat{E_1}(\xi,t)}{dt} + \left(a^4\xi^4 + be^{-i\xi h}\right)\hat{E_1}(\xi,t) = 0, \quad \xi \in R \tag{3}$$

общее решение которого определяется по формуле

$$\hat{E_1}(\xi,t) = e^{-a^2\xi^2 t}\left[\tilde{C_1}\cos\left(\sqrt{b}te^{-i\xi\frac{h}{2}}\right) + \tilde{C_2}\sin\left(\sqrt{b}te^{-i\xi\frac{h}{2}}\right)\right]$$

где $\tilde{C}_1(\xi)$ и $\tilde{C}_2(\xi)$- произвольные постоянные, зависящие от параметра $\xi \in R$. Учитывая начальные условия (2), получим $\tilde{C}_1 = 1$ и $\tilde{C}_2 = \frac{a^2\xi^2 e^{i\xi\frac{h}{2}}}{\sqrt{b}}$.

Найдем частное решение уравнения (3)

$$\hat{E}_1(\xi,t) = e^{-a^2\xi^2 t}\left[\cos\left(\sqrt{b}te^{-i\xi\frac{h}{2}}\right) + \frac{a^2\xi^2 e^{i\xi\frac{h}{2}}}{\sqrt{b}}\sin\left(\sqrt{b}te^{-i\xi\frac{h}{2}}\right)\right]$$

К найденной функции теперь применим обратное преобразование Фурье, определяемое формулой

$$F_\xi^{-1}\left[\hat{E}_1(x,t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{E}_1(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi$$

и получим после преобразований выражение

$$E_1(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{E}_1(x,t)e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\left(\sqrt{b}te^{-i\xi\frac{h}{2}}\right)}{e^{a^2\xi^2 t}}e^{i\xi x}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[e^{-t\left(a^2\xi^2-\sqrt{b}\sin\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)}\cos\left(\left(\sqrt{b}t\cos\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)+\xi x\right)+\right.$$

$$\left.+e^{-t\left(a^2\xi^2+\sqrt{b}\sin\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)}\cos\left(\left(\sqrt{b}t\cos\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)-\xi x\right)\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{b}}\int\limits_{0}^{+\infty}a^2\xi^2\left\{e^{-t\left(a^2\xi^2-\sqrt{b}\sin\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)}\sin\left[\left(\sqrt{b}t\cos\xi\frac{h}{2}\right)+\left(\xi\left(\frac{h}{2}+x\right)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+e^{-t\left(a^2\xi^2+\sqrt{b}\sin\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)}\sin\left[\left(\sqrt{b}t\cos\xi\frac{h}{2}\right)-\left(\xi\left(\frac{h}{2}+x\right)\right)\right]\right\}d\xi \qquad (4)$$

Это является первым фундаментальным решением дифференциально –разностного бипараболического уравнения (1).

Теорема 1. Функция (4) является гладким (классическим) решением уравнения (1) при любом вещественном значении ξ.

Верны следующие утверждения:

Лемма 1. Пусть $t > 0,\ a, h, b \in R$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^2 E_1(x,t) = 0.$$

Лемма 2. Пусть $t > 0,\ a, h, b \in R$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^2\frac{\partial^4 E_1}{\partial x^4} = 0.$$

Лемма 3. Пусть $t > 0,\ a, h, b \in R$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^2\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = 0.$$

Лемма 4. Пусть $t > 0,\ a, h, b \in R$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^2\frac{\partial^3 E_1}{\partial t\partial x^2} = 0.$$

Таким же методом находится второе фундаментальное решение $E_2(x,t)$, которое определяется как решение уравнения (1) удовлетворяющее начальным условиям

$$E_2|_{t=0} = 0, \;\; E_{2t}|_{t=0} = \delta(x). \tag{5}$$

Учитывая начальные условия (5) из общего решения (3), получим $\tilde{C}_1 = 0$ и $\tilde{C}_2 = 1$, тогда другое частное решение уравнения (3), примет вид

$$\hat{E}_2(\xi,t) = \frac{\sin\left(\sqrt{b}te^{-i\xi\frac{h}{2}}\right)e^{i\xi\frac{h}{2}}}{e^{a^2\xi^2t}\sqrt{b}}$$

К найденной функции теперь применим обратное преобразование Фурье и получим после преобразований выражение

$$E_2(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{E}_2(x,t)e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^{a^2\xi^2t}\sqrt{b}}\sin\left(\sqrt{b}te^{-i\xi\frac{h}{2}}\right)e^{i\xi\frac{h}{2}}e^{i\xi x}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{b}}\int\limits_{0}^{+\infty}\left\{e^{-t\left(a^2\xi^2-\sqrt{b}\sin\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)}\sin\left[\left(\sqrt{b}t\cos\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)+\left(\xi\left(\frac{h}{2}+x\right)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+e^{-t\left(a^2\xi^2+\sqrt{b}\sin\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)}\sin\left[\left(\sqrt{b}t\cos\left(\xi\frac{h}{2}\right)\right)-\left(\xi\left(\frac{h}{2}+x\right)\right)\right]\right\}d\xi \tag{6}$$

Это является вторым фундаментальным решением дифференциально –разностного бипараболического уравнения (1).

Теорема 2. Функция (6) является гладким (классическим) решением уравнения (1) при любом вещественном значении ξ.

Верны следующие утверждения.

Лемма 5. Пусть $t > 0, \;\; a, h, b \in R$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^2 E_2(x,t) = 0.$$

Лемма 6. Пусть $t > 0, \;\; a, h, b \in R$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{\partial^4 E_2}{\partial x^4} = 0.$$

Лемма 7. Пусть $t > 0, \;\; a, h, b \in R$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = 0.$$

Лемма 8. Пусть $t > 0, \;\; a, h, b \in R$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \frac{\partial^3 E_2}{\partial t \partial x^2} = 0.$$

Литература

1. **Муравник А.Б.** *Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши,* СМФН, 2014, том 52, 3–141.

2. **Зайцева Н.В.** *Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений:* монография - Москва: Издательство Московского университета, 2025. - 100 с.

Начально-краевая задача для бикалорического уравнения с оператором Бесселя и со спектральным параметром.

Каримов Ш. Т. [1], **Рахимова Ш. У.** [2]
[1]**Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;**
shaxkarimov@gmail.com
[2]**Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;**
Ферганский государственный технический университет, Фергана, Узбекистан;
raximovashohsanam1993@gmail.com

Исследование дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами, содержащих оператор Бесселя, а также краевых и начально-краевых задач для них является одним из важных направлений современной математической физики. При исследовании таких уравнений для устранения трудностей, связанных с сингулярностью, применяются операторы преобразования и интегральные операторы. В частности, свойства операторов Эрдейи–Кобера позволяют эффективно исследовать уравнения с оператором Бесселя.

При исследовании краевых задач для сингулярных бикалорических уравнений высокого порядка с оператором Бесселя важное значение имеют взаимодействие операторов, входящих в состав уравнения, и наличие сингулярных коэффициентов. Введение в уравнение дополнительного слагаемого $\lambda^2 u(x,t)$ усложняет структуру уравнения и обусловливает необходимость адаптации существующих методов к данному новому случаю.

В настоящей работе рассматривается задача нахождения классического решения неоднородного сингулярного бикалорического уравнения с оператором Бесселя и параметром λ:

$$L_\gamma^2 u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - B_\gamma^x\right)^2 u(x,t) + \lambda^2 u(x,t) = f(x,t), \qquad x > 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

где

$$B_\gamma^x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\gamma+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma > -\frac{1}{2},$$

B_γ^x – оператор Бесселя, λ – параметр, $f(x,t)$ – заданная функция, а $u(x,t)$ – неизвестная функция.

Постановка задачи. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \qquad x \geq 0, \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_{xxx}(0,t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{3}$$

Здесь $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям согласования:

$$\varphi_0'(0) = 0, \qquad \varphi_1'(0) = 0, \qquad \varphi_0'''(0) = 0.$$

Задачу решим методом операторов преобразований.

Определение. [1,2] Пусть дана пара операторов (A, B). Ненулевой оператор T называется оператором преобразования (ОП, transmutation), если выполняется соотношение

$$TA = BT.$$

Такой оператор позволяет свести уравнение со сложным оператором A к уравнению с более простым оператором B, свойства которого известны.

Одним из таких операторов преобразования является оператор Эрдейи–Кобера. Его связь с оператором Бесселя выражается следующей теоремой.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $L^{(x)}$ – не зависящий от y линейный дифференциальный оператор порядка k по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Через M обозначим класс функций $u(x,y) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, непрерывно дифференцируемых включительно до порядка $2m-1$ по

переменной y и $km-1$-ого порядка по переменной x в области $\Omega\{y>0\}$, а также порядка $2m$ по y и порядка km по x в области $\Omega\{y>0\}$.

$$\alpha>0, \qquad \eta\geq-\frac{1}{2}, \qquad u(x,y)\in M.$$

Теорема 1. [1,2] Пусть функции

$$y^{2\eta+1}[B_\eta^y]^k u(x,y), \qquad k=0,\ldots,m-1,$$

интегрируемы в окрестности начала координат и

$$\lim_{y\to0+} y^{2\eta+1}\frac{\partial}{\partial y}[B_\eta^y]^k u(x,y)=0, \qquad k=0,\ldots,m-1.$$

Тогда имеет место равенство

$$\left(B_{\eta+\alpha}^y\pm\lambda^2+L^{(x)}\right)^m J_\lambda^{(y)}(\eta,\alpha)u(x,y)=J_\lambda^{(y)}(\eta,\alpha)\left(B_\eta^y\pm L^{(x)}\right)^m u(x,y),$$

в частности, если $\lambda=0$, тогда

$$\left(B_{\eta+\alpha}^y\pm L^{(x)}\right)^m I_{\eta,\alpha}^{(y)}u(x,y)=I_{\eta,\alpha}^{(y)}\left(B_\eta^y\pm L^{(x)}\right)^m u(x,y).$$

Здесь верхние индексы в операторах означают переменные, по которым действуют эти операторы, где $J_\lambda^{(y)}(\eta,\alpha)$ – обобщённый оператор Эрдейи–Кобера (оператор Лаундеса), который имеет вид [3]:

$$J_\lambda(\eta,\alpha)\varphi(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x^2-t^2)^{\alpha-1}J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)t^{2\eta+1}\varphi(t)\,dt, \qquad \alpha>0,$$

при $\lambda=0$,

$$I_{\eta,\alpha}\varphi(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x^2-t^2)^{\alpha-1}t^{2\eta+1}\varphi(t)\,dt, \qquad \alpha>0.$$

Таким образом, оператор Эрдейи–Кобера, являясь оператором дробного интегрирования, одновременно может рассматриваться как оператор преобразования (трансмутация), позволяющий сводить дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами, содержащие оператор Бесселя, к более простым уравнениям без оператора Бесселя.

Предположим, что решение задачи (1)–(3) существует. Будем искать его в виде результата действия оператора Эрдейи–Кобера по переменной x:

$$u(x,t)=I_{-\frac{1}{2},\alpha}^{(x)}U(x,t), \qquad \eta=-\frac{1}{2}, \qquad \alpha=\gamma+\frac{1}{2}>0, \tag{4}$$

где $U(x,t)$ – неизвестная функция.

Подставляя (4) в уравнение (1) и начальные условия (2), при $L=\partial/\partial t$ и используя Теорему 1 при $\lambda=0$, а также учитывая краевые условия (3) и линейность оператора Эрдейи–Кобера, приходим к задаче нахождения функции $U(x,t)$ как решения следующего уравнения [1,2]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 U(x,t)+\lambda^2U(x,t)=F(x,t), \qquad x>0, \quad t>0, \tag{5}$$

удовлетворяющего следующим начальным условиям:

$$U(x,0)=\Phi_0(x), \qquad U_t(x,0)=\Phi_1(x), \tag{6}$$

и однородным краевым условиям:

$$U_x(0,t)=0, \qquad U_{xxx}(0,t)=0. \tag{7}$$

Здесь

$$F(x,t) = I^{-1}_{-\frac{1}{2},\alpha} f(x,t), \qquad \Phi_k(x) = I^{-1}_{-\frac{1}{2},\alpha} \varphi_k(x), \qquad k = 0, 1.$$

Таким образом, заданная функция $f(x,t)$ и начальные функции также преобразуются с помощью обратного оператора Эрдейи–Кобера. В результате исходная сингулярная задача сводится к задаче без оператора Бесселя, что является основным шагом рассматриваемого метода. Далее, решая задачу (5)–(7) методом чётного продолжения, а затем решаем задачу Коши методом свёртки, находя сначала фундаментальное решение оператора (5).

Литература

1. **Уринов А. К., Ситник С. М., Каримов Ш. Т.** *Операторы преобразования на основе различных форм дробного интегродифференцирования: (приложения к сингулярным дифференциальным уравнениям).* — LAP LAMBERT Academic Publishing, 2025. — 334 с.
2. **Уринов А. К., Каримов Ш. Т.** *Операторы Эрдейи–Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных.* — Фергана: «Фаргона», 2021.
3. **Самко С.Т., Килбас А.А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН, С НЕКЛАССИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ, В КЛАССАХ СОБОЛЕВА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ С ОПЕРАТОРОМ МИЛЛЕРА–РОССА

Касимов Ш. Г.[1], Тажимуратова А. К.[2]
[1]Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан; shokiraka@mail.ru
[2]Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан; asalkadirbergenovna@gmail.com

Введение. Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высо-кого порядка [1, с.143-147]. К уравнению колебаний балки приходит также при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2, гл. 2]. Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учётом их вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвёртого порядка [3, с. 364-374]. В работе [4] исследуются задачи с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины с разными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных трёх начально-граничных задач. В случае шарнирного закрепления пластины на краях доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщённых решений. В работе [5] изучена задача с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленной начально-граничной задачи. Для этой задачи доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классе регулярных и обобщённых решений.

Отметим, что в работе [6] доказано теорема об однозначной разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка с дробными производными по времени, со степенями операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева.

Постановка задачи. В данной работе в области $Q = \Pi \times (0,T)$, где $\Pi = (0,1) \times ... \times (0,1)$ есть N мерной область, а T – заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}_{j} u(x,t) + \sum_{p=1}^{N} \frac{\partial^{4m_p} u(x,t)}{\partial x_p^{4m_p}} = f(x,t),\ (x,t) \in Q,\ n-1 < \alpha \le n, \\ &0 \le j \le n-1,\ N,\ \ n,\ \ j+1 \in \mathbb{N},\ \ m_p \in \mathbb{N},\ \ p = \overline{1,N} \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} D_{j-i-1}^{\alpha-i-1}u(x,t)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i^0(x), \ \ i=0,\ ...,\ j-1, \\ \left.\frac{\partial^s u(x,t)}{\partial x^s}\right|_{t=0} = \varphi_s^0(x), \ \ s=0,\ ...,\ n-j-1 \end{cases} \tag{2}$$

и с неклассическими краевыми условиями

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^{4k_p}u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p}}\right|_{x_p=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^{4k_p+1}u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+1}}\right|_{x_p=0} = \left.\frac{\partial^{4k_p+1}u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+1}}\right|_{x_p=1}, \\ &\left.\frac{\partial^{4k_p+2}u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+2}}\right|_{x_p=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^{4k_p+3}u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+3}}\right|_{x_p=0} = \left.\frac{\partial^{4k_p+3}u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+3}}\right|_{x_p=1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $k_p = \overline{0,\ m_p-1}$, $p = \overline{1,\ N}$. Здесь $(x,t) = (x_1, ..., x_j, ..., x_N, t) \in Q$, а $f(x,t)$ и $\tilde{\varphi}_i^0(x), \ \ i=0,\ ...,\ j-1$, $\varphi_s^0(x), \ s=0,\ ...,\ n-j-1$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по систему собственных и присоединённых функций $\{\nu_n(x),\ n \in \overline{\mathbb{Z}_+}^N\}$ следующей спектральной задачи:

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{\partial^2 \nu(x)}{\partial x_p^2} - \lambda \nu(x) = 0, \tag{4}$$

$$\nu(x)\big|_{x_p=0} = 0, \ \ \left.\frac{\partial \nu(x)}{\partial x_p}\right|_{x_p=0} = \left.\frac{\partial \nu(x)}{\partial x_p}\right|_{x_p=1}, \ \ p = \overline{1,\ N}, \tag{5}$$

λ – спектральный параметр, D_j^α – интегро–дифференциальный оператор в смысле Миллера–Росса по Римана – Лиувилля.

Пусть $f(t): \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ функция n раз непрерывно дифференцируемая и $n-1 \le \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. Выберем некоторое $\nu, \ n-1 \le \nu < n$, $n \in \mathbb{N}$ и пусть $\alpha = (j,\ \nu-n+1,\ n-1-j)$, $j = 0, ..., \ n-1$. Определим производные дробного порядка в смысле Миллера – Росса по Римана – Лиувилля и в смысле Миллера – Росса по Капута с равенствами соответственно

$$\mathrm{D}_j^\nu f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{\nu-n+1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t), \ \ \mathrm{D}_j^{(\nu)} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{(\nu-n+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t),$$

где $j = 0, 1, \ ..., \ n-1$.

Эти производные дробного порядка в смысле Миллера – Росса по Римана – Лиувилля $\mathrm{D}_j^\nu f(t)$ и в смысле Миллера – Росса по Капута $\mathrm{D}_j^{(\nu)} f(t)$ связаны с равенствами

$$\mathrm{D}_j^{(\nu)} f(t) = \mathrm{D}_{j-1}^\nu f(t) = \mathrm{D}^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=n-j}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) =$$

$$= \mathrm{D}^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1-j} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

где $n-1 \le \nu < n$, $n \in \mathbb{N}$ и для функции $f(t)$ производная порядка $n-1$ абсолютно непрерывная функция. Доказательство этих утверждений дано в работах А.А. Чикрий и И.И. Матичина [7].

Будем искать собственные функции задачи (4), (5) в виде произведения $\nu(x) = \prod\limits_{i=1}^{N} X_i(x_i)$. Тогда для определения каждого $X_i(x_i), \ i = \overline{1,N}$, мы получаем следующую одномерную спектральную задачу:

$$X_i''(x_i) + \lambda_i X_i(x_i) = 0, \ \ 0 < x_i < 1, \ \ i = \overline{1,N}, \tag{6}$$

$$X_i(0) = 0, \quad X_i'(0) = X_i'(1). \tag{7}$$

Задача (6) – (7) имеет собственные значения $\lambda_{i,k} = (2\pi k)^2, \ k = 0, 1, \ ...$ и собственные функции $X_{i,0}(x_i) = x_i, \ X_{i,2k}(x_i) = \sin(2\pi k x_i), \ \ k = 1, 2, \ ....$. Каждому собственные значения $\lambda_{i,k} = (2\pi k)^2, k = 1, ...$ определяемый как решение краевой задачи

$$X_{i,2k-1}''(x_i) + \lambda_k X_{i,2k-1}(x_i) = P_{i,k} X_{i,2k-1}(x_i),$$

$$X_{i,2k-1}(0)=0,\quad X'_{i,2k-1}(0)=X'_{i,2k-1}(1),\qquad k=1,2,\ ...\ ,$$

где $P_{i,k}=-2\sqrt{\lambda_{i,k}}=-4\pi k$, соответствуют присоединённые функций $X_{i,2k-1}(x_i)=\quad x_i\cos(2\pi kx_i)$, $k=1,2,\ ...$ задачи (6) – (7). Следуя работы Н.И. Ионкина [8] система собственных и присоединённых функций задачи (6) – (7)

$$X_{i,0}(x_i)=x_i,\ X_{i,2k-1}(x_i)=x_i\cos(2\pi kx_i),\ X_{i,2k}(x_i)=\sin(2\pi kx_i),\ k=1,2,\ ...$$

образует базис Рисса в пространстве функций $L_2(0,1)$. Справедлива следующая

Теорема 1. Последовательность функций $\nu_{n_1,...,n_N}(x_1,x_2,...,x_N)=$

$$=X_{1,n_1}(x_1)X_{2,n_2}(x_2)\cdot ...\cdot X_{N,n_N}(x_N),\quad n=(n_1,\,n_2,\,...,\,n_N)\in\overline{\mathbb{Z}_+}^N$$

образует базис Рисса в пространстве функций $L_2(\Pi)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x)\in W_2^{s_1,\,s_2,\,...,\,s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $\left.\frac{\partial^{4k_j}f(x)}{\partial x_j^{4k_j}}\right|_{x_j=0}=0$ при $0\le 4k_j<s_j-\frac{N}{2}$, $\left.\frac{\partial^{4k_j+1}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=0}=\left.\frac{\partial^{4k_j+1}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=1}$ при $0\le 4k_j+1<s_j-\frac{N}{2}$ $\left.\frac{\partial^{4k_j+2}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+2}}\right|_{x_j=0}=0$ при $0\le 4k_j+2<s_j-\frac{N}{2}$, $\left.\frac{\partial^{4k_j+3}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}}\right|_{x_j=0}=\left.\frac{\partial^{4k_j+3}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}}\right|_{x_j=1}$ при $0\le 4k_j+3<s_j-\frac{N}{2},\quad j=\overline{1,N}$.

Теорема 2. Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x),\ i=0,...,j-1;\ \varphi_s^0(x),\ s=0,...,n-j-1$ из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p>4\rho+\frac{N}{2},\ p=\overline{1,N}$ и правая часть $f(\cdot,t)\in C\left([0,T];\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)\right)$. Тогда регулярное решение задачи (1) - (3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_p>4\rho_p+\frac{N}{2},\ p=\overline{1,N},\ \theta>-[-\alpha]+\frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде регулярно сходящегося ряда по собственным и присоединённым функциям.

Литература

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** *Уравнения математической физики.* Москва: Изд-во. МГУ, 1999. 798 с.

2. **Коренев Б.Г.** *Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании.* М.: Наука, 1965. 355 с.

3. **Сабитов К.Б.** *Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе* Дифференциальные уравнения, 2021, том 57, №3. С. 364-374.

4. **K.B. Sabitov.** *Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate* Russian Mathematics. 2021. Vol. 65. №10. P. 52-62.

5. **K.B. Sabitov.** *Vibrations of plate with boundary "hinged attachment"conditions* Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, №4. P. 650-671. [In Russian].

6. **O.A. 'Ilhan, Sh.G. Kasimov, Sh.Q. Otaev, H.M. Baskonus.** *On the Solvability of a Mixed Problem for a High-Order Partial Differential Equation with Fractional Derivatives with Respect to Time, with Laplace Operators with Spatial Variables and Nonlocal Boundary Conditions in Sobolev Classes* Mathematics 2019, 7, 235. №1. P. 1-20. Basel, Switzerland.

7. **Chikriy A.A., Matichin I.I.** *Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann-Liouville, Caputo and Miller–Ross.* J. Autom. Inform. Sci. 2008. Vol. 40, №6. P. 1-11.

8. **Н.И. Ионкин.** *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.* Дифферен. уравнения. 1977г. Том XIII. №2. стр. 294 – 304.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН, С РАЗЛИЧНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, В КЛАССАХ СОБОЛЕВА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ С ОПЕРАТОРОМ МИЛЛЕРА–РОССА

Касимов Ш. Г.[1], Абутова А. Б.[2]
[1]Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
shokiraka@mail.ru
[2]Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
aynuraabutova@gmail.com

Введение. Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с.143-147]. В работе [2] исследуются задачи с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины с разными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных трёх начально-граничных задач. В случае шарнирного закрепления пластины на краях доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщённых решений. В работе [3] изучена задача с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленной начально-граничной задачи. Для этой задачи доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классе регулярных и обобщённых решений. Отметим, что в работе [4] доказано теорема об однозначной разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка с дробными производными по времени, со степенями операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева. В работе [5] исследуется начально-граничной задачи для уравнения балки в многомерном случае и установлено теорема об однозначной разрешимости начально-граничной задачи для уравнения балки в многомерном случае. В работе [6] доказано об однозначной разрешимости многомерной начально-граничной задачи, связанные с уравнениями колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе, с нелокальными граничными условиями в классах Соболева.

Постановка задачи. В данной работе в области $Q = \Pi \times (0, T)$, где $\Pi = (0, 1) \times ... \times (0, 1)$ есть N мерной область, а T – заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение

$$\begin{aligned} &D_j^{\alpha} u(x,t) + \sum_{p=1}^{N} \frac{\partial^{4m_p} u(x,t)}{\partial x_p^{4m_p}} = f(x,t),\ (x,t) \in Q,\ n-1 < \alpha \le n, \\ &0 \le j \le n-1,\ N,\ n,\ j+1 \in \mathbb{N},\ m_p \in \mathbb{N},\ p = \overline{1,N} \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} u(x,t)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i^0(x),\ i = 0, ..., j-1, \\ \left.\frac{\partial^s u(x,t)}{\partial x^s}\right|_{t=0} = \varphi_s^0(x),\ s = 0, ..., n-j-1 \end{cases} \tag{2}$$

и с различными нелокальными краевыми условиями

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^{4k_p} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p}}\right|_{x_p=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^{4k_p+1} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+1}}\right|_{x_p=0} = \left.\frac{\partial^{4k_p+1} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+1}}\right|_{x_p=1},\ 1 \le p \le q, \\ &\left.\frac{\partial^{4k_p+2} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+2}}\right|_{x_p=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^{4k_p+3} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+3}}\right|_{x_p=0} = \left.\frac{\partial^{4k_p+3} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+3}}\right|_{x_p=1},\ 1 \le p \le q, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_p \frac{\partial^{4k_p} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p}}\Big|_{x_p=0} + \beta_p \frac{\partial^{4k_p} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p}}\Big|_{x_p=1} = 0,\ q+1 \le p \le N,\\
&\beta_p \frac{\partial^{4k_p+1} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+1}}\Big|_{x_p=0} + \alpha_p \frac{\partial^{4k_p+1} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+1}}\Big|_{x_p=1} = 0,\ q+1 \le p \le N,\\
&\alpha_p \frac{\partial^{4k_p+2} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+2}}\Big|_{x_p=0} + \beta_p \frac{\partial^{4k_p+2} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+2}}\Big|_{x_p=1} = 0,\ q+1 \le p \le N,\\
&\beta_p \frac{\partial^{4k_p+3} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+3}}\Big|_{x_p=0} + \alpha_p \frac{\partial^{4k_p+3} u(x,t)}{\partial x_p^{4k_p+3}}\Big|_{x_p=1} = 0,\ q+1 \le p \le N,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $k_p = \overline{0,\ m_p-1}$, $p = \overline{1,\ N}$. Здесь $(x,t) = (x_1, ..., x_p, ..., x_N, t) \in Q$, число $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $\alpha_p = const$, $\beta_p = const$, $|\alpha_p| \ne |\beta_p|$, $\alpha_p \ne 0$, $\beta_p \ne 0$ фиксировано, а $f(x,t)$ и $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i = 0, ..., j-1$, $\varphi_s^0(x)$, $s = 0, ..., n-j-1$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по систему собственных и присоединённых $\{v_{m_1,...,m_N}(x_1, ..., x_N)\}_{\{(m_1,...,m_q)\in\overline{\mathbb{Z}_+}^q \times (m_{q+1},...,m_N)\in\mathbb{Z}^{N-q}\}}$ функций следующей спектральной задачи:

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{\partial^2 \nu(x)}{\partial x_p^2} - \lambda \nu(x) = 0, \tag{5}$$

$$\nu(x)|_{x_p=0} = 0,\ \ \frac{\partial \nu(x)}{\partial x_p}\Big|_{x_p=0} = \frac{\partial \nu(x)}{\partial x_p}\Big|_{x_p=1},\ \ p = \overline{1,\ q}, \tag{6}$$

$$\alpha_p \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_p}\Big|_{x_p=0} + \beta_p \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_p}\Big|_{x_p=1} = 0,\ \beta_p \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_p^2}\Big|_{x_p=0} + \alpha_p \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_p^2}\Big|_{x_p=1} = 0, q+1 \le p \le N, \tag{7}$$

λ – спектральный параметр, D_j^α – интегро–дифференциальный оператор в смысле Миллера–Росса по Римана – Лиувилля [8]. Будем искать собственные и присоединённые функции задачи (5), (6), (7) в виде произведения $\nu(x) = \prod_{p=1}^{N} X_p(x_p)$. Тогда для определения каждого $X_p(x_p)$, $p = \overline{1,q}$, мы получаем следующую одномерную спектральную задачу:

$$X_p''(x_p) + \lambda_p X_p(x_p) = 0,\ \ 0 < x_p < 1,\ \ p = \overline{1,q}, \tag{8}$$

$$X_p(0) = 0, \quad X_p'(0) = X_p'(1). \tag{9}$$

Аналогично для определения каждого $X_p(x_p)$, $p = \overline{q+1, N}$, мы получаем следующую одномерную спектральную задачу:

$$X_p''(x_p) + \lambda_p X_p(x_p) = 0,\ \ 0 < x_p < 1,\ \ p = \overline{q+1, N}, \tag{10}$$

$$\alpha_p X_p(0) + \beta_p X_p(1) = 0, \quad \beta_p X_p'(0) + \alpha_p X_p'(1) = 0. \tag{11}$$

Задача (8) – (9) имеет собственные значения $\lambda_{p,k} = (2\pi k)^2$, $p = \overline{1,q}$, $k = 0, 1, ...$ и собственные функции $X_{p,0}(x_p) = x_p$, $X_{p,2k}(x_p) = \sin(2\pi k x_p)$, $p = \overline{1,q}$, $k = 1, ...$. Каждому собственные значения $\lambda_{p,k} = (2\pi k)^2$, $p = \overline{1,q}$, $k = 1, ...$ определяемый как решение краевой задачи $X_{p,2k-1}''(x_p) + \lambda_k X_{p,2k-1}(x_p) = P_{p,k} X_{p,2k-1}(x_p)$, $X_{p,2k-1}(0) = 0$, $X_{p,2k-1}'(0) = X_{p,2k-1}'(1)$, $k = 1, 2, ...$, где $P_{p,k} = -2\sqrt{\lambda_{p,k}}$, соответствуют присоединённые функций $X_{p,2k-1}(x_p) = x_p \cos(2\pi k x_p)$, $k = 1, 2, ...$ задачи (8) – (9). Следуя работы Н.И. Ионкина [9] система собственных и присоединённых функций задачи (8) – (9)

$$X_{p,0}(x_p) = x_p,\ X_{p,2k-1}(x_p) = x_p \cos(2\pi k x_p), X_{p,2k}(x_p) = \sin(2\pi k x_p),\ p = \overline{1,q},\ k = 1, 2,\ ...$$

образует базис Рисса в пространстве функций $L_2(0,1)$. Далее найдено в [5] ортонормированная система собственных фунций задачи (10)–(11). Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{s_1,\,s_2,\,...,\,s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $\frac{\partial^{4k_j} f(x)}{\partial x_j^{4k_j}}\Big|_{x_j=0} = 0$ при $0 \le 4k_j < s_j - \frac{N}{2}$, $\frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\Big|_{x_j=0} = \frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\Big|_{x_j=1}$ при $0 \le 4k_j + 1 < s_j - \frac{N}{2}$ $\frac{\partial^{4k_j+2} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+2}}\Big|_{x_j=0} = 0$ при

$0 \le 4k_j+2 < s_j - \frac{N}{2}$, $\left.\frac{\partial^{4k_j+3}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}}\right|_{x_j=0} = \left.\frac{\partial^{4k_j+3}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}}\right|_{x_j=1}$ при $0 \le 4k_j+3 < s_j - \frac{N}{2}$, $j = \overline{1,q}$ и функция $f(x)$ удовлетворяет условиями (4). Справедлива следующая

Теорема. Система собственных и присоединённых функций $v_{m_1,...,m_N}(x_1,...,x_N) =$
$= X_{1,m_1}(x_1)X_{2,m_2}(x_2)\cdot ... \cdot X_{N,m_N}(x_N)$, где $(m_1,...,m_q) \in \overline{\mathbb{Z}_+}^q \times (m_{q+1},...,m_N) \in \mathbb{Z}^{N-q}$ образует базис Рисса в пространстве функций $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}$ (П). Далее, в данной работе доказана теорема существования и единственности решения задачи (1)–(4) колебаний пластин с дробными операторами Миллера -Росса, в случае с различными нелокальными краевыми условиями, в классах Соболева в многомерном случае. Решение рассматриваемой задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных и присоединённых функций многомерной спектральной задачи.

Литература

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** *Уравнения математической физики.* Москва: Изд-во. МГУ, 1999. 798 с.

2. **K.B. Sabitov.** *Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate* Russian Mathematics. 2021. Vol. 65. №10. P. 52-62.

3. **K.B. Sabitov.** *Plate oscillations with mixed boundary conditions* Russian Mathematics. (Iz. VUZ). 2023. №3. P. 63-77. [In Russian].

3. **Сабитов К.Б.** *Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе* Дифферен. уравнения, 2021, том 57, №3. С. 364-374.

4. **O.A. 'Ilhan, Sh.G. Kasimov, Sh.Q. Otaev, H.M. Baskonus.** *On the Solvability of a Mixed Problem for a High-Order Partial Differential Equation with Fractional Derivatives with Respect to Time, with Laplace Operators with Spatial Variables and Nonlocal Boundary Conditions in Sobolev Classes* Mathematics 2019, 7, 235. №1. P. 1-20. Basel, Switzerland.

5. **Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С.** *Начально-граничная задача для уравнения балки в многомерном случае* Дифферен. уравнения. 2019 г. Том 55, №10, с. 1379-1391.

6. **Sh.G. Kasimov, A.P. Koshanov.** *On the unambiguous solvability of a multidimensional initial-boundary value problem for the beam oscillation equation with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes* Lobachevskii Journal of Mathematics, 45, (11), 5546-5558 (2024).

7. **Chikriy A.A., Matichin I.I.** *Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann-Liouville, Caputo and Miller–Ross.* J. Autom. Inform. Sci. 2008. Vol. 40, №6. P. 1-11.

8. **Н.И. Ионкин.** *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.* Дифферен. уравнения. 1977г. Том XIII. №2. стр. 294 – 304.

УДК 517.956

О ГЕОМЕТРИИ СИНГУЛЯРНЫХ СЛОЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ СЕМЕЙСТВОМ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Касимов О.Ю.[1], Турсунов Б.А.[2]

[1] Денауского института предпринимательства и педагогики, Узбекистан;
odilbek.qosimov84@mail.ru

[2] Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан;
bakbarovich@mail.ru

В настоящее время, в мире, одной из актуальных проблем современной геометрии является изучение геометрии слоений и сингулярных слоений, порожденных орбитами векторных полей Киллинга. В то же время хорошо изучена и геометрия субмерсий, порожденных орбитами векторных полей Киллинга. Геометрия слоений, порожденных субмерсиями находят различные приложения во многих областях прикладных наук, в частности в физике. Применение результатов по геометрии слоений в других областях науки, в частности для решений задач механики, теории динамических систем являются актуальными научными направлениями.

Особое внимание было уделено изучению теории слоений, которая является интенсивно развивается во многих странах мира, в частности изучению геометрии слоений, порожденных субмерсиями,

геометрии и топологии сингулярных слоений, порожденных орбитами векторных полей, изучению группы изометрий слоеных многообразий.

В этой области работали многие ученые, в том числе J. Cheeger, D. Gromoll, R. Hermann, B. O'Neil, G. Walschap, M. Falcitelli, A. M. Pastore, S. Ianus и узбекские ученые А. Нарманов, А. Шарипов, Ж. Аслонов, А. Байтураев, С. Саитова, Г. Кайпназарова провели научные исследования.

Напомним, что

Определение 1. *Векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденные потоками векторным полем X, состоит из изометрий.*

В случае, когда $M = R^n$, то векторное поле $X = \sum\limits_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ является векторным полем Киллинга тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0,\ i \neq j,\ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0,\ i, j = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Тепер напомним что, наиболее важную операцию над векторными полями, называемую скобку Ли, или коммутатор этих векторных полей. Эту операцию можно рассматривать как дифференцирование функции. Пусть X и $Y-$ гладкие векторные поля на многообразии M, то их скобка Ли $[X, Y]-$ такое единственное векторное поле, действующее на все гладкие функции $f : M \to R$ со следующим условием

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)). \tag{2}$$

Легко проверяется, что если X и Y является векторными полями Киллинга, то скобка Ли $[X, Y]$ этих полей на самом деле тоже является векторными полями Киллинга. Пусть векторные поля X, Y в локальных координатах задаются следующими равенствами соответственно $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда i-я координата скобки Ли $[X, Y]$ этих двух векторных полей имеет следующий вид:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right). \tag{3}$$

Пусть M - гладкое многообразие размерности n, D - семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Определение 2. *Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x из M, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_k$ из D (где k произвольное натуральное число) такие, что*

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(x))\ldots)). \tag{4}$$

Известно, что разбиение многообразия M на орбиты семейства D является сингулярным слоением.

Пусть $M-$гладкое многообразие размерности n, $A-$максимальный атлас, определяющий на M структуру гладкого многообразия класса C^r, где $r \geq 0$. Многообразие M является также многообразием класса C^s, если $0 \leq s \leq r$. Систему локальных криволинейных координат на C^s многообразии M обозначим через A^s. Пусть теперь целое k удовлетворяет неравенствам $0 < k < n$.

Определение 3. *Разбиение F многообразия M на подмногообразия L_α называется гладким сингулярным слоением, если выполнены следующие условия:*

1) $\bigcup\limits_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;

2) *Для всех $\alpha, \beta \in B$ имеет место обязательно $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$;*

3) *Каноническая инъекция $i : L_\alpha \to M$ является погружением;*

4) *Для каждой точки $x \in M$ существует C^r- карта (φ, U), содержащая точку x такая, что $\varphi(U) = V_1 \times V_2$, где V_1- окрестность начало в R^k, V_2- окрестность начало в R^{n-k}, $k-$есть размерность слоя, проходящего через точку x;*

5) $\varphi(x) = (0, 0)$;

6) *Для каждого подмногообразия L_α такого, что $L_\alpha \cap U \neq \varnothing$, имеет место равенство $L_\alpha \cap U = \varphi^{-1}(V_1 \times l)$, где $l = \{v \in V_2 : \varphi^{-1}(0, v) \in L_\alpha\}$.*

Подмногообразии L_α называются слоями сингулярного слоения F. Если размерность слоев сингулярного слоения одинаковы, то слоение называется регулярным слоением. Слой L слоения F называется регулярным, если размерность слоя L максимален. Слой L слоения F называется сингулярным, если он не является регулярным.

Пусть $D = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ семейство гладких векторных полей в R^3, где

$$X_1 = \{z; 0; -x\}, X_2 = \{-y; x; 0\}, X_3 = \{-y; x; 1\}, X_4 = \{0; 0; 1\}. \tag{5}$$

Поток векторного поля X_1, X_2, X_3, X_4 порождает следующую однопараметрическую группу преобразований

$$X_1^\xi : (x, y, z) \to \{xcos\xi - zsin\xi, y, xsin\xi + zcos\xi\}, \xi \in R. \tag{6}$$

$$X_2^\zeta : (x, y, z) \to \{xcos\zeta - ysin\zeta, xsin\zeta + ycos\zeta, z\}, \zeta \in R. \tag{7}$$

$$X_3^\psi : (x, y, z) \to \{xcos\psi - ysin\psi, xsin\psi + ycos\psi, z + \psi\}, \psi \in R. \tag{8}$$

$$X_4^\tau : (x, y, z) \to \{x, y, z + \tau\}, \tau \in R. \tag{9}$$

Для этих семейств векторных полей справедлива следующая теорема.

Teorema.1. *Орбиты семейство векторных полей $D_1 = \{X_1, X_2\}$ порождают сингулярное слоение F, пространства R^3, регулярными слоями которого являются концентрические сферы. Сингулярными слоем слоения F являются одна точка.*

Teorema.2. *Орбиты семейство векторных полей $D_2 = \{X_3, X_4\}$, $D_3 = \{X_2, X_4\}$ пороождают сингулярное слоение F, пространства R^3, регулярными слоями которого являются концентрические цилиндры. Сингулярными слоем слоения F являются одна прямая.*

Литературы

1. **Tamura I.** Topology of foliations: an introduction. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Soc., 2006.

2. **Narmanov A. Ya., Qosimov O.Yu.** On the Geometry of the Set of Orbits of Killing Vector Fields on Euclid Space, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 55,39-49 (2020), (Scopus, CiteScore IF=0.6)

3. **Нарманов А.Я., Аслонов Ж.О.** Геометрия орбит векторных полей Киллинга. Узбекский математический журнал, 2012, 2. ст.77 – 85.

УДК 517.984

О суммировании спектральных разложений кусочно-гладких функций по собственным функциям оператора Шрёдингера

Кучкоров Э. И.[1],

[1] Национальный университет республики Узбекистан и Международная исламская академия, Ташкет, Узбекистан;
e_kuchkorov@mail,ru

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, размерности N, $N \geq 4$ рассмотрим гладкие многообразия $S_1, S_2, ..., S_l$, $\dim S_k = N - m_k$, где m_k - натуральные числа, причем $3 \leq m_k < N$, $k = 1, 2, ..., l$.

Предположим, что для каждого многообразия S_k существует аффинное преобразование $\mathbb{R}^N$, приводящее S_k к виду

$$S_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N : x = \varphi(y)\}. \tag{1}$$

В этой записи $x \in \mathbb{R}^{m_k}$,$y \in \mathbb{R}^{N-m_k}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{N-m_k} \to \mathbb{R}^{m_k})$, причем равномерно по всем $y \in \mathbb{R}^{N-m_k}$ справедливо неравенство $\mid \nabla\varphi(y) \mid \leq C$.

Пуст $S = \bigcup\limits_{k=1}^{l} S_k$ и $q(x)$ - функсия из $C^\infty(\mathbb{R}^N \backslash S)$, удовлетворяющая условию

$$|D^\alpha q(x)| \leq \frac{const}{[dist(x,S)]^{|\alpha|+1}}, \tag{2}$$

для вцех мултииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \leq \left[\frac{m}{2}\right]$.

Обозначим через L эллиптический формально самосопряженный оператор Шредингера с потенциалом $q(x)$:

$$L = -\Delta + q(x)$$

с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Из теоремы Като - Реллиха вытекает, что оператор L самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и полуограничен снизу с некоторой постоянной c. Обозначим через $\widehat{L}$ единственное самосопряженное расширение оператора L в $L_2(\mathbb{R}^N)$.

Пусть E_λ^s - средние Рисса порядка s спектральных разложений E_λ, отвечающих оператору $\widehat{L}$.

Известно [2], что ортопроектор E_λ является интегральным оператором и его ядро $\theta(x, y, \lambda)$ имеет вид

$$\theta(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \int_c^\lambda u_i(x,t) u_i(y,t) d\rho(t),$$

(3.4) где фундаментальные функций $u_i(x, \mu)$ являются непрерывными решениями уравнения $-\Delta u + qu = \mu u$. Далее, для любого $s > 0$ введем средние Рисса спектральных разложений

$$E_\lambda^s f(x) = \int_0^\lambda (1 - \frac{t}{\lambda})^s dE_\lambda f(y).$$

В этой работе мы изучаем равномерной сходимости спектральных разложение кусочно-гладких функций. Введем определение функции кусочно-гладких функции.

Определение 1. Простейшей кусочно-гладкой функцией в $\mathbb{R}^N$ будем называть функцию вида $f(x) = \chi_D(x) g(x)$ где χ_D – характеристическая функция некоторой открытой подобласти D, граница $\Gamma = \partial D$ которой является гладкой поверхностью а функция g для любого натурального l принадлежит классу $D(\hat{L}^l)(\mathbb{R}^N)$.

Иначе говоря, $g \in \bigcap_{k=0}^{\infty} D(\hat{L}^k)$, где $D(\hat{L}^k)$ область определения степени $\hat{L}^k$ рассматриваемого самосопряженного расширения $\hat{L}$ оператора L.

Конечную линейную комбинацию простейших кусочно-гладких функций будем называть кусочно-гладкой функцией.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $s > (N-3)/2$ и f произвольная кусочно-гладкая функция и пусть Γ множество разрыва функции f. Тогда равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda^s f(x) = f(x).$$

Отметим, что в случае гладкого потенциала аналогичный результат в случае непрерывных функции впервые получен Б.М. Левитаном, и в случае, когда все многообразия S_k имеют одинаковую размерность и для непрерывных функции $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ получен в работе Ш. А. Алимова и А. Р. Халмухамедова [2]. В случае, когда, оператор $L = -\Delta$ в работе Ш. А. Алимова . Отметим, что в работе , для кусочно-гладких функций указаны множества сходимости и риссовской суммируемости их спектральных разложений, связанных с оператором Лапласа в $\mathbb{R}^N$, в зависимости от геометрии точек разрыва разлагаемой функции. Получены важные результаты, связанные со спектральными разложениями кусочно-гладких функций. Эти результаты приведены в работех [3].

Доказательство теоремы основано на методе, разработанном академиком Ш.А. Алимовым. При этом для собственных функций используются формула среднего значения Э.Ч. Титчмарша и теорема тауберова типа Ларса Хёрмандера, а также метод стационарной фазы для осциллирующих интегралов.

Литература

1. **Цикон Х., Фрёзе В., Кирш В., Саймон Б.** Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. — М.: Мир, 1990. — 406 с.
2. **Алимов Ш.А., Халмухамедов А.Р.** Равномерная суммируемость спектральных разложений непрерывных функций из L_2 // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. — Т.: Фан, 1987. — С. 147–156.
3. **Кучкоров Э.И.** О равномерной сходимости спектрального разложения кусочно-гладкой функции по собственным функциям оператора Шредингера с сингулярными коэффициентами // Вестник НУУз. — 2006. — №2. — С. 42–47.

УДК 517.956

Решение второй краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами в полуполосе

Мамажонов С. М.
Кокандский университет, Коканд, Узбекистан;
sanjarbekmamajonov@gmail.com

В данной работе в области $\Omega_+ = \{(x,y):\ 0 < x < +\infty,\ 0 < y < q\}$ рассматривается уравнение четвертого порядка в виде

$$U_{xxxx} - U_{yy} + A_1 U_{xxx} + A_2 U_{xx} + A_3 U_x + A_4 U + A_5 U_y = F(x,y),$$

где $q, A_i \in R,\ i = \overline{1,5}$ и $F(x,y)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Заменой

$$U(x,y) = \exp\left(-\frac{A_1}{4}x + \frac{A_5}{2}y\right) u(x,y),$$

это уравнение можно привести к уравнению

$$L[u] = u_{xxxx} + a_1 u_{xx} + a_2 u_x + a_3 u - u_{yy} = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$a_1 = A_2 - \frac{3A_1^2}{8}, \quad a_2 = \frac{A_1^3}{8} - \frac{A_1 A_2}{2} + A_3, \quad a_3 = -\frac{3A_1^4}{256} + \frac{A_1^2 A_2}{16} - \frac{A_1 A_3}{4} + A_4 + \frac{A_5^2}{4},$$

$$f(x,y) = \exp\left(\frac{A_1}{4}x - \frac{A_5}{2}y\right) F(x,y).$$

Мы будем полагать, что

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2} \in C\left(\Omega_+ \cup \Gamma\right),$$

где $\Gamma = \partial\Omega_+$ – граница области Ω_+.

Для уравнения (1) в области Ω_+ изучим следующую задачу.

Задача A**.** Найти решение уравнения (1) в области Ω_+ из класса $C^{4,2}_{x,y}(\Omega_+) \cap C^{3,1}_{x,y}\left(\Omega_+ \cup \Gamma\right)$, имеющего ограничение первой производной по y и второй производной по x при $x \to +\infty$ и $u_y \in L_2\left(\Omega_+\right)$, удовлетворяющего следующими краевыми условиями

$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,q) = 0, \quad 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), \quad u_{xx}(0,y) = \psi_2(y), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} u(x,y) = 0, \quad m = 0,2, \quad 0 \le y \le q, \tag{3}$$

где $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Следует отметить, что в работах [1], [2] рассмотрены краевые задачи для уравнения (1) в ограниченных областях. А в работе [3] исследована первая краевая задача по переменной y для уравнения (1) в области Ω_+.

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1 \leq 0$, $a_3 \geq 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\Omega_+ \cup \Gamma$. В области Ω справедливо тождество

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx} - u_x u_{xx} + a_1 uu_x + \frac{1}{2}a_2 u^2\right) + u_{xx}^2 - a_1 u_x^2 + a_3 u^2 - \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) + u_y^2 = 0. \quad (4)$$

Интегрируя тождество (4) по области $\Omega_p = \{(x,y):\ 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$, где $p > 0$, имеем

$$\begin{gathered}\int_0^q \left(u(p,y)\,u_{xxx}(p,y) - u_x(p,y)\,u_{xx}(p,y) + a_1 u(p,y)\,u_x(p,y) + \tfrac{1}{2}a_2 u^2(p,y)\right)dy - \\ - \int_0^q \left(u(0,y)\,u_{xxx}(0,y) - u_x(0,y)\,u_{xx}(0,y) + a_1 u(0,y)\,u_x(0,y) + \tfrac{1}{2}a_2 u^2(0,y)\right)dy + \\ + \iint_{\Omega_p} u_{xx}^2(x,y)\,dxdy - a_1 \iint_{\Omega_p} u_x^2(x,y)\,dxdy + a_3 \iint_{\Omega_p} u^2(x,y)\,dxdy + \iint_{\Omega_p} u_y^2(x,y)\,dxdy - \\ - \int_0^p u(x,q)\,u_y(x,q)\,dx + \int_0^p u(x,0)\,u_y(x,0)\,dx = 0.\end{gathered} \quad (5)$$

Если $p \to +\infty$, то $\Omega_p \to \Omega_+$. При этом, учитывая однородные краевые условия задачи A и свойства функции $u(x,y)$ при $x \to +\infty$, из (5) получим

$$\iint_{\Omega_+} u_{xx}^2(x,y)\,dxdy - a_1 \iint_{\Omega_+} u_x^2(x,y)\,dxdy + a_3 \iint_{\Omega_+} u^2(x,y)\,dxdy + \iint_{\Omega_+} u_y^2(x,y)\,dxdy = 0$$

Если $a_3 > 0$, из четвертого слагаемого получим $u(x,y) \equiv 0$ в $\Omega_+ \cup \Gamma$. При $a_1 < 0$ и $a_3 = 0$, из первого слагаемого, находим $u(x,y) = xb_1(y) + b_2(y)$, а из второго слагаемого получим $u_x(x,y) = b_1(y) = 0$, тогда $u(x,y) = b_2(y)$. С учетом однородного краевого условия $u(0,y) = 0$, имеем $u(x,y) \equiv 0$ в $\Omega_+ \cup \Gamma$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

1) $D < \frac{\mu_1^4}{2\left(1+\mu_1+2\mu_1^2\right)}$;

2) ${\psi'}_i(0) = {\psi'}_i(q) = 0$, $\psi_i(y) \in C^3(\Omega_+ \cup \Gamma)$, $i = \overline{1,2}$;

3) $f_y(x,0) = f_y(x,q) = 0$, $0 \leq x < +\infty$, то решение задачи A существует. Здесь,

$$D = \max\left\{|a_i|,\ i = \overline{1,3}\right\}, \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}.$$

Литература

1. **Apakov Y.P., Mamajonov S.M.** *Boundary-value problem for the fourth-order equation with multiple characteristics in a rectangular domain.* Journal of Mathematical Sciences. 2023, Vol. 272, №2, pp.185-201.

2. **Апаков Ю.П., Мамажонов С.М.** *Краевая задача для неоднородного уравнения четвёртого порядка с постоянными коэффициентами.* Челябинский физико-математический журнал. 2023, Т. 8, выпуск 2, С.157-172.

3. **Мамажонов С.М.** *Решение краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами в полуполосе.* Тезисы докладов международной научно-практической конференции на тему «Актуальные проблемы уравнений математической физики и информационных технологий» Наманган, 17-18 апреля, 2026 год

УДК 517.956.4

Исследование нелокальных краевых задач для параболических уравнений четвёртого порядка.

Маманазаров Д. С.
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
d.mamanazarov@g.nsu.ru

В настоящей работе исследуется разрешимость нелокальных краевых задач с общим условием А. А. Самарского для параболических уравнений четвёртого порядка вида

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t). \tag{1}$$

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, переменных (x,t). Далее пусть α_i, β_i, $i = 1,2$, – заданные действительные числа, $c(x,t)$, $f(x,t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Нелокальная задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия*

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u_{xx}(0,t) = \alpha_1 u_x(0,t) + \alpha_2 u_x(1,t), \qquad t \in (0,T), \tag{4}$$

$$u_{xx}(1,t) = \beta_1 u_x(0,t) + \beta_2 u_x(1,t), \qquad t \in (0,T). \tag{5}$$

Нелокальная задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условия*

$$u_x(0,t) = \alpha_1 u_{xx}(0,t) + \alpha_2 u_{xx}(1,t), \qquad t \in (0,T), \tag{6}$$

$$u_x(1,t) = \beta_1 u_{xx}(0,t) + \beta_2 u_{xx}(1,t), \qquad t \in (0,T). \tag{7}$$

Нелокальная задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4), (5), а также условие*

$$u(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T). \tag{8}$$

Нелокальная задача IV: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (6), (7) и (8).*

Заметим, что в случае $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$ нелокальные задачи II и IV сводятся к нелокальным задачам I и III соответственно. Поэтому задачи II и IV будем в дальнейшем изучать случае $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0$.

Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений с обобщённым условием Самарского–Ионкина подробно рассмотрены в монографии А. И. Кожанова [1]. Наиболее близкой по тематике к настоящей работе является статья [2], в которой исследуются нелокальные краевые задачи для параболического уравнения второго порядка с условием Самарского.

Основное внимание в работе уделяется вопросам существования и единственности регулярных решений рассматриваемой нелокальной задачи. Доказываются соответствующие теоремы существования и единственности решений, обладающих всеми необходимыми обобщёнными производными в смысле С. Л. Соболева.

Полученные результаты развивают теорию пространственно-нелокальных краевых задач для параболических уравнений высокого порядка и позволяют получить новые результаты в исследовании их разрешимости. Они могут быть использованы при дальнейшем изучении нелокальных задач для уравнений математической физики, а также в теоретических и прикладных исследованиях.

Литература

1. **Кожанов А.И.** *Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных. Сводка результатов, нерешенные задачи.* Новосибирск: Наука, 2024.
2. **Кожанов А.И.** *О разрешимости некоторых пространственно – нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений.* Вестник СамГУ. 2008. Т. 62, № 3. С. 165-174..

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

М. М. Сагдуллаева

Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент;

sagdullayevam@mail.ru

В данной работе изучается нелокальная задача с интегральными условиями для уравнениия частных промзводных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части.

В области $D = \{(x,t); 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида:

$$Lu \equiv= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ – заданные функции, $u(x,t)$ – искомая действительная функция.

Нелокальная задача. *Требуется найти в области D решение $u(x,t)$, уравнения (1) удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и интегральным условиям

$$\int_0^\ell k(x,t)u(x,t)dx = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $k(x,t)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,3})$, – заданные, непрерывные на $[0,\ell]$ и $[0,T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \qquad \varphi'(\ell) = \mu_2(0); \qquad \int_0^\ell \varphi(x)dx = \mu_3(0).$$

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x,t)$ из класса $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, удовлетворяют ему в обычном смысле.*

Имеет место следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1) $c(x,t)$, $k(x,t)$, $f(x,t) \in C(\overline{D})$;

2) $\varphi(x) \in C^2[0,\ell]$, $\mu_1(t)$, $\mu_3(t) \in C^1[0,T]$, $\mu_2(t) \in C[0,T]$.

Тогда существует единственное непрерывное и ограниченное решение нелокальной задачи (1)–(4).

УДК 517.946

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Сатторов Э. Н.[1], Актамов Х. С.[2], Индаминов М. Ш.[3]
[1]Самаркандский государственный педагогический институт, Самарканд, Узбекистан;
Sattorov-e@rambler.ru
[2]Самаркандский государственный педагогический институт, Самарканд, Узбекистан;
haktamov@gmail.com
[3]Ташкентский Информационный технологический университет, Ташкент, Узбекистан;
indaminov76@gmail.com

Пусть $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$ точки трехмерного евклидового пространства и G - неограниченная область в R^3 лежащая внутри полосы $0<y_3<h, h=\frac{\pi}{\rho}, \rho>0$ граница, которой состоит из прямой $T: y_3=0$ и некоторой кривой $S: y_3=L(y_1,y_2)$ удовлетворяющей условиям $0<L(y_1,y_2)<h, |L'(y_1,y_2)|<M<\infty$. Положим $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega, \quad \partial\Omega=S\cup T$.

Рассмотрим векторное поле $\mathbf{F}$, непрерывно дифференцируемое в области Ω пространства (с границей S) и удовлетворяющее там уравнениям

$$\operatorname{div} F=q, \quad \operatorname{rot} F=j \tag{1}$$

где q, j - объемные плотности источников и вихрей поля F. Зададим вспомогательное векторное поле Ψ [4]:

$$\Psi(\mathbf{r})=-\frac{1}{4\pi}\left\{(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{F})\operatorname{grad}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+(\boldsymbol{\nu}\times F)\times\operatorname{grad}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-[(\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}F)]\cdot\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right\}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ - произвольный постоянный вектор, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ - радиус-векторы переменной M и фиксированной M' точек пространства.

Для этого воспользуемся трехмерной формулой Помпей [1]

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left[(n\cdot F)\operatorname{grad}\Phi_\sigma(y,x)+(n\times F)\times\operatorname{grad}\Phi_\sigma(y,x)\right]dS+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}F\cdot\operatorname{grad}\Phi_\sigma(y,x)dV=\begin{cases}F(x), & x\in\Omega,\\ 0, & x\notin\Omega\end{cases} \tag{3}$$

предварительно переписав ее в виде

$$C^S(x,F(y))+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}div\,F\cdot\operatorname{grad}\Phi_\sigma(y,x)dV=\begin{cases}0, & x\notin\Omega,\\ F(x), & x\in\Omega\end{cases}$$

$$C^S(x,F(y))=\operatorname{grad}\left\{-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\Phi_\sigma(y,x)q^S dS_y-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}m\cdot\operatorname{grad}\Phi_\sigma(y,x)dS_y\right\},$$

$$q^S=-(n\cdot\overline{F}), \quad m^S=-Fq^S=-(n\cdot\overline{F}), \quad m^S=-Fn.$$

$$2\pi^2 e^{\sigma v_3^2+\alpha z^2-\sigma y_3^2}\cdot\Phi_\sigma(y,x)=\int\limits_0^\infty\frac{\varphi_\sigma(y,x;u)}{u^2+r^2}e^{-\alpha t^2}du, \tag{4}$$

$$\varphi_\sigma(y,x;u)=\cos\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}-(y_3-x_3)\frac{\sin\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad \tau=2\sigma y_3.$$

Дадим теперь представление магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в виде пространственных аналогов интеграла типа Коши по границе области, заполненной намагниченными массами с интенсивностью намагничения (вектором намагниченности) $\mathbf{I}(\mathbf{r})$. Будем предполагать, что $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ - непрерывно дифференцируема в D. Тогда магнитное поле можно представить в виде

$$\mathbf{H}(\vec{y}) = \operatorname{grad} \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{I}(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y,x) dV =$$

$$= -\iint\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{I}(x)\cdot\mathbf{n}) \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y,x) dS_y + \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{I}(x) \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y,x) dS_y \tag{5}$$

где штрих означает дифференцирование по $\mathbf{r}'$, поверхностный интеграл в правой части (5) может быть записан так:

$$-\iint\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{I}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}) \operatorname{grad} \Phi_\sigma(y,x) dS = C^S(\mathbf{r}'; -4\pi I_n(\mathbf{r})), \tag{6}$$

где $I_n(\mathbf{r})$ - нормальная компонента вектора намагниченности на поверхности S.

УДК 517.946

Регуляризация задача Коши для бигармонического уравнения в трёхмерной неограниченной области

Солеев А. С.[1], Шодиев Д. С.[2], Турсунов Ф. Р.[3]
[1]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан;
[2]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан;
dilshod.shodiev.76@mail.ru
[3]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан;
farhod.tursunov.76@mail.ru

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ точки вещественного евклидового пространства $\mathbb{R}^3$ и G неограниченная область в $\mathbb{R}^3$ лежащая внутри полосы $0 < y_3 < h, h = \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0$ граница которой состоит из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкого куска поверхности S - Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 > 0, \bar{G} = G \cup \partial G, \partial G = S \cup T$.

Предположим, что для некоторого $b_0 > 0$ выполняется условие:

$$\int_{\partial G} \exp\left\{-b_0 ch\rho_1 |y'|\right\} dS < \infty, \quad 0 < \rho_1 < \rho, y' = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

В области G рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 U(y) = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {y_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {y_3}^2}$ оператор Лапласа.
Обозначим

$$K_\rho(G) = \left\{ U(y) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G}) : |U(y)| + \left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right| + |\Delta U(y)| + \left|\frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n}\right| \le 0. \right.$$

Постановка задачи. Требуется найти бигармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G т.е.

$$U(y_1, y_2, y_3)|_S = f_1(y), \left.\frac{\partial U(y_1, y_2, y_3)}{\partial n}\right|_S = f_2(y),$$

$$\Delta U\left(y_1,y_2,y_3\right)|_S=f_3(y),\ \left.\frac{\partial\left(\Delta U\left(y_1,y_2,y_3\right)\right)}{\partial n}\right|_S=f_4(y). \tag{2}$$

Здесь $f_j(y)$ - заданные достаточно гладкие функции $j=1,2,3,4$, а $\frac{\partial}{\partial n}$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

Для рассматриваемой области функцию Карлемана построил проф. Ш. Ярмухамедов [1] в своей докторской диссертации следующим образом:

$$\Phi_\sigma(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{2\pi^2K\left(x_3\right)} \tag{3}$$

где $\varphi(x,y)=\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(\omega)}{\omega-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}$,

$$K(\omega)=\frac{e^{\sigma\omega}}{\omega-x_3+2h},K\left(x_3\right)=\frac{1}{2h}e^{\sigma x_3},\omega=i\sqrt{u^2+x^2}+y_3, \tag{4}$$

$$x'=\left(x_1,x_2,0\right),y'=\left(y_1,y_2,0\right),r=|y-x|,\alpha=\left|y'-x'\right|,0<x_3<h.$$

В формуле (4) выбираем

$$K(\omega)=\frac{e^{\sigma\omega^2}}{\omega-x_3+3h},K\left(x_3\right)=\frac{1}{3h}e^{\sigma x_3^2}$$

и отделяя мнимую часть с учётом (3) получим:

$$\Phi_\sigma(x,y)=\frac{3h}{\pi^2}e^{-\sigma\left(\alpha^2+x_3^2-y_3^2\right)}\int_0^\infty\frac{\left(y_3-x_3\right)e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\left(u^2+r^2\right)\left(u^2+\alpha^2+\left(y_3-x_3+3h\right)^2\right)}du+$$

$$+\frac{9h^2}{2\pi^2}e^{-\sigma\left(\alpha^2+x_3^2-y_3^2\right)}\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\left(u^2+r^2\right)\left(u^2+\alpha^2+\left(y_3-x_3+3h\right)^2\right)}du+$$

$$+\frac{3h}{2\pi^2}e^{-\sigma\left(\alpha^2+x_3^2-y_3^2\right)}\int_0^\infty\frac{\left(y_3-x_3\right)\left(y_3-x_3+3h\right)e^{-\sigma u^2}\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\left(u^2+r^2\right)\left(u^2+\alpha^2+\left(y_3-x_3+3h\right)^2\right)}\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}-$$

$$-\frac{3h}{2\pi^2}e^{-\sigma\left(\alpha^2+x_3^2-y_3^2\right)}\int_0^\infty\frac{\sqrt{u^2+\alpha^2}e^{-\sigma u^2}\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\left(u^2+r^2\right)\left(u^2+\alpha^2+\left(y_3-x_3+3h\right)^2\right)}du \tag{5}$$

Известно, что если функция Карлемана построена, то используя формулу Грина можно построить регуляризованное решение в явном виде. Отсюда вытекает, что эффективность построение функции Карлемана эквивалентно построению регуляризованного решение задача Коши.

Для функции $U(y)=U\left(y_1,y_2,y_3\right)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$ и любого $x\in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина [2]:

$$U(x)=\int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial(\Delta L(x,y))}{\partial n}-\Delta L(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+$$

$$+\int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L(x,y)}{\partial n}-L(x,y)\frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n}\right]dS_y,x\in G$$

где $L(x,y)=\frac{r}{4\pi}$ является фундаментальным решением уравнение (1).

В интегральное представление (6), $L(x,y)$ заменяя на функции $L_\sigma(x,y)=r^2\Phi_\sigma(x,y)$, имеем

$$U(x)=\int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}-\Delta L_\sigma(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+$$

$$+\int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-L_\sigma(x,y)\frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n}\right]dS_y,x\in G \tag{6}$$

Обозначим

$$U_\sigma(x)=\int_S\left[f_1(y)\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}-f_2(y)\Delta L_\sigma(x,y)\right]dS_y+$$
$$+\int_S\left[f_3(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-f_4(y)L_\sigma(x,y)\right]dS_y, x\in G \tag{8}$$

Теорема 1. Пусть функция $U(y)=U\left(y_1,y_2,y_3\right)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$ на части S границы удовлетворяет условие (2), и на части T границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|+|\Delta U(y)|+\left|\frac{\partial\Delta Uu(y)}{\partial n}\right|\leq M, y\in T, M>0. \tag{9}$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\leq\varphi\left(\sigma,x_3\right)Me^{-\sigma x_3^2},$$
$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\leq\varphi_i\left(\sigma,x_3\right)Me^{-\sigma x_3^2}, i=1,2,3, \tag{10}$$

где M - положительное число и $\varphi\left(\sigma,x_3\right)$ и $\varphi_i\left(\sigma,x_3\right), i=1,2,3$ функции зависящая от x_3 и σ.

Литература

1. **Ярмухамедов Ш.** *О задаче Коши для уравнения Лапласа.* // Дисс. докт. физ.-матем. наук. – ВЦ СО АН СССР. – Новосибирск. – 1983. – 206 с.
2. **Векуа И.Н.** *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – Москва; Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 1948. – 296 с.

УДК 517.954

Разрешимость смешанной задачи для одной системы составного типа

Сраждинов И. Ф.
Наманганский государственный технический университет,Наманган,Узбекистан
ilxomsrajdinov@gmail.com

Рассмотрим следующий линейный дифференциальный оператор $L=div(pgrad)-q$. О свойствах данного оператора см. [1, стр.327]. Относительно коэффициентов оператора предполагаем выполненными условия приведенные в формуле (3) [1]. Для уравнений гиперболического и параболического типов разрешимость смешанной задачи изучена достаточно полно, однако для уравнений и тем более для систем уравнений составного типа разрешимость смешанной задачи не исследована. Настоящая работа посвящена именно этой проблеме. В статье, следуя [2,3], изучается вопрос постановки и разрешимости смешанной задачи для следующей системы составного типа, вида:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2U}{\partial t^2}+LV=0,\\ \dfrac{\partial^2V}{\partial t^2}+LU=0;\end{cases} \tag{1}$$

Разделяя переменные $U(t,x)=T(t)X(x)$, $V(t,x)=S(t)X(x)$ имеем

$$\begin{cases}T''X+S\,LX=aSX,\\ S''X+TX''=bTX;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{T''}{T}-\frac{\lambda S}{T}=\frac{aS}{T},\\ \frac{S''}{S}-\frac{\lambda T}{S}=\frac{bT}{S};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T''-\lambda S=aS\,,\\ S''-\lambda T=bT\\ LX=-\lambda X\,;\end{cases}$$

Из первых двух уравнений последней системы находим $T(t)$ и $S(t)$

$$\begin{cases}T^{IV}-\lambda S''=aS''\,,\\ S''-\lambda T=bT;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T^{IV}=(\lambda+a)(\lambda+b)T,\\ S''-\lambda T=bT;\end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^4-(\lambda+a)(\lambda+b)=0 \quad \Rightarrow k_1=\sqrt[4]{(\lambda+a)(\lambda+b)}$, $k_2=-k_1$, $k_3=ik_1$, $k_4=-ik_1$.

Получаем

$$\begin{cases} T(t)=C_1e^{k_1t}+C_2e^{-k_1t}+C_3\cos k_1t+C_4\sin\ k_1t, \\ S(t)=\frac{k_1^2}{\lambda+a}\left(C_1e^{k_1t}+C_2e^{-k_1t}-C_3\cos k_1t-C_4\sin\ k_1t\right) \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=T(0), \\ k_1(C_1-C_2+C_4)=T'(0), \\ \frac{k_1^2}{\lambda+a}(C_1+C_2-C_3)=S(0), \\ \frac{k_1^3}{\lambda+a}(C_1-C_2-C_4)=S'(0); \end{cases}$$

Из этой системы определим постоянные C_1, C_2, C_3, C_4.

$$\begin{cases} C_1=\frac{1}{4}\left[\left(T(0)+\frac{1}{k_1}T'(0)\right)+\frac{\lambda+a}{k_1^2}\left(S(0)+\frac{1}{k_1}S'(0)\right)\right] \\ C_2=\frac{1}{4}\left[\left(T(0)-\frac{1}{k_1}T'(0)\right)+\frac{\lambda+a}{k_1^2}\left(S(0)-\frac{1}{k_1}S'(0)\right)\right] \\ C_3=\frac{1}{2}\left[\left(T(0)-\frac{\lambda+a}{k_1^2}S(0)\right)\right] \\ C_4=\frac{1}{2}\left[\left(T'(0)-\frac{\lambda+a}{k_1^3}S'(0)\right)\right] \end{cases}$$

Задача TS. . Найти решение системы (1), ограниченное по t, при $t\to\infty$ удовлетворяющее следующим начальным

$$U(0,x)=\varphi(x), \quad V(0,\,x)=\psi(x), \tag{2}$$

и краевым

$$U(t,0)=V(t,0)=0, \tag{3}$$

условиям.

Для обеспечения ограниченности решения по t при $t\to\infty$, положим $C_1=0$. Отсюда получаем

$$\begin{cases} T(0)+\frac{1}{k_1}T'(0=0, \\ S(0)+\frac{1}{k_1}S'(0)=0; \end{cases} \tag{4}$$

Принимая во внимание (4), имеем

$$\begin{cases} C_1=0, \\ C_2=\frac{1}{2}\left[(T(0))+\frac{a-\lambda}{k_1^2}(S(0))\right], \\ C_3=\frac{1}{2}\left[\left(T(0)-\frac{a-\lambda}{k_1^2}S(0)\right)\right]. \\ C_4=-C_3. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)\ , \quad V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n(T)X_n(x) \tag{5}$$

где

$$T_n(t)=\frac{1}{2}\left[\left(T_n(0)+\frac{a-\lambda_n}{k_1^2}S_n(0)\right)e^{-k_1t}+\left(T_n(0)-\frac{a-\lambda_n}{k_1^2}S_n(0)\right)(\cos k_1t-\sin k_1t)\right]$$

$$S_n(t)=\frac{k_1^2}{a-\lambda_n}\left[\left(T_n(0)+\frac{a-\lambda_n}{k_1^2}S_n(0)\right)e^{-k_1t}-\left(T_n(0)-\frac{a-\lambda_n}{k_1^2}S_n(0)\right)(\cos k_1t+sink_1t)\right]$$

Теорема. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)\ \in\ C^{3+\alpha}[0,l]$. Тогда ряды (6) удовлетворяют системе уравнений (1), начальным условиям (2) и краевым условиям (3).При этом ряды (6) можно дифференцировать по t и x до двух раз и полученные при этом ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Можно рассматривать задачи $T'\,S$ (вместо (2) задаются $U'(0,x)=\varphi(x),\ V(0,x)=\psi(x)$) $T\,S'$, $T'\,S'$. .По исследованиям уравнений и систем составного типа см. [4-8].

Литература

1. **Владимиров В.С.** *Уравнения математической физики.* , Москва, Наука, 1981, 511 стр.
2. **Ильин В.А.** *Разрешимость смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений.* Успехи математических наук - 1960. - 15, 2(92),С.97–154.
3. **Алимов Ш.А.** *Избранные научные труды.* Ташкент.- 2015 г.изд.Мериюс.
4. **Зикиров О.С.** Вестник ЮУрГУ, Серия Матем, Механ., Физ., 8(2), 2016,с.19-26.
5. **Кожанов А.И.** Известия Иркутского гос. Ун., Серия Математика, 2019, с.120 – 127.
6. **Сраждинов И.Ф.** *О разрешимости смешанных задач для систем составного типа.* IUzbek Mathematical Journal.2010, 3, p.121 – 130.
7. **Сраждинов И.Ф.** *Об одной составной системе с коэффициентом типа Лежандра.* Доклады Академии наук Республики Узбекистан, - 5, - 2016,стр.7-10.
8. **Сраждинов И.Ф.** *Разрешимость нач. – кр. задачи для одн.сист.сост.типа* Межвузовский науч.- конгресс, Москва, Изд-во Инфинити, 2020, Том 2,с.145 – 152, DOI 38/10/34660 / INF 2019? 62? 47001.

УДК 517.956

Неклассическая задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения

Тураев Р. Н.[1], Хуррамов А. Т.[2], Эшкораев К. А.[3]
[1]Термезский государственный университет инженерии и агротехнологий, г. Термез, Узбекистан; rasul.turayev@gmail.com1
[2]Термезский государственный университет инженерии и агротехнологий, г. Термез, Узбекистан; xurramovabbos625@gmail.com2
[3]Термезский государственный университет инженерии и агротехнологий, г. Термез, Узбекистан; qahramon87@bk.ru3

Параболические дифференциальные уравнения играют важную роль в исследовании теории теплопроводности, диффузионных процессов, биологических моделей и задач фильтрации. В частности, неклассические задачи, возникающие в случаях, когда граничные условия являются нелокальными или связанными с интегральными свойствами решения, позволяют более точно моделировать прикладные процессы.

В данной работе рассматривается неклассическая задача типа Флорина со свободной границей для квазилинейного параболического уравнения. Основная цель работы заключается в обосновании корректности постановки задачи и получении априорных оценок типа Шаудера. На основе установленных оценок доказываются существование и единственность решения, а также исследуются некоторые его качественные свойства.

Постановка задачи. Требуется найти пару функций $(s(t), u(t,x))$, где функция $s(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $0 < t \leq T$, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T,\ 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет следующему уравнению и условиям:

$$u_t = a(t,x,u_x)u_{xx} + f(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,x_0) = u(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{5}$$

здесь $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, причем функция $s(t)$ удовлетворяет условию Гельдера; условие (5) обеспечивает поток через подвижную границу, а нелокальное условие (4) обеспечивает согласованность состояния границы с процессом внутри области.

Всюду в работе предполагается, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1. Функции $a(t,x,u_x)$ и $f(t,x)$ определены в области

$$(t,x)\in\Omega=\{(t,x):0\le t\le T,\ 0\le x<\infty\},\quad |u_x|<\infty$$

и ограничены при любых значениях своих аргументов.

2. Для любого $(t,x)\in\Omega$ и произвольного p справедливо:

$$a(t,x,p)\ge a_0>0,$$

$$\frac{|f(t,x)|}{a(t,x,p)}\le K(p^2+1).$$

3. При $(t,x)\in\Omega$, $|p|<\infty$ функция $a(t,x,u_x)$ по переменным x и p, а функция $f(t,x)$ по переменной x имеют непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка, а также удовлетворяют условию Гельдера по переменной t.

Функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные и дифференцируемые производные до третьего порядка включительно, а функции $\psi_i(t)\quad (i=1,2)$ - до первого порядка, причём функции $\varphi'''(x)$ и $\psi_i'(t)\quad (i=1,2)$ удовлетворяют условию Гёльдера. При этом выполняются следующие условия:

$$\varphi'(0)=\psi_1(0),\quad \alpha\varphi(x_0)=\varphi(s_0),\quad \varphi'(s_0)=\psi_2(0),\quad \psi_1(t)\ge\psi_2(t)\ge\psi(0)>0,$$

$$0\le t\le T,\quad \varphi'(x)\ge\psi_2(0),\quad 0\le x\le s_0,\quad \psi_1'(t)\ge 0,\quad \psi_2'(t)\le 0,\quad \alpha\le 0.$$

Априорные оценки для решения задачи

В области D возникает необходимость дифференцирования уравнения (1) по переменной x. По этой причине в дальнейшем повсеместно предполагается, что функции $a(t,x,u_x)$ и $f(t,x)$, а также их производные по x и p ограничены на произвольном замкнутом множестве своих аргументов и удовлетворяют условию Гельдера. Дифференцируя уравнение (1) по x в области D, относительно $u_x(t,x)=v(t,x)$ получаем следующую задачу:

$$v_t=av_{xx}+Av_x^2+F(t,x),\quad (t,x)\in D, \tag{6}$$

$$v(0,x)=\varphi'(x),\quad 0\le x\le s_0, \tag{7}$$

$$v(t,0)=\psi_1(t),\quad 0\le t\le T, \tag{8}$$

$$v(t,s(t))=\psi_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{9}$$

$$\psi_2(t)\dot{s}(t)=\alpha a(t,x_0,v(t,x_0))v_x(t,x_0)-a(t,s(t),\psi_2(t))v_x(t,s(t))-f(t,s(t)),\quad 0\le t\le T, \tag{10}$$

здесь

$$A=a_x(t,x,v),\quad F(x,t)=\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}.$$

В дальнейшем доказывается эквивалентность задач (1)-(5) и (6)-(10). Для решения задачи типа Стефана определяются априорные оценки производных высших порядков.

Сначала докажем эквивалентность задач (6)-(10) и (1)-(5), а затем получим некоторые априорные оценки решения задачи (6)-(10).

Лемма 1. Пусть пара функций $(s(t),v(t,x))$ является решением задачи (6)-(10). Тогда решение $(s(t),u(t,x))$ задачи (1)-(5) имеет следующий вид:

$$u(t,x)=\int_{x_0}^{x}v(t,\xi)d\xi+\frac{1}{\alpha-1}\int_{x_0}^{s(t)}v(t,\xi)d\xi, \tag{11}$$

Лемма 2. Пусть для $(t,x)\in Q$ и произвольного v выполнены неравенства $0\le A_4(t,x)\le N_1$, $A_3(t,x,v)\le N_2$. Тогда для решения задачи (1)-(4) справедлива следующая оценка:

$$0\le\psi_2(t)\le v(t,x)\le\max\left\{N_0e^{mT},\ \frac{N_1e^{mT}}{m-N_2}\right\}=N_3,$$

где $m - N_2 > 0$ и $m > 0$.

На основе приведенных выше лемм получаются априорные оценки решения задачи.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1)-(4) и лемма 2. Тогда решение задачи (1)-(5) единственно.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 и условий согласования, вытекающих из уравнения (1) в точках $(0,0)$ и $(0,s_0)$, существует единственное решение задачи (1)-(5), принадлежащее классу $u(t,x) \in C^{2+\gamma}(\bar{D})$, $s(t) \in C^{1+\gamma}[0,T]$. На основе установленных априорных оценок, а также теоремы 1 о единственности доказывается существование решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа. М: Мир, 1968 г.428 с.
2. **Кружков С.Н.** Априорная оценка для производной решения параболического уравнения Вестник МГУ.Сер. 1.1967 г.№ 3.41-48 с.
3. **Ладыженская О.А.,Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. ДМ.: Наука,1967 г.736 с.
4. **Тураев Р.Н.** Неклассическая задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения. UZMJ 2017 г. 8-16 с.
5. **Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н.** Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения Вестн. Самарского Гос. Техн. Универ. Сер. "Физ.-мат. науки".2012 г 99-106 с.

УДК 517.946

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ПЕРВОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Турсунов Ф. Р.[1], Маликов З.[2], Шамсиева А. С.[3]
[1]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан;
farhod.tursunov.76@mail.ru
[2]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан;
[3]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан;
samarsas2024@gmail.com

Пусть $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ точки двумерного Евклидового пространства и G - неограниченная область в R^2 лежащая внутри полосы $0 < y_2 < h, h = \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0$ граница, которой состоит из прямой $T : y_2 = 0$ и некоторой кривой $S : y_2 = F(y_1)$ удовлетворяющей условиям $0 < F(y_1) < h, |F'(y_1)| < M < \infty$. Положим $\bar{G} = G \cup \partial G, \quad \partial G = S \cup T$.

Предположим, что для некоторого $c_0 > 0$ выполняется условия:

$$\int_{\partial G} \exp\{-c_0 ch\rho_1 |y'|\} dS < \infty, 0 < \rho_1 < \rho$$

Через $A_{l\times n}(x)$ обозначим класс матриц $D\left(x^T\right)$, с элементами состоящими из линейных форм с постоянными коэффициентами из C которые удовлетворяющее условие:

$$D^*\left(x^T\right) D\left(x^T\right) = E\left(|x|^2 u^0\right), \tag{1}$$

где $D^*\left(x^T\right)$ - сопряженная матрица к $D\left(x^T\right)$.

В области G рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = 0, \tag{2}$$

где $D\left(x^T\right) \in A_{l\times n}(x)$. Обозначим

$$K_\rho(G) = \left\{U(y) \in C'(G) \cap C(\bar{G}) : U(y) \le \exp\left[o\left(\exp\rho\,|y'|\right)\right], |y'| \to \infty, y \in G\right\}.$$

Постановка задача. Пусть $U(x) \in C'(G) \cap C(\bar{G})$ удовлетворяет систему (2) в области G и на части кривой S границы области задано значение вектор - функции $U(x)$, т.е.

$$U(x)|_s = f(x), \tag{3}$$

где $f(x)$ - непрерывная функция, заданная на части S границы области G.
Требуется продолжить $U(x)$ в G, используя условие (3). Задача (2) и (3) называется задача Коши.

Рассматриваемая задача (2) - (3) относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Для решения задача надо построит функции Карлемана.

Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального оператора была получена М.М. Лаврентьевым [1,2]. В этих работах дано определение функции Карлемана для случая, когда данные Коши заданы приближенно, а также приведена схема регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа. Применяя этот метод, Ш. Ярмухамедов [3] построил функции Карлемана для широкого класса эллиптических операторов, заданных в пространственных областях специального вида, когда часть границы области, является конической поверхностью либо гиперповерхностью.

Конструкция функции Карлемана. Пусть $\sigma > 0$. Определим при $\alpha > 0$ функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ следующим равенством [3]:

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{2\pi K\left(x_2\right)}, \tag{4}$$

где

$$\varphi(x, y) = \int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{K(w)}{w - x_2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, K(w) = \frac{e^{\sigma w}}{w - x_2 + 2h}, K\left(x_2\right) = \frac{1}{2h}e^{\sigma x_2} \tag{5}$$
$$w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_2, \quad \alpha = |y' - x'|, \quad x' = (x_1, 0), \quad y' = (y_1, 0), 0 < x_2 < h.$$

В формулу (5) выбираем

$$K(w) = \frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2 + 3h}, K\left(x_2\right) = \frac{1}{3h}e^{\sigma x_2^2}$$

и отделяя мнимую часть с учетом (4) получим:

$$\Phi_\sigma(x, y) = -\frac{3h}{2\pi}e^{-\sigma\left(\alpha^2+x_2^2-y_2^2\right)}\left[\int_0^\infty \frac{2\left(y_2 - x_2\right)e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\left(u^2+r^2\right)\left(u^2+\alpha^2+\left(y_2 - x_2 + 3h\right)^2\right)}udu+\right.$$

$$+\int_0^\infty \frac{3he^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\left(u^2+r^2\right)\left(u^2+\alpha^2+\left(y_2 - x_2 + 3h\right)^2\right)}udu+$$

$$+\int_0^\infty \frac{\sqrt{u^2+\alpha^2}e^{-\sigma u^2}\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\left(u^2+r^2\right)\left(u^2+\alpha^2+\left(y_2 - x_2 + 3h\right)^2\right)}udu-$$

$$\left.-\int_0^\infty \frac{\left(y_2 - x_2 + 3h\right)\left(y_2 - x_2\right)e^{-\sigma u^2}\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\left(u^2+r^2\right)\left(u^2+\alpha^2+\left(y_2 - x_2 + 3h\right)^2\right)}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right]. \tag{6}$$

В работе по данным Коши на гладкой части границы неограниченной области с помощью функции Карлемана построено регуляризированное решение задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка.

Литература

1. **Лаврентьев М.М.** *О задаче Коши для уравнения Лапласа.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1956. – т. 20, вып. 6. – С. 819–842.
2. **Лаврентьев М.М.** *О некоторых некорректных задачах математической физики.* – Новосибирск: Изд. СО АН СССР. – 1962.
3. **Ярмухамедов Ш.** *О задаче Коши для уравнения Лапласа.* // Дисс. докт. физ.-матем. наук. – ВЦ СО АН СССР. – Новосибирск. – 1983.

УДК 517.956.6

Функциональные уравнения с разделяющимся переменными

Тураев Х.
Термезский государственный педагогический институт;
haydarturayev1950@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$\overline{x}(t) = A(t) \cdot B\left(x(t)\right), \tag{1}$$

где $t \in R$, A(t) – известная функция переменной t , $x(t)$ – неизвестная функция, $B\left(x(t)\right)$ – известная функция переменнной x, $\overline{x}(t)$ – средняя производная вычисляемая по формуле

$$\overline{x}(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x\left(\sigma(t)\right) - x(t)}{\sigma)t) - t}$$

где $\sigma(t) \neq t$ [1].

Умножая обе части равенства (1) на $\frac{\Delta t}{B(x)}$, получим

$$\frac{\Delta x}{B(x)} = A(t)\Delta t$$

Отсюда $\sum \frac{\Delta(x)}{B(x)} = \sum A(t)\Delta(t) + \omega(t)$ где $\omega(t)$ любая функция удовлетворяющее уравнению

$$\omega\left(\sigma(t)\right) = \omega(t).$$

Пример. $\overline{x} = -\frac{1+x}{1+t}$, $\sigma(t) = t + 1$, $(\Delta t = 1)$.

Умножая обе части равенство на $\frac{\Delta t}{1+x}$ получим

$$\frac{\Delta x}{1+x} + \frac{\Delta t}{1+t} = 0.$$

Учитывая формулу [2]:

$$\sum \frac{\Delta(t)}{t^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Delta t^{n-1}} \psi^{n-1}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) + \omega(t),\ n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{2}$$

имеем

$$\sum \frac{\Delta(t)}{1+t} = \psi(t+1) + \omega(t).$$

Поэтому общее двустороннее решение данного уравнения можно представить в квадратурах [2]

$$\sum \frac{\Delta(x)}{1+x} + \psi(t+1) = \omega(t).$$

Формулу (2) мы не можем применить для вычисления сумму (интеграла) $\sum \frac{\Delta(x)}{1+x}$ потому, что $\Delta(x)$ – переменная. Чтобы получить решение в явном виде мы поступим следующим образом

$$1 + \frac{\Delta(x)}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+t} \ \Rightarrow\ 1 + \frac{\Delta(1+x)}{1+x} = \frac{t}{1+t} \ \Rightarrow\ \ln\left(1 + \frac{\Delta(1+x)}{1+x}\right) = \ln\frac{t}{1+t} = -ln\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

или

$$\Delta \ln (1+x) = -\Delta \ln t.$$

Отсюда $\sum \Delta \ln(1+x) = -\sum \Delta \ln t$ или

$$\ln (1+x) = -\ln t + \ln \omega(t) \Longrightarrow\ t(1+x(t))) = \omega(t).$$

Литература

1. **Тураев Х., Хусанов Д.Х.** *Структура общего решения линейных дифференциально-функциональных уравнений первого порядка нейтрального типа* докл. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. 2. С.II-13.
2. **Т.Турдиев** *О двусторонней задаче для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Кандидатская диссертация, Ташкент, 1965.

УДК 517.957

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В ВИДЕ СУММЫ

Уразбоев Г. У.[1], Хасанов М. М.[2]
[1] Хорезмское отделение Института математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ургенч, Узбекистан gayrat71@mail.ru
[2]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; hmuzaffar@mail.ru

Уравнение КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций изучено в работах [1], [2], а в работе [3] изучена отрицательно-четная иерархия мКдФ и ее солитонные решения.

В этой работе изучается интегрирование уравнения мКдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы

$$\begin{cases} q_{xt} = -2q\mu_t + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, t)\psi_1^+(x, \lambda_k, t)\psi_2^-(x, \lambda_k, t), \\ \_\mu_x = -q^2 \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in R. \tag{1}$$

Требуется найти решение $q(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad [q_t(x,t) - \mu_t(x,t)]|_{x=0} = \beta(t), \tag{2}$$

$$q(x+\pi, t) = q(x,t), t \geq 0, \quad x \in R,$$

$$\begin{array}{c} q(x,t) \in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \\ \mu(x,t) \in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \end{array} \tag{3}$$

где $q_0(x) \in C^3(R)$, $\mu_0(t) \in C^1[0,\ \infty)$ и $\beta(t) \in C[0,\ \infty)$ заданные действительные функции, $q_0(x)$ имеет период π, а функция $\beta(t)$ ограничена. Здесь $\alpha_k(t) \in C([0,\ \infty))$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику
$\alpha_k(t) = O\left(k^{-3}\right),\ \ k \to \pm\infty$,$\psi^{\pm} = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\ \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, \quad x \in R, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1(x,t) \\ y_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t),\ s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda) = (0,\ 1)^T$.

Спектр оператора (4) состоит из множества $E = \bigcup\limits_{n\in Z}[\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n \in Z$ задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (4) вместе со знаками $\sigma_n(t) = sign\{s_2(\pi, \xi_n(t), t) - 1/s_2(\pi, \xi_n(t), t)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (4).

Теорема. Пусть $(q(x,t), \mu(x,t)\psi^+(x,\lambda,t), \psi^-(x,\lambda,t))$ является решением задачи (1)-(3). Тогда спектр оператора Дирака с коэффициентом $q(x+\tau,t)$ не зависит от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in Z\backslash\{0\}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \left\{ q_t(\tau,t) - \mu_t(\tau,t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k \alpha_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, t, \tau)}{\xi_n^2 - \lambda_k^2} \right\}, \quad n \in Z\backslash\{0\}. \tag{5}$$

Знаки $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \in Z\backslash\{0\} \tag{6}$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \in Z\backslash\{0\}$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

Учитывая формулы

$$q(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi), q_t(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau,t) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\mu(\tau,t) = \mu_0(t) - \int_0^\tau q^2(s,t)ds, \mu_t(\tau,t) = \mu_0'(t) - 2\int_0^\tau q(s,t) q_t(s,t) ds \tag{7}$$

систему (5) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 1. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого, сначала найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(t)$,$\sigma_n^0(t)$, $n \in Z$, соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$. Далее, решая задачу Коши (5)+(6) находим $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$,$n \in Z\backslash\{0\}$. По формуле следов (7) находим решение $q(x,t)$ задачи (1)-(3), и затем из формулы (8) определяем $\mu(x,t)$. После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$.

Литература

1. **Уразбоев Г.У., Хасанов М.М.** *Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций.* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. - 2022. - Т. 32. - Вып. 2. - С. 228-239.

2. **Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Балтаева И.И.** *Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с источником специального вида.* // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. - 2023. - Т. 44. - С. 31-43.

3. **Gomes J.F., Starvaggi Franca G., de Melo G.R., Zimerman A.H.** *Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions.* // J. Phys. A: Math. Theor. - 2009. - V. 42. - 445204 (11pp).

УДК 517.957

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Уразбоев Г. У.[1], Хасанов М. М.[2] Исмоилов О. Б.[3]

[1] Хорезмское отделение Института математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ургенч, Узбекистан gayrat71@mail.ru

[2]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни; hmuzaffar@mail.ru

[3] Хорезмское отделение Института математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ургенч, Узбекистан bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

Уравнение КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций изучено в работах [1], [2], а в работе [3] изучена отрицательно-четная иерархия мКдФ и ее солитонные решения. Смешанные положительные и отрицательные иерархии исследованы в [4], [5].

В этой работе изучается нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) отрицательного порядка с интегральным источником

$$\left\{\begin{array}{c} p_{xt}=2\mu p-q_x+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- -\psi_2^+\psi_2^-)d\lambda, \\ q_{xt}=2\mu q+p_x+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_2^- +\psi_2^+\psi_1^-)d\lambda \quad t>0, \quad x\in R. \\ \mu_x=2qq_t+2pp_t \end{array}\right. \tag{1}$$

с условиями

$$q(x,t)|_{t=0}=q_0(x),\ p(x,t)|_{t=0}=p_0(x),\ \mu(x,t)|_{x=0}=\mu_0(t), \tag{2}$$

где, $\mu_0(t)\in C^1[0,\ \infty)$, $p_0(x)$ и $q_0(x)$ - заданные действительные функции с периодом π. Требуется найти действительные периодические по переменной x функции $p(x,t), q(x,t)$ и $\mu(x,t)$, причем

$$p(x+\pi,t)\equiv p(x,t), q(x+\pi,t)\equiv q(x,t), t\geq 0, \quad x\in R,$$

и удовлетворяющие условиям гладкости:

$$\begin{array}{l} p(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0), \\ q(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0), \\ \mu(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0). \end{array} \tag{3}$$

Здесь $\beta(\lambda,t)\in C\left([0,\ \infty)\times[0,\ \infty)\right)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику, $\beta(\lambda,t)=\underline{\underline{O}}\left(1/\lambda^3\right),\ \lambda\to\infty$
$\psi^{\pm}=(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\ \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t)=1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega(x,t)y=\lambda y, \quad ,x\in R, \tag{4}$$

где

$$B=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right),\ \Omega(x,t)=\left(\begin{array}{cc} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{array}\right),\ y=\left(\begin{array}{c} y_1(x,t) \\ y_2(x,t) \end{array}\right)$$

Через $s(x,\lambda,t)=(s_1(x,\lambda,t),\ s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t)=(0,\ 1)^T$.

Теорема. Пусть $(p(x,t),q(x,t),\mu(x,t),\psi^+(x,\lambda,t),\psi^-(x,\lambda,t))$ является решением задачи (1)-(2). Тогда спектр оператора Дирака с коэффициентом $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$, не зависит от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z\backslash\{0\}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=\frac{1}{\xi_n}(-1)^n\sigma_n h_n(\xi)\left\{q_t(\tau,t)+\mu(\tau,t)-p(\tau,t)-\xi_n(\tau,t)-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\right\}, n\in Z\backslash\{0\}. \tag{5}$$

Знаки $\sigma_n(\tau,t)=\pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)\,,\ \ n\in Z\backslash\{0\} \tag{6}$$

где $\xi_n^0,\ \sigma_n^0,\ \ n\in Z\backslash\{0\}$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентами $p_0(x), q_0(x)$.

Учитывая формулы

$$q(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi), p(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2n-1}-\lambda_{2n}}{2}-\xi_n(\tau,t)\right), \tag{7}$$

$$\mu(\tau,t)=\mu_0(t)+2\int_0^{\tau}(p(s,t)p_t(s,t)+q(s,t)q_t(s,t))ds, p_t=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t},$$

$$q_t(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t},$$

систему (5) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 1. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Действительно, обозначим через λ_n, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\in Z$ спектральные данные задачи (4) соответствующие коэффициентам $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$. Найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$, соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau)$ и $q_0(x+\tau)$. Далее решаем задачу Коши

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)\,,n\in Z$$

для системы уравнений Дубровина (5). После этого по формулам следов (7) находим решения $p(x,t)$ и $q(x,t)$ задачи (1)-(3), и затем из формулы (8) определяем $\mu(x,t)$. После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$.

Литература

1. **Уразбоев Г.У., Хасанов М.М.** *Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций.* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. - 2022. - Т. 32. - Вып. 2. - С. 228-239.
2. **Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Балтаева И.И.** *Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с источником специального вида.* // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. - 2023. - Т. 44. - С. 31-43.
3. **Gomes J.F., Starvaggi Franca G., de Melo G.R., Zimerman A.H.** *Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions.* // J. Phys. A: Math. Theor. - 2009. - V. 42. - 445204 (11pp).
4. **Kundu A., Sahadevan R., Nalinidevi L.** *Nonholonomic deformation of KdV and mKdV equations and their symmetries, hierarchies and integrability.* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. - 2009. - V. 42. - P. 1-13.

УДК 517.95

О единственности решения краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка в R^3

Хамитов А. А.[1], Эрматов Ж. С.[2]
[1,2]Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан;
[1]azizbek.khamitov.93@mail.ru;
[2]ermatovjamoldin578@gmail.com.

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка представляют собой одно из актуальных направлений современной математической физики. Они находят широкое применение при решении задач нелинейной акустики, в гидродинамической теории космической плазмы, а также при моделировании процессов фильтрации жидкости в пористых средах [1].

Учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы уравнений Навье-Стокса было выведено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени [2]:

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_xu_{xx},\quad \nu=\text{const}.$$

При $\nu=1$ данное уравнение описывает осесимметричный поток, а при $\nu=0$ плоскопараллельный поток [3].

В области $D=\{(x,y,z):0<x<p,\ 0<y<q,\ 0<z<r\}$ рассмотрим уравнения третьего порядка вида

$$L[u]\equiv u_{xxx}+a_1u_x+a_2u-u_{yy}-u_{zz}=f(x,y,z) \tag{1}$$

где $p,\ q,\ r\in R^+$ и для него исследуем следующую задачу.

Задача A**.** Найти решение уравнения (1) в области D из класса

$$u(x,y,z) \in C^{3,2,2}_{x,y,z}(D) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}\left(\overline{D}\right),$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0,z) = u_y(x,q,z) = 0, \quad u_z(x,y,0) = u_z(x,y,r) = 0, \ 0 \le x \le p, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u(0,y,z) = \psi_1(y,z), \ u_x(p,y,z) = \psi_2(y,z), \\ u_{xx}(p,y,z) = \psi_3(y,z), \end{gathered} \qquad 0 \le y \le q, \ 0 \le z \le r, \tag{3}$$

где $\psi_i(y), i = \overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции.

Теорема. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два различных решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Для этого обе части уравнения (1) умножим на u, тогда получим

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u \cdot u_{xx} - \frac{1}{2} \cdot u_x^2 + \frac{a_1}{2}u^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(u \cdot u_y) + u_y^2 - \frac{\partial}{\partial z}(u \cdot u_z) + u_z^2 + a_2 u^2 = 0. \tag{4}$$

Интегрируя тождество (4) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{a_1}{2}\int_0^q\int_0^r u^2(p,y,z)dydz + \frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)dydz +$$

$$+ \iiint_D u_y^2(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_D u_z^2(x,y,z)\,dxdydz + a_2\iiint_D u^2(x,y,z)\,dxdydz = 0.$$

Из последнего тождество следует:

1) если $a_1 = a_2 = 0$, то третьего и четвертого слагаемого, имеем $u_y(x,y,z) = 0$ и $u_z(x,y,z) = 0$, оттуда получим $u(x,y,z) = f(x)$, где $f(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей однородному уравнению (1) и условиям задачи A. Тогда поставляя в уравнение (1), имеем $f'''(x) = 0$. Решение дифференциального уравнения имеет в виде

$$f(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Из условии (3), т.е. $f(0) = f'(p) = f''(p) = 0$, получим $f(x) = 0$. Следовательно, $u(x,y,z) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

2) если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то из последнего слагаемого получим $u(x,y,z) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

В силу последнего, получим $u_1(x,y,z) = u_2(x,y,z)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Юлдашев Т. К.** *Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - №1(34). - С.56-65.

2. **Рыжов О. С.** *Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа.* Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

3. **Диесперов В.Н.** *О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения.* Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - №5. - С. 1265-1279.

ДИНАМИКА ВЯЗКОУПРУГОЙ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Хамроева З. К.
Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;
zilolaqaxramonova24@gmail.com;

Исследуется задача о собственных изгибных колебаниях криволинейного участка трубопровода большого диаметра, моделируемого как тонкая вязкоупругая тороидальная оболочка, с учётом динамического влияния протекающей внутри идеальной несжимаемой жидкости. Получено разрешающее уравнение относительно амплитудных значений радиального перемещения срединной поверхности оболочки; исследовано влияние скорости потока жидкости и относительной толщины оболочки на частоты собственных изгибных колебаний.

Ключевые слова: вязкоупругая тороидальная оболочка, протекающая жидкость, изгибные колебания, оператор упругости, ядро релаксации, частоты собственных колебаний.

Тонкостенные криволинейные трубы широко используются во многих областях народного хозяйства; в процессе эксплуатации они, как правило, находятся в контакте с жидкой или газообразной средой и подвергаются динамическим воздействиям [1,2].

Постановка задачи. Рассматривается криволинейный участок трубопровода в виде тонкостенной трубы большого диаметра, по которому протекает идеальная несжимаемая жидкость с постоянной скоростью $U = const$ и постоянным гидростатическим давлением $p_0 = const$. Ставится задача об исследовании частот и форм собственных изгибных колебаний в плоскости кривизны данного участка трубопровода как тонкой тороидальной оболочки с учётом динамического влияния протекающей жидкости. Срединная поверхность оболочки задаётся в тороидальных криволинейных координатах β, θ, где β – центральный угол тора ($0 \le \beta \le \pi$), θ – угол в поперечном сечении оболочки ($0 \le \theta \le 2\pi$), продольная ось оболочки составляет половину окружности радиуса R. Дифференциальное уравнение движения криволинейного участка трубопровода со стационарным потоком жидкости, записанное в перемещениях u, v, w, W_y, ϑ в координатах β, θ с учётом составляющих сил инерции X_i^*, имеет вид:

$$\widetilde{E}\Big(\frac{r^2}{R^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\beta\partial\theta^2}\cos\theta + \frac{r^3}{R^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\beta^3} - \frac{r^2}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{\partial u}{\partial\beta}\sin\theta\Big) + \frac{r^3}{R^3}\frac{\partial^2 W_y}{\partial\beta^2} +$$

$$+\frac{r^2}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\frac{\partial}{\partial\theta}(W_y\cos\theta) - W_y\sin\theta\Big] + \frac{h^2}{r^2 12(1-\nu^2)}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\Big(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\theta^2} + \vartheta\Big)\Big) =$$

$$= \frac{r^3}{R}p\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big) - r^2 p\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big) + \frac{r}{h}p_0\frac{\partial^3\vartheta}{\partial\theta^3} - r^2 p\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^2\partial t^2} + \frac{r}{h}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(p_{\text{ж}}),$$

где $\widetilde{E}$ – операторный модуль упругости вязкоупругого материала,

$$\widetilde{E}\varphi(t) = E_{01}\Big[\varphi(t) - \int_0^t R_E(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\Big], \tag{1}$$

$\varphi(t)$ – произвольная функция времени, $R_E(t-\tau)$ – ядро релаксации, E_{01} – мгновенный модуль упругости. Полагая интегральные члены в (1) малыми и применяя к (2) процедуру замораживания [3] с трёхпараметрическим ядром релаксации $R(t) = Ae^{-\beta t}/t^{1-\alpha}$, приходим к комплексному оператору $\overline{E}\varphi = E\big[1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega_R)\big]\varphi$, где Γ^C, Γ^S – косинус- и синус-образы Фурье ядра релаксации.

Нормальную составляющую перемещения $w(\beta, \theta, t)$, удовлетворяющую граничным условиям $w|_{\beta=0,\pi} = 0,\ \partial^2 w/\partial\beta^2|_{\beta=0,\pi} = 0$ и условию цикличности по координате θ, ищем в виде

$$w(\beta, \theta, t) = f(t)\, b_m \cos m\theta \sin n\beta, \tag{2}$$

где $b_m = const$, m, n – волновые числа, определяющие формы колебаний оболочки в окружном и продольном направлениях. Подставив соответствующие данному виду выражения для остальных составляющих перемещения u, v, ϑ, W_y в уравнение движения (1) и вычислив частные производные по β и θ, получаем разрешающее уравнение относительно неизвестных амплитудных значений b_m,

линейное однородное относительно $f(t)$ и $f''(t)$. Поскольку решение этой однородной системы отлично от нуля ($b_m \neq 0$), определитель коэффициентов однородной системы должен равняться нулю, что и даёт частотное уравнение для ω_{mn}.

Численный анализ частотного уравнения показывает, что частоты собственных изгибных колебаний ω_{mn} снижаются при увеличении скорости потока жидкости от 0 до 25 м/с не более чем на 10%; при увеличении относительной толщины оболочки h/r (при постоянной кривизне трубы) собственные частоты возрастают. Таким образом, чем больше кривизна трубы и чем толще её стенки, тем более жёсткой является конструкция.

Литература

1. Авлиякулов Н.Н., Сафаров И.И. Современные задачи статики и динамики подземных трубопроводов. Ташкент: Fan va texnologiya, 2007. 306 с.

2. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.

3. Бозоров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: СО РАН, 1996. 188 с.

УДК 517.955+517.957

Смешанная задача для уравнения, составленного из комбинаций нелинейных уравнений КдФ(+1) и КдФ(-1) с самосогласованным источником в классе периодических бесконечнозонных функций

Хасанов А. Б.[1], Нормуродов Х. Н.[2], Эрмаматова Ф. Э.[3], Хасанов Г. А.[4]
[1]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан; ahasanov2002@mail.ru [2]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан; normurodov.96@bk.ru [3]Самаркандский государственный педагогический институт, Самарканд, Узбекистан; fotimaermamatova2020@gmail.com [4]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхона Беруний, Ургенч, Узбекистан; xasanov.gulom@urdu.uz

В настоящей работе рассматривается начально - граничная задача для нелинейного уравнения, составленного из комбинаций уравнений КдФ(+1) и КдФ(-1) с самосогласованным источником вида:

$$\begin{cases} q_t = \left(p^2\right)_x + q_{xxx} - 6qq_x + 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k s\left(\pi, \lambda_k, t\right) \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\psi_+^2\left(x, \lambda_k, t\right)\right) \\ p_{xx} - pq = 0, q = q(x,t), p = p(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{cases} q(x,t)|_{t=0} = q_0(x),\ p^2(x,t)\big|_{x=0} = p_1(t),\ q(x,t)|_{x=0} = q_1(t) \\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^4(\mathbb{R}), p_1(t), q_1(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0) \\ |p_1(t)| \leq M_1, |q_1(t)| \leq M_2, M_1 > 0, M_2 > 0 \end{cases} \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π-периодических по x функций:

$$\begin{cases} q(x+\pi,t) = q(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \geq 0) \\ p^2(x+\pi,t) = p^2(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \geq 0) \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\alpha_k, k \geq 0$ заданная действительная последовательность, удовлетворяющая условию, $\alpha_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right), k \to \infty, \psi_+(x, \lambda, t)$ - решения Флоке уравнения Хилла

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda y, x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{4}$$

и определяется следующим образом:

$$\psi^{+}(x,\lambda)=c(x,\lambda)+\frac{s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)-\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)}s(x,\lambda). \tag{5}$$

Здесь $\lambda_k=\lambda_k(t), k\geq 0$-собственные значения периодической или антипериодической задачи $(y(0,t)=\pm y(\pi,t), y'(0,t)=\pm y'(\pi,t))$ для уравнения (5), функция $c(x,\lambda,t)$ и $s(x,\lambda,t)$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,t)=1, c'(0,\lambda,t)=0$ и $s(0,\lambda,t)=1, s'(0,\lambda,t)=0$ соответственно.

В данной работе предлагается алгоритм построения точных решений $\left(q(x,t),p^2(x,t),\psi_{+}(x,\lambda,t)\right)$, $x\in\mathbb{R}, t>0$ задачи (1) - (3) сведением её к обратной спектральной задаче для оператора Хилла:

$$L(\tau,t)y\equiv -y''+q(x+\tau,t)y=\lambda y, x\in\mathbb{R}, t>0. \tag{6}$$

Функция $\Delta(\lambda,\tau,t)=c(\pi,\lambda,\tau,t)+s'(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (6). Спектр оператора Хилла $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L)\equiv\{\lambda\in R:|\Delta(\lambda)|\leq 2\}=R\backslash\left\{(-\infty,\lambda_0)\bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right\}.$$

Интервалы $(-\infty,\lambda_0(t)),(\lambda_{2n-1}(t),\lambda_{2n}(t)), n\geq 1$, называются лакунами, где $\lambda_n=\lambda_n(t)$, $n\geq 0$ - корни уравнения $\Delta(\lambda)\mp 2=0$. Корни уравнения $s(\pi,\lambda,\tau,t)=0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t), n\geq 1$. Числа $\xi_n(\tau,t), n\geq 1$, и знаки $\sigma_n(\tau,t)=\operatorname{sgn}\left\{s'\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)-c\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)\right\}, n\geq 1$, называются спектральными параметрами оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\{\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm 1, n\geq 0\}$ и границы спектра $\lambda_n=\lambda_n(t), n\in\mathbb{Z}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$. Коэффициент $q(x+\tau,t)$ оператора $L(\tau,t)$ определяются однозначно по спектральным данным. С помощью начальной функций $q_0(x+\tau)$ построим оператора Хилла $L(\tau,0)$.

Решая прямую задачу, найдём спектральные данные $\left\{\lambda_{n-1},\xi_n^0(\tau),\sigma_n^0(\tau),n\geq 1\right\}$, оператора $L(\tau,0)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Если начальные данные $q_0(x), q_1(t)$ и $p_1(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^4(R), q_1(t), p_1(t)\in C^1(t>0)\cap C(t\geq 0) \\ |p_1(t)|\leq M_1, |q_1(t)|\leq M_2, M_1>0, M_2>0 \end{cases}$$

то существует однозначно определяемые бесконечнозонные решения $\left(q(\tau,t),p^2(\tau,t),\psi_{+}(\tau,\lambda,t)\right)$, $\tau\in\mathbb{R}, t>0$ смешенной задачи (1) - (3), которые определяются, соответственно, суммой равномерно сходящейся рядов и формула (5):

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)\right),$$

$$p^2(\tau,t)=p_1(t)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(\tau,t)}{\xi_k(0,t)}=\frac{2p_1(t)\xi_n(\tau,t)}{A_n(t)-q_1(t)}\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\xi_k(\tau,t)}{\xi_k(0,t)},$$

где $A_n(t)=\lambda_0+\lambda_{2n-1}+\lambda_{2n}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\left(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(0,t)\right)$, при этом координаты

$$\xi\equiv\xi(\tau,t)=\left(\xi_1(\tau,t),\xi_1(\tau,t),\cdots,\xi_n(\tau,t),\cdots\right),$$
$$\sigma\equiv\sigma(\tau,t)=\left(\sigma_1(\tau,t),\sigma_2(\tau,t),\cdots,\sigma_n(\tau,t),\cdots\right)$$

векторов удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)g_n(\xi), n\geq 1,$$

с начальными условиями:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\,\sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),n\geq 1,$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},$$

$$g_n(\xi)=\frac{p_1(t)}{A_n(t)-q_1(t)}\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\xi_k(\tau,t)}{\xi_k(0,t)}+2\lambda_0+2\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t))+$$

$$+4\xi_n(\tau,t)+\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\left(\prod_{i=1,i\neq n}^{\infty}\frac{\xi_i(\tau,t)-\lambda_k}{i^2}\right),n\geq 1.$$

Литература

1. **А.Б. Хасанов, А.Б. Яхшимуратов** *Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.* ТМФ, 164:2 (2010), 214-221.
2. **G.U. Urazboev, M.M. Hasanov** *Integration of the negative order Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions.* Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 32:2 (2022), 228-239.

УДК 517.956

Смешанная задача для нелинейного уравнения Кортевега-Де Фриза отрицательного порядка с интегральным источником.

Хасанов М. М.[1], Азимов Д. Б.[1], Машарипов Ф. М.[1]
[1]**Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;**
hmuzaffar@mail.ru
doniyor.azimov.97@bk.ru

В работе [9] изучено интегрируемость объединенного уравнения КдФ-нКдФ. В этой работе изучается интегрирование нагруженного уравнения КдФ-нКдФ отрицательного порядка

$$\begin{cases}q_t=-2\,p\,p_x+6\,q\,q_x+q_{xxx}+2\int\limits_0^{\infty}\beta(\lambda,t)\,s(\pi,\lambda,t)\,(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t))_x\,d\lambda,\\ p\,q-p_{xx}=0\end{cases}$$

$$t>0,\quad x\in R^1, \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0}=q_0(x) \tag{2}$$
$$p(x,t)|_{x=0}=p_0(t)$$

где $q_0(x)$ и $p_0^2(t)$ действительные функции причём $q_0(x)$ периодическая функция. Требуется найти действительные функции $q(x,t)$ и $p(x,t)$, которые π - периодические по переменной x :

$$p^2(x+\pi,t)\equiv p^2(x,t),\quad q(x+\pi,t)\equiv q(x,t),\quad t\geq 0,\quad x\in R^1 \tag{3}$$

и удовлетворяют условиям гладкости:

$$\begin{matrix}q(x,t)\in C_{x,t}^{3,1}(t>0)\cap C(t\geq 0)\\ p(x,t)\in C_x^2(t>0)\cap C(t\geq 0)\end{matrix}. \tag{4}$$

Здесь $\beta(\lambda,t)\in C([0,\infty)\times[0,\infty))$ - заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t)=O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, $\lambda\to\infty$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ - решения Флоке уравнения Штурма-Лиувилля

$$L(t)y\equiv -y''+(-q(x,t))y=\lambda y,\quad x\in R^1 \tag{5}$$

(нормированные условием $\psi_\pm(0,\lambda,t)=1$), а $s(x,\lambda,t)$ - решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t)=0$, $s'(0,\lambda,t)=1$.

Спектр оператора (5) состоит из следующего множества $E=\bigcup\limits_{n\in N}[\lambda_{2n},\lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n\in Z$ задачи Дирихле $y(0)=y(\pi)=0$, для уравнения (5) вместе со знаками $\sigma_n=\operatorname{sign}\left\{s'(\pi,\xi_n)-\frac{1}{s'(\pi,\xi_n)}\right\}$, $n\in Z$ называются спектральными параметрами задачи (5).

Теорема. Пусть $(q(x,t),p(x,t),\psi_\pm(x,\lambda,t))$ - решение задачи (1)-(4). Тогда спектр оператора (5) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n=1,2,\dots$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n =&2(-1)^{n+1}\sigma_n(t)\left\{\frac{1}{2\xi_n}p^2(0,t)+2q(0,t)+4\xi_n(t)-\int\limits_0^\infty\frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_n}d\lambda\right\}\times\\ &\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\quad n\geq 1,\end{aligned} \tag{6}$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0}=\xi_n^0,\quad \sigma_n(t)|_{t=0}=\sigma_n^0,\quad n\geq 1,$$

где ξ_n^0,σ_n^0, $n\geq 1$ - спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x)$.

Следствие. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Метод обратной спектральной задачи.

Литература

1. **Allami M., Mutashar A. K., Rashid A. S.** *On solutions of the combined KdV-nKdV equation* // Al-Mustansiriyah Journal of Science. – 2019. – Vol. 30, no. 2. – Pp. 33–45.

2. **Baltaeva I., Khasanov M. M., Rakhimov I. D.** *A generalized (G'/G)-expansion method for the combined mKdV-nmKdV equation* // "Ali Qushji – an outstanding ambassador of the scientific school of Ulughbeg" international conference. – Samarkand, 2023. – Pp. 353–355.

3. **Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б.** *Интегрирование объединенного уравнения мКдФ-нмКдФ в классе периодических функций* // Материалы международной научной конференции «Ali Qushchi – Mirzo Ulug'bek ilmiy maktabining buyuk elchisi». – Самарканд, 2023. – С. 194–195.

4. **Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Азимов Д. Б.** *Интегрирование объединенного уравнения КдФ-нКдФ в классе периодических функций* // Тезисы докладов международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». – Ташкент, 2023. – С. 266–267.

5. **Хасанов М. М., Якубов Б. М., Машарипов Ф. М.** *Интегрирование нагруженного объединенного уравнения КДФ-НКдФ самосогласованным источником в классе периодических функций* // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, прикладной математики и информационных технологий». – Т. I. – Нукус: Каракалпакский государственный университет, 2026. – С. 179–181.

6. **Хасанов М. М., Каримов Х. Х., Машарипов Ф. М.** *Интегрирование объединенного уравнения МКдФ-нмКдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций* // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики,

прикладной математики и информационных технологий». – Т. I. – Нукус: Каракалпакский государственный университет, 2026. – С. 395–396.

УДК 517.956.6

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Холбеков Ж.А.
Ташкентский государственный технический университет им. И.Каримова г.Ташкент;
juratxolbekov@gmail.com

В 1969 году А.М. Нахушев [1] предложил ряд задач нового типа, вошедших в математическую литературу под названием краевых задач со смещением, которые, как оказалось, тесно связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями. Выяснили, что многие весьма важные задачи математической физики и биологии, особенно задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, движения мало-сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой, приводят к краевым задачам для нагруженных дифференциальных уравнений.

В процессе исследования уравнений смешанного типа с нагрузкой, существующие принципы экстремума и теоремы существования, а также методы классической теории не могут быть применены напрямую. Локальные и нелокальные задачи для нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка с тремя линиями изменения типа изучены в работах[2-3].

Однако, несмотря на наличие многочисленных работ по краевым задачам для смешанных уравнений, до сих пор остаются неисследованными локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений параболо-гиперболического типа второго порядка.

Настоящая работа посвящена постановке и изучению нелокальной краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения второго порядка с тремя линиями изменения типа, когда нагруженная часть содержит след от искомой функции.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y, & (x,y)\in\Omega_0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\mu_1 u(\xi,0), & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_{xx}-u_{yy}+\mu_2 u(0,\xi), & (x,y)\in\Omega_2,\\ u_{xx}-u_{yy}+\mu_3 u(1,\eta), & (x,y)\in\Omega_3 \end{cases} \tag{1}$$

где Ω_0 – область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно; Ω_1 –характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AN: x+y=0$,$BN: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N(0,5;\ -0,5)$; Ω_2 –характеристический треугольник, ограниченный отрезком AD оси Oy и двумя характеристиками $AK: x+y=0$,$DK: \quad y-x=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $K(-0,5;\ 0,5)$; Ω_3 –характеристический треугольник, ограниченный отрезком BC и двумя характеристиками $CM: x+y=2$,$BM: \quad x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$, пересекающимися в точке $M(1,5;\ 0,5)$. В уравнении (1) $\xi=x+y$, $\eta=y-x+1$, а $\mu_j, (j=\overline{1,3})$ заданные действительные числа, причем

$$\mu_1\le 0,\ \ \mu_j\in R\,(j=2,3). \tag{2}$$

Введем обозначения: $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup J_1\cup J_2\cup J_3$ $J_1=\{(x,y): 0<x<1, y=0\}$,

$$J_2=\{(x,y): 0<y<1, x=0\},\quad J_3=\{(x,y): 0<y<1, x=1\},$$

$$\Omega_1^*=\Omega_1\cup AB\cup\Omega_0,\quad \Omega_2^*=\Omega_2\cup AD\cup\Omega_0\cup BC\cup\Omega_3,$$

$$\Theta_0(y)=\Theta_0\left(-\frac{y}{2};\frac{y}{2}\right),\quad \Theta_1(y)=\Theta_1\left(\frac{y}{2}-1;\frac{y}{2}\right),$$

$$\Theta_2(y)=\Theta_2\left(\frac{y+2}{2};\frac{y}{2}\right),\quad \Theta_3(y)=\Theta_3\left(\frac{y+1}{2};\frac{y-1}{2}\right),$$

$\Theta_0(y)=\Theta_0\left(-\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)$-точка пересечения характеристики $AN: x+y=0$ с характеристикой, выходящей из точки $(0,y)$, $y\in[0,1]$;

$\Theta_1(y)=\Theta_1\left(\frac{y}{2}-1,\frac{y}{2}\right)$-точка пересечения характеристики $BN: x-y=1$ с характеристикой, выходящей из точки $(0,y)$, $y\in[0,1]$;

$\Theta_2(y)=\Theta_2\left(\frac{y+2}{2},\frac{y}{2}\right)$-точка пересечения характеристики $AK: x+y=0$ с характеристикой, выходящей из точки $(1,y)$, $y\in[0,1]$;

$\Theta_3(y)=\Theta_3\left(\frac{y+1}{2},\frac{y-1}{2}\right)$-точка пересечения характеристики $BM: x-y=1$ с характеристикой, выходящей из точки $(1,y)$, $y\in[0,1]$.

$$W=\{\quad u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega_1^*)\cap C^2(\Omega_2^*);\quad u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)\}. \tag{3}$$

Задача BS_μ**.** Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω из класса W, удовлетворяющее краевым условиям

$$\alpha(y)\frac{d}{dy}u[\Theta_0(y)]+\beta(y)\frac{d}{dy}u[\Theta_1(y)]=m(y)u(0,y)+n(y)u_x(0,y)+c(y),\quad \forall y\in J_2, \tag{4}$$

$$\gamma(y)\frac{d}{dy}u[\Theta_2(y)]+\lambda(y)\frac{d}{dy}u[\Theta_3(y)]=p(y)u(1,y)+q(y)u_x(1,y)+d(y),\quad \forall y\in J_3, \tag{5}$$

$$u(x,y)\big|_{NB}=\varphi_1(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1, \tag{6}$$

а на линиях $J_j(j=\overline{1,3})$ изменения типа условиям склеивания

$$u_y(x,+0)=\delta_1 u_y(x,-0),\quad (x,0)\in J_1, \tag{7}$$

$$u_x(+0,y)=\delta_2 u_x(-0,y),\quad (0,y)\in J_2, \tag{8}$$

$$u_x(1+0,y)=\delta_3 u_x(1-0,y),\quad (1,y)\in J_3, \tag{9}$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $m(y)$, $n(y)$, $c(y)$, $\gamma(y)$, $\lambda(y)$, $p(y)$, $q(y)$, $d(y)$, $\varphi_1(x)$ - заданные функции удовлетворяют условиям:

$$\varphi_1(x)\in C^1\left[\frac{1}{2},1\right]\cap C^2\left(\frac{1}{2},1\right),\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)=0,\delta_i\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad (i=1,2,3). \tag{10}$$

$$\alpha(y),\beta(y),m(y),n(y),c(y)\in C(\bar{J}_2)\cap C^2(J_2), \tag{11}$$

$$\alpha^2(y)+\beta^2(y)+m^2(y)+n^2(y)\neq 0,\forall y\in\bar{J}_2, \tag{12}$$

$$\widetilde{a}(y):=\alpha(y)-\beta(y)+2n(y)\neq 0,\quad \forall y\in\bar{J}_2, \tag{13}$$

$$\gamma(y),\lambda(y),p(y),q(y),d(y)\in C(\bar{J}_3)\cap C^2(J_3), \tag{14}$$

$$\gamma^2(y)+\lambda^2(y)+p^2(y)+q^2(y)\neq 0,\forall y\in\bar{J}_3, \tag{15}$$

$$\widetilde{b}(y):=\gamma(y)-\lambda(y)-2q(y)\neq 0,\quad \forall y\in\bar{J}_3, \tag{16}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если выполнены условия (10)–(16), то в области Ω существует единственное регулярное решение задачи BS_μ.

Теорема 1 доказывается методом интегральных уравнений. Согласно этого задача BS_μ эквивалентным образом сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Однозначная разрешимость задачи BS_μ следует из однозначной разрешимости интегрального уравнения Вольтерра.

Литература

1.**Нахушев А.М.** *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.*М.:Наука. 2006.
2. **Исломов Б., Холбеков Ж.А.** *Исследование краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.*ДАН РУз. Математика. 2015 . №6. С.11-14 .
3. **Исломов Б., Холбеков Ж.А.** *Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.*Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. **25**(3). С. 407-422.

УДК 517.946

Краевая задача со свободными границами для реакционно-диффузионного уравнения

Хабибуллаев М. М.[1], Курбанова М. Т.[2]
[1]Ташкентский Государственный Университет Востоковедения, Ташкент, Узбекистан;
[2]Университет бизнеса и науки Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
mirolimhabibullayev7@gmail.com, munisakhon.kurbonova@mail.ru

В настоящее время ведутся интенсивные исследования новых классов нестандартных задач со свободной границей, которые возникают в приложениях. Например, в работах [1, 3] изучены задачи для параболических уравнений с двумя свободными границами.

В работе исследуется диффузионная логистическая модель со свободной границей популяционной биологии [2].

Постановка задачи. Требуется найти функции $h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T,\ h(t) < x < s(t)\}$, удовлетворяющие условиям

$$k(u)u_t - du_{xx} - cu_x = u(a - bu), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad -s_0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u(t,h(t)) = 0, \quad u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$s'(t) = -\mu u_x(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{5}$$

где $s(0) = s_0$, $h(0) = h_0 = -s_0$, $x = h(t)$ и $x = s(t)$ – свободные (неизвестные) границы, которые определяются вместе с функцией $u(t,x)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

(I) функции $k(u)$ и $k'(u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на замкнутом множестве аргумента, причем $k(u) \geq k_0 > 0$;

(II) d, c, a, b, s_0, μ - положительные постоянные.

(III) $u_0(x) > 0$, $h_0 < x < s_0$; $u_0 \in C^{2+\gamma}([h_0, s_0])$, $h(0) = h_0 = -s_0$, $s(0) = s_0$; $u_0(h_0) = u_0(s_0) = 0$, $u_0'(h_0) > 0$, $u_0'(s_0) < 0$.

Теорема. *Пусть функции $h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ являются решением задачи (1)-(6). Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2, не зависящие от T, для которых справедливы оценки*

$$0 < u(t,x) \leq M_1, \quad (t,x) \in \overline{D},$$

$$0 < s'(t),\ -h'(t) \leq M_2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Заключение. Установлены априорные оценки шаудерского типа. На основе установленных оценок изучено поведение свободной границы. Доказаны теорема единственности и существование решения задачи (1)-(6). Далее исследовано асимптотическое поведение решений при $t \to +\infty$.

Литература

1. Du Y., Lin Z. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary // SIAM J. Math. Anal., 2010. Vol. 42, No. 1. pp. 377–405.
2. Takhirov J. O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology // Indian J. Pure Appl. Math., 2019. Vol. 50, No. 1. pp. 95–112.
3. Wang R. H., Wang L., Wang Z. Ch. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term // J. Math. Anal. Appl., 2018. Vol. 467, No. 2. pp. 1233–1257.

УДК 517.957

О МОДИФИЦИРОВАННОМ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА -ЛИУВИЛЛЯ

Хасанов А. Б., Худаеров У. О.
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистон;
ahasanov2002@mail.ru, ulugbekxudayorov@gmail.com

В настоящей работе рассматривается смешанная задача для нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза - Лиувилля вида

$$q_{xt} = q_{xxxx} + \frac{3}{2}q_x^2 q_{xx} + e^{-q}, \quad q = q(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{cases} q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}) \\ q(x,t)|_{x=0} = q_1(t), q_1(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \\ |q_1(t)| < M,\ M > 0,\ q_1(0) = q_0(0) \end{cases} \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π периодических по x функций, x удовлетворяющих условиям гладкости:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t) \in C^{4,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{3}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения периодических бесконечнозонных решений $q(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0$ задачи (1)-(3) сведением ее к обратной спеткральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, x, \tau \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega(x,t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & q_x(x,t) \\ q_x(x,t) & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t) = \big(c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t)\big)^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4). Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L(\tau,t)) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda,t)| \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, называются лакунами, где λ_n , корни уравнения $\Delta(\lambda,t) \mp 2 = 0$. Они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической $y(0,\tau,t) = \pm y(\pi,\tau,t)$ задачи для уравнения (4). Нетрудно доказать, что $\lambda_{-1} = \lambda_0 = 0$, т.е. $\lambda = 0$ является двукратным собственным значением периодической задачи для уравнения (4). Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$ обозначим через $\xi_n = \xi_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$ и при этом $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Числа $\xi_n(\tau,t)$, и знаки $\sigma_n(\tau,t) = sgn\left\{s_2\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right) - c_1\left(\pi,\xi_n,\tau,t\right)\right\} = \pm 1,\ n \in \mathbb{Z}$ называются спектральными параметрами оператора $L(\tau,t)$.

Спектральные параметры $\{\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1\}, n \in \mathbb{Z}$ и границы спектра $\lambda_n(t), n \in \mathbb{Z}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$.

Задача восстановления коэффициента $\Omega(x+\tau,t)$ оператора $L(\tau,t)$ по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент $q(x+\tau,t)$ оператора $L(\tau,t)$ определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n(\tau,t), \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$. Если с помощью начальной функций $q_0(x+\tau)$, построит оператор Дирака $L(\tau,0)$, то мы увидим, что границы спектра $\lambda_n(\tau), n \in \mathbb{Z}$, полученной задачи не зависят от параметра τ, то есть, $\lambda_n = \lambda_n(\tau), n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры от параметра τ зависят: $\xi_n^0 = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0 = \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$, и являются периодическими функциями: $\xi_n^0(\tau+\pi) = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau+\pi) = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}$. Решая прямую задачу, найдем спектральные данные $\{\lambda_n^0(\tau), \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$ оператора $L(\tau,0)$.

Теорема. Если начальные данные $q_0(x)$ и $q_1(t)$ удовлетворяют условиям $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R})$ и $q_1(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \quad |q_1(t)| \leq M, M > 0, q_1(0) = q_0(0)$, то существует однозначно определяемое бесконечнозонное решение $q(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0$, смешанной задачи (1)-(3), которые определяется суммой равномерно сходящегося функционального ряда

$$q(x,t) = q_1(t) + 2\int_0^x \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)h_k(\xi(s,t))\right) ds \tag{5}$$

где

$$h_n(\xi(\tau,t)) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau,t))}f_n(\xi(\tau,t)),$$

$$f_n(\xi(\tau,t)) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}},$$

при этом координаты векторов

$$\xi = \xi(\tau,t) = (\ldots, \xi_{-1}(\tau,t), \xi_1(\tau,t), \ldots), \quad \sigma(\tau,t) = (\ldots, \sigma_{-1}(\tau,t), \sigma_1(\tau,t), \ldots)$$

$$\lambda(t) = (\ldots, \lambda_{-1}(t), \lambda_1(t), \ldots)$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\frac{d\lambda_n(t)}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi(\tau,t)) g_n(\xi(\tau,t)), \quad n \in Z\backslash\{0\}, \tag{6}$$

с начальными условиями

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{7}$$

Последовательность $g_n(\xi), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ в (6) определяется следующим образом:

$$g_n(\xi) = 4\xi_n^3(\tau,t) + 2\xi_n(\tau,t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t)\right).$$

Лемма. Если функции $q_0(x)$ и $q_1(t)$ удовлетворяют условиям $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R})$ и $q_1(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \quad |q_1(t)| \leq M, M > 0$, то существует единственное глобальное и устойчивое решение задачи Коши (6)-(7).

Замечание. Теорема и лемма дает метод алгоритм нахождения решения задачи (1)-(3):

1) Сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, оператора Дирака $L(\tau,0)$.

2)Решая задачу Коши (6)-(7) при произвольном значении τ , находим $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

3) Из формулы следов (5) определим функция $q(x,t)$, т.е. решение задачи (1)-(3).

Литература

1. **J. Liouville** *Sur l'equation aux differences partielles* $\frac{d^2\log\lambda}{du\,dv}\pm\frac{\lambda}{2a^2}=0$. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees.18 (1853), 71-72.
2. **A. B. Khasanov, U. O. Khudayorov** *Integration of the modified Korteweg–de Vries–Liouville equation in the class of periodic infinite-gap functions.* Math. Notes.114:6 (2023), 1247-1259.

УДК 517.957

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА(КМКДФ) В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хоитметов У. А.[1], **Хасанов Т. Г.**[2], **Зокиров И. П.**[3]

[1]**Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан; x_umid@mail.ru**

[2]**Самаркандский кампус Экономико-педагогического университета, Самарканд, Узбекистан; temur.xasanov.2018@mail.ru**

[3]**Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан; iqboljonzokirov0202@gmail.com**

Аннотация. Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (кмКдФ) с дополнительными членами в классе периодических бесконечнозонных функций. Выводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением уравнения кмКдФ.

Ключевые слова. Комплексное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, оператор Дирака, спектральные данные, система дифференциальных уравнений Дубровина, формулы следов, быстроубывающих функции.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (кмКдФ) с дополнительными

$$\begin{cases} p_t = a(t)\left[p_{xxx} - 6\left(p^2+q^2\right)p_x\right] + c(t)\,q, \\ q_t = a(t)\left[q_{xxx} - 6\left(p^2+q^2\right)q_x\right] + c(t)\,p \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x,t)|_{t=0} = q_0(x),$$
$$p_0(x+\pi) = p_0(x), \ \ q_0(x+\pi) = q_0(x), \ \ x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π-периодических по x функций:

$$p(x+\pi,t) = p(x,t), \ q(x+\pi,t) = q(x,t),$$
$$p(x,t),\, q(x,t) \in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0). \tag{3}$$

Здесь $a(t)$, $c(t)\in C([0,\infty))$ заданные непрерывные ограниченные функции.

В данной работе предлагается алгоритм построения бесконечнозонных решений $p(x,t)$, $q(x,t)$, $x\in\mathbb{R}, t>0$ задачи (1)-(3) сведением её к обратной спектральной задаче для самосопряженного оператора Дирака:

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, \ x\in\mathbb{R}, \ t>0$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Для уравнения (1) данная постановка задачи ранее неисследовалась.
Если запишем уравнения кмКдФ с дополнительными членами вида

$$u_t = a(t)\left(u_{xxx} - 6|u|^2 u_x\right) - ic(t)u, \;\; i = \sqrt{-1}$$

эквивалентной ему на вещественную и мнимую части функции$u(x,t) = p(x,t) + iq(x,t)$, то получим система уравнения (1). Кроме того решения нелинейных уравнений в классе периодических и быстроубывающих функции для различных задач изучались в работах [1]-[3].

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $p(x,t)$ и $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ является решением задачи (1)-(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$ оператора $L(t)$, не зависят от параметра t, то есть $\lambda_n(t) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\frac{d\xi_n(t)}{dt} = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi(t)) g_n(\xi(t)), \;\; n \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

где

$$g_n(\xi(t)) = a(t)\left[4\xi_n^3(t) + 4p(0,t)\xi_n^2(t) + 2\left(p^2(0,t) + q^2(0,t) + q_x(0,t)\right)\xi_n(t) + \right.$$

$$\left. +2\left(p(0,t)q_x(0,t) - p_x(0,t)q(0,t)\right) + 2p(0,t)\left(p^2(0,t) + q^2(0,t) - p_{xx}(0,t)\right)\right] + \frac{1}{2}c(t), \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$ меняются на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \;\; \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \; n \in \mathbb{Z}$$

где ξ_n^0, $\sigma_n^0 = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, спектральные параметры оператора Дирака $L(0)$ с коэффициентами $p_0(x)$, $q_0(x)$. Последовательности $h_n(\xi(t))$, $n \in \mathbb{Z}$, в уравнении (4) определяются по следующие формулами

$$h_n(\xi(t)) = \sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t))} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(t))(\lambda_{2k} - \xi_n(t))}{(\xi_k(t) - \xi_n(t))^2}}.$$

Литература

1. A. B. Khasanov, U. O. Khudayorov, T. G. Khasanov, The Cauchy problem for the modified Korteweg-de Vries-Liouville (mKdV-L) equation with an additional term in the class of periodic infinite-gap functions, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 50:1 (2024), 78–95.
2. A. B. Khasanov, R. Kh. Eshbekov, T. G. Khasanov, Integration of a non-linear Hirota type equation with additional terms, Izv. Math., 89:1 (2025), 196–219.
3. A. B. Khasanov, T. G. Khasanov, The Cauchy Problem for the Nonlinear Complex Modified Korteweg-de Vries Equation with Additional Terms in the Class of Periodic Infinite-Gap Functions, Sib. Math. J., 65:4 (2024), 846–868.

УДК 517.955+517.957

Смешанная задача для модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза – sinh-Гордона с дополнительными членами в классе периодических бесконечнозонных функций

Эрмаматова Ф. Э.[1], Эрмаматова Б. Э.[2]
[3]Самаркандский государственный педагогический институт, Самарканд, Узбекистан; fotimaermamatova2020@gmail.com [2]Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан;

В 1974 году модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза — синус-Гордона вида

$$u_{xt} + a\left\{\frac{3}{2}u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx}\right\} = b\sin u, u = u(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0$$

было предложено К. Конно, В. Камеяма, Х. Сануки в качестве модельного уравнения для описания нелинейных колебаний в атомной решётке и проинтегрировано прямым методом.

Комбинируя модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза и уравнения cosh-Гордона, в работе [2] предложен метод построения решения смешанной задачи

$$q_{xt} = a(t)\left\{q_{xxxx} - \frac{3}{2}q_x^2 q_{xx}\right\} + b(t)chq, \;\; q = q(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0,$$

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R})$$
$$q(x,t)|_{x=0} = q_1(t), \quad q_1(t) \in C^1(t \geq 0)$$

в классе действительных бесконечнозонных π-периодических по x функций. Здесь $a(t), b(t) \in C([0,\infty))$-заданные непрерывные ограниченные функции.

В настоящей работе рассматривается нелинейное уравнения составленно из комбинаций уравнений модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза и уравнения sinh-Гордона вида

$$q_{xt} = a\left\{q_{xxxx} - 6q_x^2 q_{xx}\right\} + bsinh(2q) - cq_{xx}, \quad q = q(x,t), \, x \in \mathbb{R}, \, t > 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$\begin{cases} q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}) \\ q(x,t)|_{x=0} = q_1(t), \quad q_1(t) \in C^1(t \geq 0), \quad |q_1(t)| \leq M, \quad M > 0 \end{cases}$$

в классе действительных бесконечнозонных π-периодических по x функций:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t), \quad q(x,t) \in C^{4,1}_{x,t}(t > 0) \cap C(t \geq 0). \tag{3}$$

Здесь $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0$.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, задачи (1)-(3) путем сведения её к обратной спектральной задаче для самосопряженного оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \;\; x, \tau \in \mathbb{R}, \, t > 0, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q_x(x,t) \\ q_x(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = y(x,\tau,t) = \begin{pmatrix} y_1(x,\tau,t) \\ y_2(x,\tau,t) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$ соответственно. Функция $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4). Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \, |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \mathbb{R}\backslash\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2n-1}, \, \lambda_{2n})\right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$, называются лакунами, где $\lambda_n = \lambda_n(\tau,t)$–корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$. Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$. Числа $\xi_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$, и знаки $\sigma_n(\tau,t) = sgn\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}, n \in \mathbb{Z}$, называются спектральными параметрами оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\{\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, \;\; n \in \mathbb{Z}\}$ и границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$. Коэффициенты $q(x+\tau,t)$ оператора $L(\tau,t)$ определяются однозначно по спектральным данным. С помощью начальной функции $q_0(x+\tau)$ построим оператора Дирака $L(\tau,0)$. Решая прямую задачу, найдём спектральные данные $\left\{\lambda_n(\tau), \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\right\}$, оператора $L(\tau,0)$.

Теорема 1. Пусть $q(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0$ решение задачи (1)-(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$, оператора $L(\tau,t)$ не зависят от параметров $\tau \in \mathbb{R}$, и t т.е. $\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют соответственно первой и второй системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n\left(\xi(\tau,t)\right)\xi_n(\tau,t),\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\};$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))g_n(\xi(\tau,t)),\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau),\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1,\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$. Последовательности $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi),\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, участвующие в уравнении (6) определяется по формулам:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t,\tau))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty\ k\neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = a\left\{4\xi_n^3(\tau,t) + \xi_n(\tau,t)\left[q_\tau^2 + q_{\tau\tau}\right]\right\} + \frac{b}{4\xi_n(\tau,t)}\exp\left\{2q(\tau,t)\right\} + c\xi_n(\tau,t),$$

где

$$\xi = \xi(\tau,t) = (...,\xi_{-1}(\tau,t),\xi_1(\tau,t),...), \sigma(\tau,t) = (...,\sigma_{-1}(\tau,t),\sigma_1(\tau,t),...).$$

Теорема 2. Если начальная функция $q_0(\tau)$ удовлетворяет условию

$$q_0(\tau + \pi) = q_0(\tau) \in C^6(\mathbb{R}),$$

а $q_1(t) \in C^1(t \geq 0)$ - непрерывная ограниченная функция, то существует однозначно определяемое глобальное решение $q(\tau,t)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $t > 0$ задачи (1)-(3), которые определяются суммой рядов:

$$q(\tau,t) = q_1(t) + \int_0^\tau \left(\sum_{k=-\infty\ k\neq 0}^{\infty} (-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)\,h_k(\xi(s,t)) \right) ds$$

Литература

1. **Konno K., Kameyama W., Sanuki H.** *Effect of weak dislocation potential on nonlinear wave propagation in anharmonic cristal.* J. Phys. Soc. Japan., 1974. vol. 37. No 1, pp. 171–176.
2. **Хасанов А. Б. ,Нормуродов Х. Н., Худаёров У. О.** *Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза–синус-Гордона в классе периодических бесконечнозонных функций* ТМФ, 214:2(2023), с. 198–210.

УДК 517.95

Об одной задачи с наклонной производной для смешанного параболо-гиперболического уравнения

Эшматов Б. Э.[1], Джураев Н.[2]

[1]Университет экономики и педагогики, Карши, Узбекистан;
eshmatovbahodir@mail.ru
[2]Каршинский государственный технический университет, Карши, Узбекистан;
ndjurayev@mail.ru

Аннотация. Основной целью настоящей работе является показать, что корректность задачи с наклонной производной, заданной на отходе от характеристики для смешанного параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа, существенным образом зависит от класса, в котором ищется решение, и от значения полярного угла, образованного векторным полем, задающим наклонную производную, и осью абсцисс в начале отхода.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, BB_0, $A(0,0)$, $A_0(0,1)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, а при $y < 0$ – гладкой кривой

$$AD : y = -\gamma(x), \qquad 0 \le x \le \ell,$$

где $0,5 < \ell \le 1$, $\gamma(0) = 0$, $\ell + \gamma(\ell) = 1$, расположенной внутри характеристического треугольника

$$ABC : 0 \le x + y < x - y \le 1,$$

и отрезком характеристики

$$BC : x - y = 1, \qquad \ell \le x \le 1,$$

уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0. \end{cases}$$

Задача БМ. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{AA_0 \cup BB_0} = 0, \tag{2}$$

$$[a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u]_{AD} = 0, \tag{3}$$

где $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ – заданные функции.

Для областей D, таких, что

$$\overline{D} \cap \{A\} \ne \varnothing,$$

определим функциональное пространство

$$C_\alpha^{m,n}(\overline{D}) = \left\{ \begin{array}{l} u(x,y) : \dfrac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \in C(\overline{D}), \qquad \dfrac{\partial^{i+j}u(0,0)}{\partial x^i \partial y^j} = 0, \\ \qquad i + \dfrac{m}{n}j \le m - 1, \qquad m \ge n \ge 0, \\ \qquad \dfrac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \in C(\overline{D} \setminus A), \qquad i + \dfrac{m}{n}j = m, \\ \qquad \max\limits_{i+\frac{m}{n}j=m} \sup\limits_{x \in D} \left| x^{-\alpha} \dfrac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right| < \infty, \qquad \alpha \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Ясно, что относительно нормы

$$\|u\|_{m,n,\alpha} = \max_{i+\frac{m}{n}j=m} \sup_{(x,y) \in \overline{D}} \left| x^{-\alpha} \frac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right|$$

пространство $C_\alpha^{m,n}(\overline{D})$ является банаховым.

Аналогично определим пространство на отрезке $[0,1]$:

$$C_\alpha^k[0,1] = \left\{ \varphi(x) : \begin{array}{ll} \varphi^{(j)}(x) \in C[0,1], & \varphi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0,1,\dots,k-1, \\ \varphi^{(k)}(x) \in C(0,1], & \sup\limits_{0 \le x \le 1} x^{-\alpha} \left| \varphi^{(k)}(x) \right| < \infty \end{array} \right\},$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{k,\alpha} = \sup_{0<x\le 1}\left|\frac{\varphi^{(k)}(x)}{x^\alpha}\right|, \qquad k \ge 0, \quad \alpha \ge 0.$$

Пусть

$$\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}, \qquad \Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}.$$

Под регулярным решением задачи ТМ будем понимать ограниченную функцию из класса

$$C(\overline{\Omega} \setminus B) \cap C^1(\Omega \cup AD) \cap C^{2,1}(\Omega_0) \cap C^{2,2}(\Omega_1),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_0 \cup \Omega_1$ и условиям (2) и (3).

Обозначим, как обычно,

$$\tau(x) = u(x,0), \qquad \nu(x) = u_y(x,0). \tag{4}$$

В силу однозначной разрешимости первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности любое регулярное решение уравнения (1) при $y > 0$, удовлетворяющее условиям (2) и

$$u|_{AB} = \tau(x),$$

представимо в виде

$$u(x,y) = -\int_0^y \int_0^1 G(x,x_1,y-y_1) f(x_1,y_1)\,dx_1\,dy_1 + \int_0^1 G(x,x_1,y)\tau(x_1)\,dx_1, \tag{5}$$

где $G(x,x_1,y)$ – функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_0:

$$G(x,x_1,y) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 y} \sin n\pi x \sin n\pi x_1.$$

В области Ω_0 в уравнении (1), переходя к пределу при $y \to 0$, с учетом (4), получим

$$\tau''(x) - \nu(x) = f(x,0), \qquad 0 < x < 1. \tag{6}$$

Далее, в силу однозначной разрешимости задачи Коши для волнового уравнения любое регулярное решение уравнения (1) при $y \le 0$ представимо в виде

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left[\tau(\xi) + \tau(\eta) - \int_\xi^\eta \nu(t)\,dt\right] - \int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1. \tag{7}$$

В формуле (7), удовлетворяя условию (3),

имеем

$$\begin{aligned}[a(x)-b(x)]\,[\tau'(x)-\nu(x)] + [a(x)+b(x)]\,[\tau'(\lambda(x)) + \nu(\lambda(x))] + \\ + c(x)\left[\tau(x) + \tau(\lambda(x)) - \int_{\lambda(x)}^x \nu(t)\,dt\right] = F(x), \qquad 0 < x \le 1.\end{aligned} \tag{8}$$

$$F(x) = 2c(x)\int_{\lambda(x)}^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 +$$

$$+[a(x)-b(x)]\int_{\lambda(x)}^x f_1(\xi_1,x)\,d\xi_1 - [a(x)+b(x)]\int_{\lambda(x)}^x f_1(\lambda(x),\eta_1)\,d\eta_1. \tag{9}$$

В силу условий, наложенных на AD, имеем

$$\lambda(x) < x, \quad 0 < x < 1, \quad \lambda(0) = 0, \quad \lambda'(x) > 0, \quad \lambda'(0) < 1.$$

Соотношение (8) является основным соотношением между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенным на отрезок AB из области Ω_1.

Пусть $a(x,y) \neq b(x,y)$. Через θ обозначим полярный угол, образуемый векторным полем, задающим наклонную производную, и осью абсцисс в начале отхода (в точке A).

Теорема. Если $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ или $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, то для любой функции

$$f(x,y) \in C_{\alpha}^{0,0}(\overline{\Omega}_0) \cap C_{\alpha}^{1,1}(\overline{\Omega}_1) \cap C^1(\overline{\Omega}_0)$$

существует единственное регулярное решение задачи БМ из класса

$$u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega} \setminus B) \cap C_{\alpha}^{2,1}(\overline{\Omega}_0 \setminus B) \cap C_{\alpha}^{2,2}(\overline{\Omega}_1).$$

Если

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \text{или} \qquad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

то задача БМ в указанном классе является нормально разрешимой по Хаусдорфу и ее индекс $\chi = +\infty$ и, в частности, соответствующая однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений.

Литература

1. **Джураев Т. Д.** *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* Ташкент: ФАН. – 1979. – 240 с

2. **Бердышев А. С., Эшматов Б. Э.** *О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения.* Тез. докладов Международн. научной конферен., посвящен. 1200-летию Ахмада ал-Фаргани «Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа». Фергана – 1998, с. 50–51.

3. **Эшматов Б. Э.** *Краевые задачи с наклонной производной для смешанного параболо–гиперболического уравнения.* Узбекский математический журнал. – 2007. – №1. – с. 57–62.

3 – SHO‘BA. DINAMIK SISTEMALAR VA OPTIMAL BOSHQARISH

СЕКЦИЯ 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.938

Dynamical Systems of one of the family of Evolution Operators

Absalamov A.T.[1]
[1]Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
absalamov@gmail.com

In this piece of work we discuss one example of sex-linked inheritance and we study dynamical system generated by a concrete non-linear multidimensional operator describing a gonosomal evolution.

Hemophilia is a lethal recessive X-linked disorder: a female carrying two alleles for hemophilia die. Therefore, if we denote by X^h the gonosome X carrying the hemophilia, there are only two female genotypes: XX and XX^h (X^hX^h is lethal) and two male genotypes: XY and X^hY. We have four types of crosses defined as

$$\begin{aligned}
&XX \times XY \to \frac{1}{2}XX,\ \frac{1}{2}XY,\\
&XX \times X^hY \to \frac{1}{2}XX^h,\ \frac{1}{2}XY,\\
&XX^h \times XY \to \epsilon XX,\ (\frac{1}{2}-\epsilon)XX^h,\ (\frac{1}{2}-\epsilon)XY, \epsilon X^hY,\\
&XX^h \times X^hY \to \frac{1}{3}XX^h,\ \frac{1}{3}XY,\ \frac{1}{3}X^hY
\end{aligned}$$

Let $F = \{XX, XX^h\}$ and $M = \{XY, X^hY\}$ be sets of genotypes. Assume that state of the set F is given by a real vector (x, y) and state of M by a real vector (u, v). Then a state of the set $F \cup M$ is given by the vector $t = (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$.

We consider the following subsets of $\mathbb{R}^4$:

$$S^3 = \Big\{s = (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ x + y + u + v = 1\Big\}$$

the three-dimensional simplex;

$$\Theta = \{s = (x, y, u, v) \in S^3 : (x, y) = (0, 0)\ or\ (u, v) = (0, 0)\};$$

$$S^{2,2} = S^3 \setminus \Theta.$$

If $t' = (x', y', u', v')$ is a state of the system $F \cup M$ in the next generation, then by the above rule we get the evolution operator $W : S^{2,2} \to S^{2,2}$ defined by

$$W : \begin{cases} x' &= \dfrac{\frac{1}{2}xu + \epsilon yu}{(x+y)(u+v)} \\ y' &= \dfrac{(\frac{1}{2}-\epsilon)yu + \frac{1}{2}xv + \frac{1}{3}yv}{(x+y)(u+v)} \\ u' &= \dfrac{\frac{1}{2}xu + (\frac{1}{2}-\epsilon)yu + \frac{1}{2}xv + \frac{1}{3}yv}{(x+y)(u+v)} \\ v' &= \dfrac{\epsilon yu + \frac{1}{3}yv}{(x+y)(u+v)}, \end{cases} \tag{1}$$

where $\epsilon \in (0; \frac{1}{2})$ This operator W is called gonosomal evolution operator.

The main problem is for the given operator W and arbitrarily initial point $s^{(0)} \in S^{2,2}$, is to describe the limit points of the trajectory $\{s^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$, where

$$s^{(m)} = W^m(s^{(0)}) = \underbrace{W(W(...W}_{m}(s^{(0)}))...).$$

We make the following notations.

$$\alpha = \frac{x}{x+y}, \quad \beta = \frac{v}{u+v}, \quad \alpha' = \frac{x'}{x'+y'}, \quad \beta' = \frac{v'}{u'+v'}, \tag{2}$$

which yields the nonlinear dynamical system

$$V : \begin{cases} \alpha' = \dfrac{(1-\beta)(\epsilon + (\frac{1}{2} - \epsilon)\alpha)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{6}\alpha\beta}, \\ \beta' = \dfrac{(1-\alpha)(\epsilon + (\frac{1}{3} - \epsilon)\beta)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta} \end{cases} \tag{3}$$

with the initial point $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}) \in \Delta$, where

$$\Delta := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \alpha \le 1,\ 0 \le \beta \le 1\} = [0,1]^2, \tag{4}$$

Remark 1. There is one to one correspondence between the set of fixed points of the operator W and the set of fixed points of the operator V.
Note that the operator V has a unique fixed point $s = (1;0)$ which is non-hyperbolic fixed points with the eigenvalues $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = -2\epsilon$

For the trajectory of the nonlinear operators V we have the following theorem:
Theorem 2. For any initial point $(\alpha, \beta) \in \Delta$ we have

$$\lim_{n\to\infty} V^n(\alpha, \beta) = (1, 0)$$

Using the Theorem 2 we come to the following result for the trajectory of the nonlinear operators W.
Theorem 3. For any initial point $s = (x, y, u, v) \in S^{2,2}$ we have

$$\lim_{m\to\infty} W^m(x, y, u, v) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$$

References

1. **Devaney R.L.** *An introduction to chaotic dynamical system.* Westview Press, 2003.
2. **Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., and Rozikov U.A.** *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems.* Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields. 2011. 14(2), pp. 279-335.
3. **Absalamov A.T., Rozikov U.A.** *An introduction to chaotic dynamical system.* Jour. Applied Nonlinear Dynamics. 2020. 9(2), pp. 247-257.

UDK.531.01+62-50

Vector Lyapunov-Based Stability Analysis and Controller Synthesis for a Two-Link Horizontal Manipulator

Akhmatov A.A.
Navoi state university, Navoi,Uzbekistan;
aaakhmatov94@gmail.com

The paper investigates the stabilization problem of the programmed motion of a two-link horizontal manipulator. A complete nonlinear dynamic model of the manipulator is constructed based on the Lagrange equations of the second kind[1]. To ensure high-precision tracking of a prescribed trajectory, a linear feedback control law based on deviations of generalized coordinates and their velocities has been synthesized. The asymptotic and exponential stability of the closed-loop system is strictly proven using the vector Lyapunov function method with the application of the comparison principle [2].

Control of robotic manipulators is one of the pressing tasks in modern automatic control theory, robotics, and mechatronics. Significant nonlinearities in dynamics, the interconnected nature of links, and the presence of inertial interactions substantially complicate the development of high-efficiency control algorithms.In this regard, developing constructive methods to design controllers for the stability of programmed motion is of significant scientific and practical interest [3].

In the course of the research, based on the expression for kinetic energy, the inertia and Coriolis force matrices were derived, after which the dynamic equations of the manipulator were represented in matrix form. To compensate for deviations from the programmed trajectory, a linear feedback controller was proposed. Stability analysis was performed using the vector Lyapunov function method. A corresponding comparison system was constructed, allowing for the derivation of sufficient algebraic conditions for selecting gain matrix parameters based on SylvesterвЂ™s criterion. It was proven that satisfying these conditions ensures the asymptotic and exponential stability of the programmed motion of the closed-loop system.

The efficiency of the proposed approach is confirmed by the results of numerical simulations performed in the MATLAB environment. Computational experiments showed that even with large initial deviations, rapid reduction of tracking errors is achieved, and the coordinates and velocities of the manipulator converge exponentially to the prescribed programmed trajectory. he results align with theoretical predictions, confirming the effectiveness of the proposed control algorithm

The proposed method can be utilized in the design of control systems for industrial robots, manipulators, and other mechanical dynamic objects. Future research will expand the method to multi-link systems, parametric uncertainty, and adaptive control algorithms.

Reference

1.Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M.*Robot Modeling and Control.* 2nd ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2020. 608 p.
2.Andreev, A.S., Kudashova, E.A.*On Modeling the Controlled Mechanical Systems with Digital Controllers.* Zhurnal SVMO. 2016. Vol. 18, No. 3. P. 107 116.
3.He, W., Gao, H., Zhou, C., Yang, C., Li, Z. *Reinforcement Learning Control of a Flexible Two-Link Manipulator: An Experimental Investigation.* IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2020. Vol. 50, Issue 6. P. 1 11. (DOI: 10.1109/TSMC.2020.2975232).

УДК 534.1:624.072.2

Kubik nochiziqli elastik elementli dinamik so'ndirgichga ega sharnirli tayangan balkaning majburiy tebranishlari

Amirov I.N.[1]
[1]Navoiy innovatsiyalar universiteti, ‘‘Ijtimoiy-gumanitar fanlar’’ kafedrasi v.v.b. dotsenti.
amirovikrom191093@gmail.com

Kirish. Rezonans tebranishlarini bostirish uchun keng qo'llaniladigan chiziqli dinamik so'ndirgichlar faqat tor chastota oralig'ida samarali bo'ladi. Bu muammoni yumshatish uchun elastik elementi geometrik nochiziqli (masalan, konussimon prujina) bo'lgan so'ndirgichlar qiziqish uyg'otadi. Dinamik so'ndirgichlar nazariyasining klassik asoslari [1] da, nochiziqli tebranishlar nazariyasi [2] da bayon etilgan; taqsimlangan parametrli balka va nochiziqli so'ndirgichlarning qo'shma tizimlari so'nggi yillarda faol tadqiq etilmoqda, jumladan nochiziqli prujina-inerter-dempfer turidagi so'ndirgich uchun [3]. Biroq bu ishlarda sharnirli tayanchning ikkala chegaraviy sharti mustaqil asoslangan holda izchil keltirib chiqarilgan

model va amplituda-chastota xarakteristikasi (AChX)ning kengaytirilgan chastota oralig'idagi to'liq tuzilishi (jumladan ikkinchi rezonans zonasi) adabiyotda alohida tahlil qilinmagan.

Metodologiya. Ikki uchi sharnirli tayangan, uzunligi L, egilish qattiqligi EJ, birlik uzunlik massasi ρF bo'lgan balkaning $x = x_1$ nuqtasiga $P(t)$ tashqi kuch, $x = x_0$ nuqtasiga esa massasi m bo'lgan, balka bilan chiziqli-kubik elastik element (c_1, c_3) va qovushoq dempfer β orqali bog'langan so'ndirgich biriktirilgan (1-rasm).

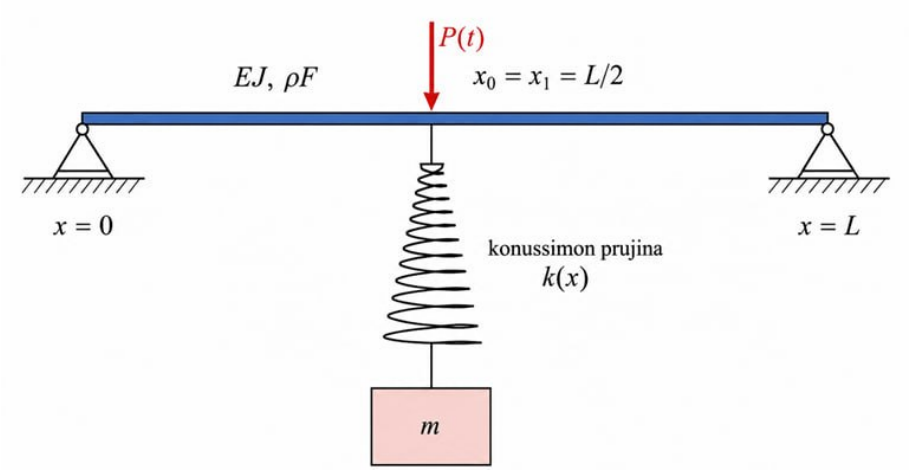


Рис. 1: Hisoblash sxemasi: ikki uchi sharnirli tayangan balka va unga x_0 nuqtasida biriktirilgan, chiziqli-kubik tiklovchi kuchli $(c_1,\ c_3)$ hamda qovushoq dempferli β dinamik so'ndirgich; tashqi kuch $P(t)$ balkaning x_1 nuqtasiga qo'yilgan.

Ostrogradskiy–Gamilton prinsipidan, egilish energiyasi hadini ikki marta qismlab integrallash va sharnirli tayanchning kinematik $(w = 0)$ hamda tabiiy $(M = EJw'' = 0)$ shartlarini mustaqil qanoatlantirish yo'li bilan tizimning harakat tenglamalari olinadi. Birinchi shakl $X_1(x) = \sin\dfrac{\pi x}{L}$ bo'yicha Galyorkin proyeksiyasidan so'ng quyidagi sistemaga kelamiz:

$$M\left[\ddot{T} + 2n\dot{T} + \omega_1^2 T\right] = \mu\left[f(\zeta) + \beta\dot{\zeta}\right] + \nu P_0 \cos\theta t \tag{1}$$

$$m\left[\mu\ddot{T} + \ddot{\zeta}\right] + \beta\dot{\zeta} + f(\zeta) = 0 \tag{2}$$

bu yerda ω_1, η, M balkaning birinchi xususiy chastotasi, dempferlash va modal massa koeffitsiyentlari; μ, ν so'ndirgich va kuchning balka bo'ylab joylashuv koeffitsiyentlari, $f(\zeta) = c_1\zeta + c_3\zeta^3$. Garmonik chiziqlashtirish $c^*(B) = c_1 + \dfrac{3}{4}c_3B^2$ va kompleks amplitudalar usuli qo'llanilib, tizimning amplituda-chastota bog'lanishi olinadi:

$$D(\theta, B) = \omega_1^2 - \theta^2 + 2i\eta\theta - \frac{\mu^2 m\theta^2}{M}\cdot\frac{c^*(B) + i\beta\theta}{c^*(B) - m\theta^2 + i\beta\theta} \tag{3}$$

$$B^2\left[(c^*(B) - m\theta^2)^2 + \beta^2\theta^2\right]|D(\theta, B)|^2 = m^2\mu^2\theta^4\left(\nu\frac{P_0}{M}\right)^2 \tag{4}$$

bu yerda B so'ndirgichning nisbiy siljish amplitudasi, θ qo'zg'atish chastotasi. (4) tenglama $X = B^2$ almashtirishi bilan kubik algebraik tenglamaga keltiriladi; uning diskriminanti nolga teng bo'lgan θ^* nuqtalar AChXning burilish (sakrash) chegaralarini beradi. $c_3 \approx 0$, $\gamma \approx 0$ chegaraviy holatda natija klassik Ormondroyd–Den Hartog "teng cho'qqilar" formulalari bilan to'liq mos kelishi usulning tekshiruvi sifatida tasdiqlangan [1].

Natijalar va muhokama. Hisoblashlar haqiqiy o'lchamli po'lat balka $L = 780\ mm$, kesim $25\times5\ mm$ va konussimon prujina namunasi parametrlari asosida bajarildi: $\omega_1 = 121{,}06\ rad/s$, $M = 0{,}383\ kg$,

$m = 100\ g$, $c_1 = 646{,}47\ N/m$, $\beta = 0{,}965\ N \cdot s/m$; c_3 uchun yopiq geometrik formula mavjud emasligi sababli

$c_3 \approx 8 \cdot 10^7\ N/m^3$ qiymati faqat AChX shaklini sifat jihatidan namoyish etish uchun qabul qilingan. $\theta \in [55; 175]\ rad/s$ kengaytirilgan oraliqda o'tkazilgan sonli tahlilda asosiy burilish nuqtalari $\theta_1^* = 87{,}33$ va $\theta_2^* = 102{,}23\ rad/s$ (cho'qqi amplitudasi $\approx 11\ mm$) aniqlandi klassik Duffing tipidagi "qattiqlanuvchi" rezonans. Bundan tashqari, $\theta \approx 144{,}3$–$149{,}0\ rad/s$ oralig'ida, asosiy cho'qqining taxminan 8%i amplitudaga ega ($\approx 1{,}4\ mm$) va o'zining mustaqil burilish mintaqasiga ega bo'lgan ikkinchi rezonans zonasi aniqlandi. Bu natija oldingi tadqiqotlarda ko'rib chiqilmagan, chunki tahlil odatda faqat asosiy cho'qqi atrofidagi tor oraliq bilan chegaralangan. c_3 ning ta'sirini kichik qadam (masalan 4, 8, $16{\cdot}10^7\ N/m^3$) bilan emas, oraliq nuqtalar bilan zichlashtirilgan qator (4, 6, 8, 10, 12, $16{\cdot}10^7\ N/m^3$) bilan tahlil qilish tavsiya etiladi: bunda asosiy cho'qqi chastotasi 99,2 dan 103,6 rad/s gacha, ikkinchi zona esa 142 dan 157 rad/s gacha monoton siljishi kuzatiladi.

Xulosa. Taqsimlangan parametrli balka va chiziqli-kubik tiklovchi kuchli dinamik so'ndirgichdan tashkil topgan qo'shma tizimning harakat tenglamalari Ostrogradskiy–Gamilton prinsipi asosida keltirib chiqarildi va klassik chegaraviy holatda Ormondroyd–Den Hartog formulalari bilan tasdiqlandi. Haqiqiy parametrlar asosidagi sonli tahlilda tizimning kengaytirilgan chastota oralig'ida ikkinchi, kichik amplitudali va mustaqil burilish mintaqasiga ega rezonans zonasi birinchi marta aniq ko'rsatildi. Amaliy nuqtai nazardan, so'ndirgich parametrlarini tanlashda faqat asosiy emas, balki tizim uchun ahamiyatga ega bo'lgan butun ishchi chastota diapazoni hisobga olinishi tavsiya etiladi.

Tarmoqlarning dinamik turg'unligi. T, ζ uchun sekin oqim tenglamalari va ularning Yakobiani orqali chiziqlashtirib, Rous–Gurvits mezoni asosida har ikkala rezonans zonasidagi barcha tarmoqlarning dinamik turg'unligi tekshirildi (metodologiya kechikuvchi tebranish tizimlari uchun: Tinghao Yan va boshq., 2020, Math. Probl. Eng.). Natija: ikkala zonada ham pastki va yuqori tarmoqlar turg'un (maksimal $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$), o'rta tarmoq esa egar tipidagi noturg'un ekanligi tasdiqlandi – bu mos fazali boshlang'ich shart bilan bajarilgan to'g'ridan-to'g'ri sonli simulyatsiya orqali mustaqil tekshirildi.

Adabiyotlar

1. **Ormondroyd J., Den Hartog J.P.** *The Theory of the Dynamic Vibration Absorber.* Trans. of the ASME. – 1928. – Vol. 49–50, No. 2.
2. **Nayfeh A.H., Mook D.T.** *Nonlinear Oscillations.* N.Y.: John Wiley & Sons. – 1979. – 720 p.
3. **Qian F., Zuo L.** *Tuned Nonlinear Spring-Inerter-Damper Vibration Absorber for Beam Vibration Reduction Based on the Exact Nonlinear Dynamics Model.* J. Sound Vib. – 2021. – Vol. 509.

UDK: 517.98-519.21

Existence of periodic solutions to second-order linear differential equation systems with impulsive effects

Elgondiev K.K.[1], Kamalova O.X.[2]
[1]Karakalpak state university named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan;
kelgondiev61@gmail.com
[2]Karakalpak state university named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan;
ozodakamalova20@gmail.com

1. Statement of the problem

Let us consider a normal system of second-order differential equations:

$$\frac{dY}{dt} = AY, \tag{1}$$

where,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

with initial condition

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

and the conditions for impulsive effects:

$$\Delta Y(t)\big|_{t=t_k} = \begin{pmatrix} x(t)\big|_{t=t_k+0} \\ y(t)\big|_{t=t_k+0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_k \end{pmatrix} = I_k, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4}$$

2. Existence of solutions

Given that the eigenvalues λ_1, λ_2 of the matrix A are complex, the solution of the problem (1)–(4) is written as:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) + \frac{1}{\omega} \sum\limits_{t_0 < t_p \le t} I_p e^{\alpha(t-t_p)} \sin\omega(t-t_p) \\ y_0(t) + \frac{1}{\omega} \sum\limits_{t_0 < t_p \le t} I_p \left[\omega \cos\omega(t-t_p) + \alpha \sin\omega(t-t_p)\right] e^{\alpha(t-t_p)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

where,

$$\begin{aligned} x_0(t) &= e^{\alpha(t-t_0)} \left[x_0 \cos\omega(t-t_0) + \frac{y_0 - \alpha x_0}{\omega} \sin\omega(t-t_0) \right], \\ y_0(t) &= e^{\alpha(t-t_0)} \left[y_0 \cos\omega(t-t_0) + \frac{\alpha y_0 - (\alpha^2+\omega^2) x_0}{\omega} \sin\omega(t-t_0) \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

3. Conditions for the periodicity of the solution

Consider the problem of finding the conditions under which the solution to problems (1)–(4), defined by formulas (5) and (6), is periodic with some period $T > 0$.

Theorem 1. *If the problem (1)–(4) has a periodic solution with some period $T > 0$, then there exists a natural number m such that for any integer p, the equality holds:*

$$I_{p+m} = I_p, \quad t_{p+m} = t_p + T \tag{7}$$

Theorem 2. *Suppose that the periodicity condition (7) holds and the following condition is met:*

$$\begin{cases} [\sin\omega t_0 + e^{\alpha T}\sin\omega(T-t_0)]x_0 + [\cos\omega t_0 - e^{\alpha T}\cos\omega(T-t_0)]\frac{y_0-\alpha x_0}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{\alpha(T+t_0)} \sum\limits_{p=1}^{m} I_p e^{-\alpha t_p} \cos\omega(T-t_p), \\ -[\cos\omega t_0 - e^{\alpha T}\cos\omega(T-t_0)]x_0 + [\sin\omega t_0 + e^{\alpha T}\sin\omega(T-t_0)]\frac{y_0-\alpha x_0}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{\alpha(T+t_0)} \sum\limits_{p=1}^{m} I_p e^{-\alpha t_p} \sin\omega(T-t_p) \end{cases} \tag{8}$$

Then there exists a periodic solution of problem (1)–(4) and this solution is unique.

Example 1. Let us consider a system of equations $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$ with matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ and characteristic equation $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. As an example, let us consider the case where in system (1) $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$, the initial condition (3) is $Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, and the moments and magnitudes of the impulse actions are chosen according to system (8) in the form:

$$t_1 = \frac{\pi}{6},\ I_1 = -3(1+e^{-2\pi})e^{-\frac{\pi}{3}}; \quad t_2 = \frac{\pi}{3},\ I_2 = -3(1+e^{-2\pi})e^{-\frac{2\pi}{3}}; \quad t_3 = \frac{\pi}{2},\ I_3 = -3(1+e^{-2\pi})e^{-\pi}$$

At these values of moments and impulse action quantities, it follows from condition (7) that $m = 3$ and

$T \geq \frac{\pi}{2}$. The solution to problem (1)–(4) is a vector-function $Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, where

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{6} \\ 1 + 3(1 + e^{-2\pi})e^{-2t}\cos 3t, & \frac{\pi}{6} \leq t < \frac{\pi}{3} \\ 1 + 3(1 + e^{-2\pi})e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t), & \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{6} \\ 1 - (1 + e^{-2\pi})e^{-2t}(3\sin 3t + 2\cos 3t), & \frac{\pi}{6} \leq t < \frac{\pi}{3} \\ 1 - (1 + e^{-2\pi})e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t), & \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Specifically, when the matrix of A system (1) is of the form $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, the eigenvalues $\lambda_{1,2}$ of the matrix A are purely imaginary and the solution to problem (1)–(4) is written in the form

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) + \frac{1}{\omega} \sum\limits_{t_0 < t_p \leq t} I_p \sin\omega(t - t_p) \\ y_0(t) + \sum\limits_{t_0 < t_p \leq t} I_p \cos\omega(t - t_p) \end{pmatrix} \tag{9}$$

where,

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \cos\omega(t - t_0) - \frac{1}{\omega} y_0 \sin\omega(t - t_0), \\ y_0(t) &= -x_0\omega \sin\omega(t - t_0) - y_0 \cos\omega(t - t_0). \end{aligned} \tag{10}$$

Theorem 3. *Suppose that the periodicity condition (7) holds and $\omega T \neq 2\pi q$ for all $q \in \mathbb{N}$. Then problem (1)–(4) has a unique periodic solution with period T and this solution is given by formulas (9), (10).*

Theorem 4. *Suppose that the conditions of Theorem 1 are satisfied. Then, provided that condition*

1. *The equality $\omega T = 2\pi q_0$ holds for some natural number q_0;*
2. *The condition*

$$\sum_{p=1}^{m} I_p \cos\omega t_p = \sum_{p=1}^{m} I_p \sin\omega t_p = 0 \tag{11}$$

are satisfied, then the problem (1)–(4) has a two-parameter family of T-periodic solutions.

Example 2. As an example, let us consider the case where in system (1) $\omega = 1$, the initial condition (3) is $Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ and the moments and magnitudes of the impulse actions are chosen according to system (11) in the form

$$t_1 = \frac{\pi}{4},\ I_1 = 5; \quad t_2 = \frac{5\pi}{4},\ I_2 = 2; \quad t_3 = \frac{9\pi}{4},\ I_3 = -3$$

At these values of moments and impulse action quantities, it follows from condition (7) that $m = 3$ and $T \geq \frac{9\pi}{4}$. The solution to problem (1)–(4) is the vector function $Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, where

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ 5\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{5\pi}{4} \\ -3\sin\left(t - \frac{5\pi}{4}\right), & \frac{5\pi}{4} \leq t < \frac{9\pi}{4} \\ 0, & \frac{9\pi}{4} \leq t \leq T \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ 5\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{5\pi}{4} \\ -3\cos\left(t - \frac{5\pi}{4}\right), & \frac{5\pi}{4} \leq t < \frac{9\pi}{4} \\ 0, & \frac{9\pi}{4} \leq t \leq T \end{cases}$$

References

1. **Akhmet M.U.** Li–Yorke chaos in the system with impacts // J. Math. Anal. Appl. 351 (2009), P. 804–810.
2. **Samoilenko V.Hr., Yelgondyev K.K.** On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects // Jorn. Facta Universitatis / Series: Mechanics, automatic control and robotics, 1998. P. 635–639.
3. **Elgondiev K. K.** Oscillatory processes under impulsive perturbations// J. Mat. Stud. 65 (2026), P. 107–112.

UDC 517.98

NON-HOMOGENEOUS MARKOV CHAINS GENERATED BY QUADRATIC b-BISTOCHASTIC OPERATORS

Eshmetova S.D.
Namangan State Technical University, Namangan, Uzbekistan;
sabohateshmetova898@gmail.com

An important subclass of QSOs is formed by quadratic b-bistochastic operators. Their structure is closely related to order relations of majorization type and to monotonicity properties of nonlinear stochastic systems. The main objective of this study is to investigate the equivalence, absolute continuity, and singularity of Markov measures generated by quadratic b-bistochastic operators on a finite-dimensional simplex.

Let $\mathbb{R}_+$ denote the set of all non-negative real numbers, and let $E \subseteq \mathbb{N}$ be a non-empty set containing at least two elements. The simplex S^E is defined by

$$S^E = \left\{ \mathbf{x} = (x_i)_{i\in E} \in \mathbb{R}_+^E : \sum_{i\in E} x_i = 1 \right\} \tag{1}$$

Throughout the work, it is assumed that $E = \{1, 2, \dots, m\}$ for some $m \geq 2$. Let V be a mapping on the simplex S^E given by

$$(V(\mathbf{x}))_k = \sum_{i,j\in E} p_{ij,k} x_i x_j, \quad \forall k \in E \tag{2}$$

where $p_{ij,k}$ are called hereditary coefficients and satisfy

$$p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{l\in E} p_{ij,l} = 1, \quad \forall (i,j,k) \in E^3.$$

Based on the initial distribution $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in S^E$, we define a sequence of stochastic matrices $Q_{V,\mathbf{x}}^{[n,n+1]} = \left(q_{ij}^{(n,n+1)}(\mathbf{x}) \right)_{i,j\in E}$ as follows:

$$q_{ij}^{(n,n+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{l\in E} p_{li,j} (V^n(\mathbf{x}))_l \tag{3}$$

According to the Kolmogorov extension theorem, this measure is uniquely determined by its restrictions to the finite cylinder algebras $\mathcal{F}_n$, producing a non-homogeneous Markov measure $\mu_{V,\mathbf{x}}$.

A b-order on S^E is defined as $\mathbf{x} \preceq^b \mathbf{y}$ if

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \quad \forall k \in E.$$

A QSO V is called b-bistochastic if $V(\mathbf{x}) \preceq^b \mathbf{x}$ for every $\mathbf{x} \in S^E$. For $E = \{1, 2\}$, the canonical form of a b-bistochastic quadratic operator $V_{a,b}$ is given by:

$$V_{a,b} : \begin{cases} x_1' = a x_1^2 + 2b x_1 x_2, \\ x_2' = (1-a) x_1^2 + 2(1-b) x_1 x_2 + x_2^2 \end{cases} \tag{4}$$

where $a \in [0,1]$ and $b \in [0, \frac{1}{2}]$.

Theorem. Let $a \in [0,1]$, $b \in (0, \frac{1}{2})$, and let $V_{a,b}$ be given by (4). Then the following assertions hold:

(*A*) $\mu_{V_{a,b},\mathbf{x}} \sim \mu_{V_{a,b},\mathbf{y}}$ for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{int} S^E$.

(*B*) $\mu_{V_{a,b},\mathbf{e}_1} \perp \mu_{V_{a,b},\mathbf{e}_2}$. Moreover $\mu_{V_{a,b},\mathbf{e}_2} \ll \mu_{V_{a,b},\mathbf{x}}$ and $\mu_{V_{a,b},\mathbf{x}} \not\ll \mu_{V_{a,b},\mathbf{e}_2}$ for every $\mathbf{x} \in \operatorname{int} S^E$.

(*C*) If $a \neq 1$, then $\mu_{V_{a,b},\mathbf{e}_1} \ll \mu_{V_{a,b},\mathbf{y}}$ and $\mu_{V_{a,b},\mathbf{y}} \not\ll \mu_{V_{a,b},\mathbf{e}_1}$ for all $\mathbf{y} \in \operatorname{int} S^E$.

(*D*) If $a = 1$, then $\mu_{V_{a,b},\mathbf{e}_1} \perp \mu_{V_{a,b},\mathbf{y}}$ for all $\mathbf{y} \neq \mathbf{e}_1$.

Literature

1. **Azman A., Wan Rozali W.N.F.A., Mukhamedov F.** *The dynamics of non-homogeneous Markov chains associated with the b-bistochastic quadratic stochastic operators on 1-dimensional simplex.* Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences. – 2026. – Vol. 22, No 1. – P. 51–60.
2. **Eshmetova S.D., Khakimov O.N.** *On dynamics of infinite dimensional Volterra QSOs.* Uzbek Mathematical Journal. – 2024. – Vol. 68, No 2. – P. 71–77.
3. **Khakimov O., Eshmetova S.** *Infinite-dimensional nonlinear stochastic operators: b-bistochastic case.* Positivity. – 2026. – Vol. 30. – Article 5.

YUQORI TARTIBLI TENGLAMALAR BILAN BERILGAN QUVISH VA QOCHISH MASALASINI YECHISHNING BIR USULI HAQIDA

Ibaydullayev T.T.[1] Andijon davlat universiteti, Andijon, O'zbekiston;
ibaydullayev73@mail.ru
Tursunboyev H.T.[2] Andijon davlat universiteti, Andijon, O'zbekiston;
tursunboyevh2007@gmail.com

Aytaylik R^n fazosida x boshqariluvchi obyekt y boshqariluvchi obyektni quvlayotgan bo'lsin. x orqali quvlovchining, y orqali esa qochuvchining R^n fazosidagi holatini belgilaymiz. Mazkur ishdada quvlovchi va qochuvchining harakatlari mos ravishda quyidagi uchinchi tartibli differensial tenglamalar–dinamik sistemalar bilan ifodalangan differensial o'yinni qaraymiz:

$$\dddot{x} = u, \ddot{x}(0) = x_2, \dot{x}(0) = x_1, x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dddot{y} = v, \ \ddot{y}(0) = y_2, \dot{y}(0) = y_1, y(0) = y_0, \tag{2}$$

bu yerda, $x, y, u, v \in R^n, n \geq 1; x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2$–boshlang'ich berilganlar, xususan x_0, y_0– obyektlarning boshlang'ich holatlari, x_1, y_1 – obyektlarning boshlang'ich tezliklari, $x_0 \neq y_0$ deb hisoblanadi, u, v - boshqaruv parametrlari, u vektorning vaqt bo'yicha o'zgarishlari $u(\cdot) : [0, \infty) \to R^n$ o'lchovli funksiya. Unga quyidagi Azamov inegral chegaralanishi deb ataluvchi chegralanish qo'yilgan bo'lsin:

$$\int_{a(t)}^{t} |u(s)|^2 ds \leq \rho^2, \tag{3}$$

bu yerda yana $a(t) - \ t \geq 0$ da berilgan, monoton o'suvchi, uzluksiz va $a(t) \leq t$ shartni qanoalantiruvchi funksiya, ρ esa –biror nomanfiy son. Shu kabi v vektorning vaqt bo'yicha o'zgarishlari $v(\cdot) : [0, \infty) \to R^n$ o'lchovli funksiya bo'lisin. Unga ham yuqoridagidek chegaralanish qo'yilgan bo'lsin:

$$\int_{a(t)}^{t} |v(s)|^2 ds \leq \sigma^2, \tag{4}$$

bu yerda, σ - berilgan nomanfiy son.

x obyektning maqsadi qochuvchini tutish, ya'ni chekli t vaqtda $x(t) = y(t)$ tenglikka erishish, bu yerda $x(t), \ y(t)$ – o'yin jarayonida vujudga keladigan trayektoriyalar. Qochuvchi quvlovchi bilan uchrashmaslikka harakat qiladi, buning ilojisi bo'lmagan taqdirda hech bo'lmasa uchrashish vaqtini

mumkin qadar cho'zishga harakat qiladi. Odatda bu o'yin inertsion AA o'yin deyiladi. Quvlovchining (3) shartni qanoatlantiradigan $u(t)$ boshqaruv funksiyalari to'plamini joiz boshqaruvlar to'plami deb ataymiz va U_A bilan belgilaymiz. Qochuvchining (4) shartni qanoatlantiradigan $v(t)$ boshqaruv funksiyalari to'plamini joiz boshqaruvlar to'plami deb ataymiz va V_A bilan belgilaymiz.

1–ta'rif. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u : V_A \to R^n$ akslantirishni quvlovchining strategiyasi deyiladi:

1) $u(v)$ funksiya v, $v \in V_A$ bo'yicha Borel ma'nosida o'lchovli bo'lsin;

2)$\forall v(\cdot) \in V_A$ uchun biror $[0,t]$ vaqt oralig'ida $u(v(\cdot)) \in U_A$ bo'lsin, bunda $u(v(\cdot))$ funksiya $u(\cdot)$ strategiyaning realizatsiyasi deyiladi.

Aytaylik

$$z(t) = y(t) - x(t), z(0) = z_0 = y_0 - x_0,\ z^{(i)}(0) = z_i = y_i - x_i,\ i = 1,2.$$

Bundan va (1), (2) sistemadan

$$\dddot{z} = v - u,\ z(0) = z_0,\ \dot{z}(0) = z_1, \ddot{z}(0) = z_2$$

2–ta'rif. $u(v)$ strategiyani parallel quvish strategiyasi yoki qisqacha Π-strategiya deb ataymiz, agarda $\forall v(\cdot) \in V_A$ uchun

$$\dddot{z} = v(t) - u(v(t)),\ z(0) = z_0,\ \dot{z}(0) = z_1, \ddot{z}(0) = z_2$$

Koshi masalasining yechimi $z(t)$ ni

$$z(t) = z_0\Theta(t, v(\cdot)),\ \Theta(0, v(\cdot)) = 1$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bunda $\Theta(t, v(\cdot))$ $t, t \geq 0$ ning skalyar funksiyasi bo'lib, u odatda quvish masalasining yaqinlashish funksiyasi deyiladi.

3–ta'rif. Quvlovchi $[0,T]$ vaqt oralig'ida Π -strategiya yordamida yutadi deyildi, agar

a) $\exists t^* \in [0,T]$ vaqt momenti topilsaki, $\forall v(\cdot) \in V_A$ uchun $z(t^*) = 0$ bo'lsa;

b) $\forall v(\cdot) \in V_A$ uchun $[0,t^*]$ da $u(v(\cdot)) \in U_A$ o'rinli bo'lsa, bunda T kafolatlangan tutish vaqti deyiladi.

4–ta'rif. $v^* : R^+ \to V_A$ funksiya qochuchining strategiyasi deyiladi, agar $v^*(t)$ t, $t \geq 0$ bo'yicha Lebeg ma'nosida o'lchovli funksiya bo'lsa.

5–ta'rif. Qochuvchi $v^*(t) \in V_A$ strategiyani tanlab yutadi deymiz, agarda $\forall u(\cdot) \in U_A$ uchun

$$\dddot{z} = v^*(t) - u(v(t)),\ z(0) = z_0,\ \dot{z}(0) = z_1, \ddot{z}(0) = z_2$$

Koshi masalasining yechimi $z(t)$ $\forall t \geq 0$ uchun $z(t) \neq 0$ shartni bajarsa.

1–teorema. Agar (1)–(4) AA o'yinda $z_1 = 0$, $z_2 \parallel z_0$ yoki $z_2 = 0$, $z_1 \parallel z_0$ bo'lib, $\rho > \sigma$ bo'lsa, u holda o'yin quvlovchi uchun yutuqli bo'ladi.

2–teorema. Agar (1)–(4) AA o'yinda$\rho \leq \sigma$ bo'lsa, u holda o'yin qochuvchi uchun yutuqli bo'ladi.

Adabiyotlar

1. **Azamov A.A., Samatov B.T.** *The* Π *-Strategy: Analogies and applications.* The Fourth International Conference Game Theory and Management, St. Petersburg. 2010.

2. **Петросян Л.А.** *Игры преследования с «линией жизни».* Вестник ЛГУ. – Ленинград, 1967. – № 3. – С.76-85.

3. **Samatov B.T., Soyibboev U.B.** *The* Π *-strategy for Pontryagin's control example with the same type dynamics of players.* Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. (2021), № 6, pp. 7–11.

UDC 517.98

DISCRETE DYNAMICS OF A SDC MODEL FOR DIABETES

Jamilov U.U.[1], Khamdamkulova S.I. [2]

[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, [2]National University of Uzbekistan e-mail: [1]jamilovu@yandex.ru, [2]sevinchxamdamkulova@gmail.com

Let $E=\{1,\dots,m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on E is

$$S^{m-1}=\Big\{\mathbf{x}=\big(x_1,\dots,x_m\big)\in\mathbb{R}^m : x_i\geq 0,\ \ \forall i\in E,\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\Big\}$$

which is called the $m-1$- dimensional simplex.

A map $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$ is called a *quadratic stochastic operator*(QSO) if

$$V: x'_k=\sum_{i,j=1}^{m}p_{ij,k}x_ix_j,\quad k=1,\dots,m \tag{1}$$

$$\text{where,}\quad p_{ij,k}\geq 0,\quad p_{ij,k}=p_{ji,k},\quad \sum_{k=1}^{m}p_{ij,k}=1\quad \text{for any}\quad i,j,k=1,\dots,m. \tag{2}$$

A point $\mathbf{x}\in S^{m-1}$ is called a *fixed point* of a QSO V if $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ and we denote the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}\,(V)$.

Let $DV(\mathbf{x}^*)=\Big(\partial V_i/\partial x_j(\mathbf{x}^*)\Big)_{i,j=1}^{m}$ be the Jacobian of V at the point $\mathbf{x}^*$.

A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called *hyperbolic* if its Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ has no eigenvalues equal to 1 in absolute value.

A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:
(i) *attracting* if all the eigenvalues of the Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ are less than 1 in absolute value;
(ii) *repelling* if all the eigenvalues of the Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ are greater than 1 in absolute value;
(iii) a *saddle* otherwise.

The *orbit* (trajectory) $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{\{n=0,1,\dots\}}$ of V for any point $\mathbf{x}^{(0)}\in S^{m-1}$ is defined by

$$\mathbf{x}^{(n+1)}=V(\mathbf{x}^{(n)})=V^{n+1}(\mathbf{x}^{(0)}),\quad n=0,1,2,\dots$$

Let $\omega_W\big(\mathbf{x}^{(0)}\big)$ be the set of limit points of the orbit $\big\{\mathbf{x}^{(n)}\big\}_{n=0,1,2,\dots}$.

A QSO V is said to be *regular* if the limit $\lim\limits_{n\to\infty}V^n(\mathbf{x})$ exists for any $\mathbf{x}\in S^{m-1}$.

Consider a QSO defined on the $V:S^2\to S^2$ which has form

$$\begin{cases} x'_1=x_1^2+\alpha\big(x_2^2+x_3^2\big)+(1+\alpha-\beta)x_1x_2+(1+\alpha)x_1x_3+2\alpha x_2x_3,\\ x'_2=(1-\lambda-\alpha)x_2^2+(1+\beta-\lambda-\alpha)x_1x_2+(1-\lambda-\alpha)x_2x_3,\\ x'_3=\lambda x_2^2+(1-\alpha)x_3^2+\lambda x_1x_2+(1-\alpha)x_1x_3+(1+\lambda-\alpha)x_2x_3. \end{cases} \tag{3}$$

where $0<\alpha<1$, $0<\lambda\leq 1-\alpha$ and $\beta\in[\lambda+\alpha-1,1+\alpha+\sqrt{\alpha}\,]\setminus\{0\}$.

Note that the parameter β of the quadratic operator (3) may have positive or negative values. Therefore it follows either (3) is a quadratic operator with stochastic matrix or with non-stochastic matrix. Moreover, the system (3) can be seen as a discrete version of susceptible diabetes complication (SDC) mathematical model of diabetes (type 2 diabetes) with the non-constant number of incidences dealing with the diabetes population dynamics (for definitions see [1,2,3]).

Denote $\mathbf{e}_1=(1,0,0)$ and $\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda}=\left(\dfrac{\alpha+\lambda}{\beta},\dfrac{\alpha(\beta-(\alpha+\lambda))}{\beta(\alpha+\lambda)},\dfrac{\lambda(\beta-(\alpha+\lambda))}{\beta(\alpha+\lambda)}\right)$ for all $\alpha\beta\lambda\neq 0$.

Theorem. *For the operator V (3) the following statements hold*:

i) *The set of fixed points has the form*

$$\mathrm{Fix}\,(V)=\begin{cases}\{\mathbf{e}_1\} & \text{if}\quad \beta\leq\alpha+\lambda,\\ \{\mathbf{e}_1,\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda}\}, & \text{if}\quad \beta>\alpha+\lambda;\end{cases}$$

ii)

$$\mathbf{e}_1\text{ has the type }\begin{cases}\text{attractor}, & \text{if}\quad \beta<\alpha+\lambda,\\ \text{non-hyperbolic}, & \text{if}\quad \beta=\alpha+\lambda,\\ \text{saddle}, & \text{if}\quad \beta>\alpha+\lambda,\end{cases}$$

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda} \text{ has the type } \begin{cases} \text{non-hyperbolic}, & \text{if} \quad \beta = \alpha + \lambda, \\ \text{attractor}, & \text{if} \quad \beta > \alpha + \lambda; \end{cases}$$

iii) *If* $\beta \le \alpha + \lambda$ *then we have* $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$ *for any* $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus \{\mathbf{e}_1\}$;

iv) *If* $\beta > \alpha + \lambda$ *then we have*

$$\lim_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} \mathbf{e}_1, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,3\}}, \\ \mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda}, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus \big(\Gamma_{\{1,3\}} \cup \{\mathbf{x}_{\alpha\beta\lambda}\}\big). \end{cases}$$

Acknowledgements. The authors gratefully acknowledges the financial support provided by the grant No. FL-9524115138.

References

1. Ganikhodzhaev R. N., Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments, Sb. Math. 76 (2) (1993) 489–506.

2. Rozikov U. A., Xudayarov S. S. Quadratic non-stochastic operators: examples of splitted chaos, Ann. Func. Anal. 13 (2022) a.n. 17.

3. Boutayeb A., Lamlili M. E. N., Computational Mathematics and Modelling for Diabetes, Industrial and Applied Mathematics, Springer, Singapore, 2026

UDC 517.98

REGULARITY ANALYSIS OF A MATHEMATICAL MODEL FOR DIABETES

Jamilov U.U.[1], Khamdamkulova S.I. [2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, [2]National University of Uzbekistan e-mail:
[1]jamilovu@yandex.ru, [2]sevinchxamdamkulova@gmail.com

Let $E = \{1, \dots, m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on E is

$$S^{m-1} = \Big\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \ge 0, \ \ \forall i \in E, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\Big\}$$

which is called the $m-1$- dimensional simplex.

A map $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ is called a *quadratic stochastic operator*(QSO) if

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \dots, m \tag{1}$$

$$\text{where,} \quad p_{ij,k} \ge 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1 \quad \text{for any} \quad i, j, k = 1, \dots, m. \tag{2}$$

A point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a *fixed point* of a QSO V if $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ and we denote the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}\,(V)$.

Let $DV(\mathbf{x}^*) = \Big(\partial V_i/\partial x_j(\mathbf{x}^*)\Big)_{i,j=1}^{m}$ be the Jacobian of V at the point $\mathbf{x}^*$.

A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called *hyperbolic* if its Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ has no eigenvalues equal to 1 in absolute value.

A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:

(i) *attracting* if all the eigenvalues of the Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ are less than 1 in absolute value;

(ii) *repelling* if all the eigenvalues of the Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ are greater than 1 in absolute value;
(iii) a *saddle* otherwise.

The *orbit* (trajectory) $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{\{n=0,1,\dots\}}$ of V for any point $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ is defined by

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)}) = V^{n+1}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Let $\omega_W\big(\mathbf{x}^{(0)}\big)$ be the set of limit points of the orbit $\big\{\mathbf{x}^{(n)}\big\}_{n=0,1,2,\dots}$.

A QSO V is said to be *regular* if the limit $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x})$ exists for any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.

Consider a QSO defined on the $V : S^3 \to S^3$ which has form

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + \ell x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + (1+\ell)x_1x_4 + \ell x_2x_4 + \ell x_3x_4, \\ x_2' = (1-\beta)x_2^2 + (1-\beta)x_1x_2 + (1-\beta-\rho)x_2x_3 + (1-\beta)x_2x_4, \\ x_3' = \beta x_2^2 + x_3^2 + \beta x_1x_2 + x_1x_3 + (1+\rho+\beta)x_2x_3 + \beta x_2x_4 + x_3x_4, \\ x_4' = (1-\ell)x_4^2 + (1-\ell)x_1x_4 + (1-\ell)x_2x_4 + (1-\ell)x_3x_4, \end{cases} \tag{3}$$

where $0 < \ell, \beta \le 1$ and $\rho \in [-1-\beta-\frac{2}{3}\sqrt{\beta}, 1-\beta] \setminus \{0\}$.

Note that the parameter ρ of the quadratic operator (3) may have positive or negative values. Therefore it follows either (3) is a quadratic operator with stochastic matrix or with non-stochastic matrix. Moreover, the system (3) can be seen as a discrete version of deterministic mathematical model of diabetes (type 2 diabetes) dealing with the diabetes population dynamics (for definitions see [1,2,3]).

Denote $\Gamma_{\{1,3\}} = \{\mathbf{x} \in S^4 : x_2 = x_4 = 0\}$, $\quad \mathbf{x}^* = \Big(x_1, 1 - x_1 + \dfrac{\beta}{\rho}, -\dfrac{\beta}{\rho}, 0\Big)$.

Theorem. *For the QSO V* (3) *the following statements hold*:

i) *The set of fixed points has the form*

$$\mathrm{Fix}\,(V) = \begin{cases} \Gamma_{\{1,3\}} & \text{if} \quad \rho > 0, \\ \{\mathbf{x}^*\}, & \text{if} \quad \rho < 0; \end{cases}$$

ii) *any fixed point has the type non-hyperbolic*;

iii) *for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^3 \setminus \big(\Gamma_{\{1,3\}} \cup \{\mathbf{x}^*\}$ we have*

$$\lim_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} \big(x_1^{(0)}, 0, 1 - x_1^{(0)}, 0\big), & \text{if} \quad x_1^{(0)} + x_3^{(0)} \le -\dfrac{\beta}{\rho}, \\ \mathbf{x}^*, & \text{if} \quad x_1^{(0)} + x_3^{(0)} > -\dfrac{\beta}{\rho}. \end{cases}$$

Acknowledgements. The authors gratefully acknowledges the financial support provided by the grant No. FL-9524115138.

References

1. Ganikhodzhaev R. N., Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments, Sb. Math. 76 (2) (1993) 489–506.

2. Rozikov U. A., Xudayarov S. S. Quadratic non-stochastic operators: examples of splitted chaos, Ann. Func. Anal. 13 (2022) a.n. 17.

3. Boutayeb A., Lamlili M. E. N., Computational Mathematics and Modelling for Diabetes, Industrial and Applied Mathematics, Springer, Singapore, 2026

UDC 517.98

On dynamics of a separable cubic stochastic operator in S^2

Jamilov U. U.[1], Baratov B. S.[2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, [2]Karshi State University, Uzbekistan
e-mail: [1]jamilovu@yandex.ru, [2]baratov.bahodir@bk.ru

Let $E = \{1, \dots, m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on E

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \ x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$

the $(m-1)$-dimensional simplex.
A cubic stochastic operator (CSO) is a mapping $W\colon S^{m-1} \to S^{m-1}$ of the form

$$W : x'_\ell = \sum_{i,j,k \in E} P_{ijk,\ell} x_i x_j x_k, \quad \ell \in E, \tag{1}$$

where $P_{ijk,\ell}$ are the coefficients of heredity such that

$$P_{ijk,\ell} \geq 0, \quad \forall i,j,k,\ell \in E, \quad \sum_{\ell \in E} P_{ijk,\ell} = 1, \quad \forall i,j,k \in E, \tag{2}$$

that is, the coefficients $P_{ijk,\ell}$ do not change for any permutation of i, j and k if the types are not related to sex.
For a given $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ the trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}, n = 0, 1, 2, \dots$, of an initial point $\mathbf{x}^{(0)}$ under the action of the CSO (1) is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = W\big(\mathbf{x}^{(n)}\big)$, where $n = 0, 1, 2, \dots$

One of the main problems in mathematical biology consists of the study of the asymptotical behaviour of the trajectories. Let

$$A = (a_{i\ell})_{i,\ell=1}^{m}, \quad B = (b_{j\ell})_{i,\ell=1}^{m}, \quad C = (c_{k\ell})_{i,\ell=1}^{m}$$

be the matrices with the real entries.

Consider a CSO (1), (2) with additional condition

$$P_{ijk,\ell} = a_{i\ell} b_{j\ell} c_{k\ell}, \quad \text{for all} \quad i,j,k,\ell \in E, \tag{3}$$

where $a_{i\ell}, b_{j\ell}, c_{k\ell} \in \mathbb{R}$ entries of matrices A, B and C such that the conditions (2) are satisfied for the coefficients (3). Then the CSO W corresponding to the coefficients (3) has the form

$$x'_\ell = (W(\mathbf{x}))_\ell = (A(\mathbf{x}))_\ell \cdot (B(\mathbf{x}))_\ell \cdot (C(\mathbf{x}))_\ell, \quad \ell \in E, \tag{4}$$

where $(A(\mathbf{x}))_\ell = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i\ell} x_i$, $(B(\mathbf{x}))_\ell = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{j\ell} x_j$ and $(C(\mathbf{x}))_\ell = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{k\ell} x_k$.

Definition. *The CSO (4) is called separable cubic stochastic operator (SCSO).*

Let a face of the simplex S^2 be the set $\Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_i = 0, \ i \notin \alpha \subset \{1,2,3\}\}$. Let the set $\operatorname{int} S^2 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 x_2 x_3 > 0\}$ and let the set $\partial S^2 = S^2 \setminus \operatorname{int} S^2$ be the interior and the boundary of the simplex S^2, respectively. Let $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ be the vertexes of the two-dimensional simplex.
Consider the following SCSO defined on a finite-dimensional simplex S^2 which has the form

$$W : \begin{cases} x'_1 = x_1 \left(x_1 + (1+a)x_2 + x_3\right)\left(x_1 + x_2 + (1-b)\, x_3\right), \\ x'_2 = x_2 \left((1-a)x_1 + x_2 + x_3\right)\left(x_1 + x_2 + (1+c)x_3\right), \\ x'_3 = x_3 \left((1+b)\, x_1 + x_2 + x_3\right)\left(x_1 + (1-c)x_2 + x_3\right). \end{cases} \tag{5}$$

Theorem *For the SCSO W* (5), *the following assertions hold*:

(i) *if* $a \in (0,1]$, $b \in (0,1]$ and $c \in [-1,0)$, *then*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} \mathbf{e}_1, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,2\}} \setminus \{\mathbf{e}_2\}, \\ \mathbf{e}_3, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus \Gamma_{\{1,2\}}, \end{cases}$$

(ii) *if* $a \in (0,1]$, $b \in [-1,0)$ and $c \in (0,1]$, *then*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} \mathbf{e}_2, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{2,3\}} \setminus \{\mathbf{e}_3\}, \\ \mathbf{e}_1, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus \Gamma_{\{2,3\}}, \end{cases}$$

(iii) *if* $a \in [-1,0)$, $b \in (0,1]$ and $c \in (0,1]$, *then*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} \mathbf{e}_3, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,3\}} \setminus \{\mathbf{e}_1\}, \\ \mathbf{e}_2, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus \Gamma_{\{1,3\}}, \end{cases}$$

(iv) *if* $a \in [-1,0)$, $b \in [-1,0)$ and $c \in (0,1]$, *then*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} \mathbf{e}_1, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,3\}} \setminus \{\mathbf{e}_3\}, \\ \mathbf{e}_2, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus \Gamma_{\{1,3\}}, \end{cases}$$

(v) *if* $a \in [-1,0)$, $b \in (0,1]$ and $c \in [-1,0)$, *then*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} \mathbf{e}_2, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,2\}} \setminus \{\mathbf{e}_1\}, \\ \mathbf{e}_3, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus \Gamma_{\{1,2\}}, \end{cases}$$

(vi) *if* $a \in (0,1]$, $b \in [-1,0)$ and $c \in [-1,0)$, *then*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} \mathbf{e}_3, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{2,3\}} \setminus \{\mathbf{e}_2\}, \\ \mathbf{e}_1, & \text{if} \quad \mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus \Gamma_{\{2,3\}}. \end{cases}$$

References

1. Devaney R. L., An introduction to chaotic dynamical systems, Studies in Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO, 2003, reprint of the second (1989) edition.

2. Rozikov U. A., Nazir S., Separable quadratic stochastic operators. Lobachevskii J. Math. **31** (2010) 215–221.

3. Rozikov U. A., Zada A., On a class of separable quadratic stochastic operators, Lobaschevskii J. Math. **32** (2011) 385–394.

4. Baratov, B.S., Jamilov, U.U. On separable cubic stochastic operators, // Qual. Theory Dyn. Syst. Vol 23, Issue 2, a.n. 93. 28 pages. (2024).

UCD 517.98

Discrete dynamics of an SIR epidemic model on complex networks

Jamilov U. U., Kholikova F. Q.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
e-mail: jamilovu@yandex.ru, xoliqovafayoza8@gmail.com

Let us consider the following discrete-time SIR model on complex networks

$$\begin{cases} S_k^{(n+1)} = S_k^{(n)} - \beta[S_k^{(n)} I^{(n)}] - \alpha S_k^{(n)}, \\ I_k^{(n+1)} = I_k^{(n)} + \beta[S_k^{(n)} I^{(n)}] - \gamma I_k^{(n)}, \\ R_k^{(n+1)} = R_k^{(n)} + \gamma I_k^{(n)} + \alpha S_k^{(n)}, \end{cases} \tag{1}$$

where $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ and $S_k^{(n)}, I_k^{(n)}$ and $R_k^{(n)}$ denote the number of susceptible, infected and recovered nodes with degree $k \in \mathbb{N}_q = \{1, 2, \ldots, q\}$, $(q \in \mathbb{N})$ at step $n \geq 0$, respectively and

$$[S_k^{(n)} I^{(n)}] = \frac{k S_k^{(n)}}{\mathcal{N}} \sum_{\ell=1}^{q} \ell I_\ell^{(n)} \text{ for all } n \geq 0.$$

Consider a quadratic operator $V : \mathbb{R}^{3q} \to \mathbb{R}^{3q}$ such that $V : \mathbf{x} = (S_1, I_1, R_1, \ldots, S_q, I_q, R_q) \mapsto \mathbf{x}' = V(\mathbf{x}) = \left(S_1^{'}, I_1^{'}, R_1^{'}, \ldots, S_q^{'}, I_q^{'}, R_q^{'}\right)$ defined by

$$V : \begin{cases} S_k^{'} = S_k - k\beta[S_k I] - \alpha S_k, \\ I_k^{'} = I_k + k\beta[S_k I] - \gamma I_k, \\ R_k^{'} = R_k + \gamma I_k + \alpha S_k, \end{cases} \tag{2}$$

where $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_q$ and $S_k = S_k^{(0)}$, $I_k = I_k^{(0)}$, $R_k = R_k^{(0)}$, $S_k^{'} = S_k^{(1)}$, $I_k^{'} = I_k^{(1)}$, $R_k^{'} = R_k^{(1)}$. Such operators are discrete versions of epidemiological models and they arise in the problems of epidemiology (see e.g. [1,2]). Note that iterating the operator (2) n times yields the system (1).

Let $S_k + I_k + R_k = N_k = const$, $N_1 + \cdots + N_q = 1$. Then one can rewrite (2) in the form

$$\begin{aligned} S_k^{'} &= (1-\alpha) S_k \sum_{\ell=1}^{q} S_\ell + S_k \sum_{\ell=1}^{q} \Big(1 - \alpha - \frac{k\ell\beta}{\mathcal{N}}\Big) I_\ell + (1-\alpha) S_k \sum_{\ell=1}^{q} R_\ell, \\ I_k^{'} &= (1-\gamma) I_k \Big(\sum_{\ell=1}^{q} I_\ell + \sum_{\ell=1}^{q} R_\ell + \sum_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq k}}^{q} S_\ell \Big) + \frac{k\beta}{\mathcal{N}} S_k \sum_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq k}}^{q} \ell I_\ell + \Big(1 - \gamma + \frac{k^2\beta}{\mathcal{N}}\Big) I_k S_k, \\ R_k^{'} &= R_k \sum_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq k}}^{q} S_\ell + R_k \sum_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq k}}^{q} I_\ell + \gamma I_k \sum_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq k}}^{q} S_\ell + \gamma I_k \sum_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq k}}^{q} R_\ell + \alpha S_k \sum_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq k}}^{q} I_\ell + \alpha S_k \sum_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq k}}^{q} R_\ell \\ &\quad + \gamma I_k \sum_{\ell=1}^{q} I_\ell + \alpha S_k \sum_{\ell=1}^{q} S_\ell + R_k \sum_{\ell=1}^{q} R_\ell + (1+\alpha) S_k R_k + (1+\gamma) I_k R_k + (\gamma+\alpha) S_k I_k. \end{aligned} \tag{3}$$

The trajectory(orbit) can be written as $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)}) = V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$, $n \geq 0$. We are interested in studying the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}^{(n)}$, for any initial condition $\mathbf{x}^{(0)} \in R^{3q}$.

Let $S^{3q-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3q} : S_1 + I_1 + R_1 + \cdots + S_q + I_q + R_q = 1\}$ be the (3q-1)-dimensional simplex.

A point $\mathbf{a} \in S^{3q-1}$ is called a *fixed* point of V if $V(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ and we denote by $\mathrm{Fix}(V)$ the set of all fixed points.

Proposition. The simplex S^{3q-1} is an invariant set for the operator (2) if and only if

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{(1-\alpha)\mathcal{N}}{q^2}. \tag{4}$$

Note that the operator (3) is a quadratic stochastic operator under conditions (4).

Theorem 1. For the operator (2) the following statements hold:

i) any face Γ_τ is an invariant set with respect to (2), where $\tau = \{k : S_k = 0\}$;

ii) for all parameters satisfying (4) we have:

$$\mathrm{Fix}(V) = \begin{cases} S^{3q-1}, & \text{if} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0, \\ \{\mathbf{y}\}, & \text{if} \quad \beta = \gamma = 0,\ \alpha \neq 0 \ \text{ and } \ \gamma = 0,\ \alpha\beta \neq 0, \\ \{\mathbf{z}\}, & \text{if} \quad \alpha = \beta = 0,\ \gamma \neq 0 \ \text{ and } \ \alpha = 0,\ \gamma\beta \neq 0, \\ \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}, & \text{if} \quad \alpha = \gamma = 0,\ \beta \neq 0, \\ \{\mathbf{h}\}, & \text{if} \quad \alpha\gamma \neq 0 \ \text{ and } \ \alpha\beta\gamma \neq 0; \end{cases}$$

iii) The point $\mathbf{h}$ is an attracting point and all other fixed points are non-hyperbolic,

where $\mathbf{y} = \{0, I_1, N_1 - I_1, \ldots, 0, I_q, N_q - I_q\}$, $\mathbf{z} = \{S_1, 0, N_1 - S_1, \ldots, S_q, 0, N_q - S_q\}$ and $\mathbf{h} = \big\{0, 0, N_1, 0, 0, N_2, \ldots, 0, 0, N_q\big\}$.

Theorem 2. For any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{3q-1} \setminus \mathrm{Fix}\,(V)$, the orbit of the quadratic stochastic operator defined by (2) with parameters (4) converges to a fixed point $\mathbf{x}^*$. Namely, we have

i) if $\alpha = \beta = \gamma = 0$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^{(0)} = \big(S_1^{(0)}, I_1^{(0)}, R_1^{(0)}, \ldots, S_q^{(0)}, I_q^{(0)}, R_q^{(0)}\big)$;

ii) if $\beta = \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \big(0, I_1^{(0)}, N_1 - I_1^{(0)}, \ldots, 0, I_q^{(0)}, N_q - I_q^{(0)}\big)$;

iii) if $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \big(S_1^{(0)}, 0, N_1 - S_1^{(0)}, \ldots, S_q^{(0)}, 0, N_q - S_q^{(0)}\big)$;

iv) if $\alpha = \gamma = 0$, $\beta \neq 0$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \big(0, N_1 - R_1^{(0)}, R_1^{(0)}, \ldots, 0, N_q - R_q^{(0)}, R_q^{(0)}\big)$;

v) if $\beta = 0$, $\alpha\gamma \neq 0$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \big(0, 0, N_1, \ldots, 0, 0, N_q\big)$;

vi) if $\gamma = 0$, $\alpha\beta \neq 0$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \big(0, I_1^*, N_1 - I_1^*, \ldots, 0, I_q^*, N_q - I_q^*\big)$;

vii) if $\alpha = 0$, $\beta\gamma \neq 0$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \big(S_1^*, 0, N_1 - S_1^*, \ldots, S_q^*, 0, N_q - S_q^*\big)$;

viii) if $\alpha\beta\gamma \neq 0$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \big(0, 0, N_1, \ldots, 0, 0, N_q\big)$.

References

1. **J. Yang, Y. Chen** *Effect of infection age on an SIR epidemic model with demography on complex networks.* Physica A. 479 (2017), 527-541.

2. **N.N. Ganikhodjaev, R.N. Ganikhodjaev, U.U. Jamilov** *Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics.* Ergodic Theory Dynam. Systems. 35(5) (2015), 1443-1473.

UDC 519.245

MONTE CARLO SIMULATION FOR BRANCHING PROCESSES

Nazarov Z.A.,[1] Ismoilova M.O.[2]

[1] Cyber University, Tashkent, Uzbekistan; zuhrov13@gmail.com

[2] Tashkent Perfect University, Tashkent, Uzbekistan; munisaismoilova9718@gmail.com

This paper presents a new and efficient Monte Carlo simulation approach for branching processes with delay at reproduction periods. Although the theory of branching processes has been widely applied in biology, genetics, and epidemiology, this work extends it to the field of cybersecurity, specifically for modeling the delayed propagation of malware across a network. In the model, each particle represents an infected node, its offspring represent new nodes infected from it, and the delay period reflects the dormant state of the malware prior to activation.

The paper first presents the mathematical foundations of branching processes with delay at reproduction periods, their probability distributions, and the recursive expression for the number of particles in the n-th generation. A Monte Carlo algorithm for simulating this process is then proposed.

Suppose that the discrete random variable X denotes the number of newly infected nodes generated by an infected node, and its dormancy period is a non-negative discrete random variable, denoted by M. Then the joint probability mass function for the Branching Process with Delay at Reproduction Periods (BPDRP) is given by

$$f_{X,M}(x,m) := P(X = x, M = m), \quad x \in N_0,\ m \in N,$$

where $N_0 := \{0\} \cup N$ and $N = \{1, 2, 3, ...\}$.

Example. Suppose that the reproduction behavior of an infected node in a BPDRP is given by the following joint probability mass function.

$M\backslash X$	0	1	2
1	0.08	0.12	0.15
2	0.1	0.1	0.05
3	0.05	0.15	0.2

We have the following results:

$$E[X] = 0 \cdot (0.08 + 0.1 + 0.05) + 1 \cdot (0.12 + 0.1 + 0.15) + 2 \cdot (0.15 + 0.05 + 0.2) = 1.17,$$

$$E[M] = 1 \cdot (0.08 + 0.12 + 0.15) + 2 \cdot (0.1 + 0.1 + 0.05) + 3 \cdot (0.05 + 0.15 + 0.2) = 2.05,$$

$$E[X^2] = 0^2 \cdot (0.08 + 0.1 + 0.05) + 1^2 \cdot (0.12 + 0.1 + 0.15) + 2^2 \cdot (0.15 + 0.05 + 0.2) = 1.97,$$

$$E[M^2] = 1^2 \cdot (0.08 + 0.12 + 0.15) + 2^2 \cdot (0.1 + 0.1 + 0.05) + 3^2 \cdot (0.05 + 0.15 + 0.2) = 4.95,$$

$$Var[X] = E[X^2] - \big[E[X]\big]^2 = 1.97 - 1.17^2 = 0.6011,$$

$$Var[M] = E[M^2] - \big[E[M]\big]^2 = 4.95 - 2.05^2 = 0.7475,$$

$$E[XM] = 1 \cdot 1 \cdot 0.12 + 2 \cdot 1 \cdot 0.15 + 1 \cdot 2 \cdot 0.1 + 2 \cdot 2 \cdot 0.05 + 1 \cdot 3 \cdot 0.15 + 2 \cdot 3 \cdot 0.2 = 2.47.$$

Now we calculate the covariance and correlation coefficients:

$$Cov(X, M) = \mathsf{E}[XM] - E[X] \cdot E[M] = 2.47 - 1.17 \cdot 2.05 = 0.0715,$$

$$\rho(X, M) = \frac{Cov(X, M)}{\sqrt{Var[X] \cdot Var[M]}} = \frac{0.0715}{\sqrt{0.6011 \cdot 0.7475}} \approx 0.11.$$

In this example, the random variables X and M are dependent. The correlation coefficient between X and M is approximately 0.11.

Since generating the infected-node population at period n requires contributions from all preceding periods $(n-1), (n-2), \ldots, 1, 0$, we suppose that the nonnegative integer-valued random variables $X_{ij}^{(n)}$, $i, j \in N$.

If we let $Z(n)$ denote the number of infected nodes in generation n, then we have

$$Z(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{Z(n-i)} X_{ij}^{(n)}.$$

We denote $E[X_{ij}^{(n)}]$ by μ_i, i.e., mean of particles in i-th generation.

Theorem 1. If $\{Z(n),\ n \geq 0\}$ be a BPDRP and $E[X_{ij}^{(n)}] = \mu_i$, then

$$E[Z(n)] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, E[Z(n-i)].$$

While Theorem 1 characterizes the expected number of infected nodes across generations, it provides no information about how far a single realization of $Z(n)$ may deviate from this expected value–information that is essential for assessing the reliability of any Monte Carlo estimate of $Z(n)$. Knowledge of $Var[Z(n)]$ allows the construction of a confidence interval around the simulated estimate, thereby providing a quantitative measure of estimation accuracy that complements the convergence analysis promised for this study. Beyond its methodological role, this quantity also carries a direct practical interpretation in the malware propagation setting: a large variance indicates that the number of infected nodes at a given generation can differ substantially from its expected value, implying greater uncertainty in forecasting the extent of an outbreak, whereas a small variance indicates that the propagation dynamics are comparatively predictable. The following result therefore extends the recursive expectation formula of Theorem 1 to a corresponding recursive expression for the variance of $Z(n)$.

Theorem 2. If $\{Z(n),\ n \geq 0\}$ is a BPDRP with

$$E[X_i^{(n)}] = \mu_i \quad \text{and} \quad Var[X_i^{(n)}] = \sigma_i^2$$

for each delay $i \in \mathbb{N}$*, then*

$$Var[Z(n)] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \, E[Z(n-i)] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_i \mu_k \, Cov\big(Z(n-i), Z(n-k)\big).$$

References

1. **Moradi, M., Fathi Vajargah, B.** *Monte Carlo Simulation for Branching Process with Delay at Reproduction Periods. Advances in Computer Science and its Applications (ACSA)*, 1(4), 256–260, 2012.
2. **Fathi Vajargah, B., Moradi, M.** *Branching Process with Delay at Reproduction Periods. Far East Journal of Theoretical Statistics*, 30(2), 145–151, 2010.
3. **Kimmel, M., Axelrod, D.E.** *Branching Processes in Biology,* Springer-Verlag, New York, 2002.

УДК 517.984

EIGHT-ELECTRON SECOND SINGLET STATE IN THE HUBBARD MODEL. TWO-AND THREE-DIMENSIONAL CASE

Norbutaev Sh. G.[1]

[1] 74th general secondary school of Shakhrisabz district of Kashkadarya region of Republic of Uzbekistan; norbutaevshuhrat2@gmail.com

We consider the energy operator of eight-electron systems in the Hubbard model and describe the structure of the essential spectra and discrete spectrum of the system for second singlet states in the $\nu-$ dimensional lattice. The Hamiltonian of the model has the form [1]

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}. \tag{1}$$

Here A is the electron energy at a lattice site and B is the transfer integral between electrons at neighboring sites; we assume for convenience that $B > 0$. Further, $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, ..., \nu$, where e_j are pairwise orthogonal unit vectors, the summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the lattice sites, γ is the spin index, $\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, where $\uparrow$ and $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $z \in Z^\nu$.

Hamiltonian (1) commutes with all components of the total spin operator $S = (S^+, S^-, S^z)$, and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depends on S. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathcal{H}_{as}$.

Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The second singlet state corresponds to the free motion of eight electrons and their interactions over the lattice with the basic functions ${}^2s^0_{m,n,r,k,p,q,t,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\downarrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{l,\downarrow}\varphi_0$. The subspace ${}^2\mathcal{H}^0_s$ corresponding to the second singlet state is the set of all vectors of the form

$${}^2\psi^0_s = \sum_{m,n,r,k,p,q,t,l\in Z^\nu} f(m,n,r,k,p,q,t,l)\,{}^2s^0_{m,n,r,k,p,q,t,l\in Z^\nu}, f \in l^{as}_2,$$

where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^8)$. We let ${}^2H^0_s$ denote the restriction of operator H to the subspace ${}^2\mathcal{H}^0_s$.

Theorem 1. (coordinate representation of the action of operator ${}^2H^0_s$). The subspace ${}^2\mathcal{H}^0_s$ is invariant under the operator H, and the restriction ${}^2H^0_s$ of operator H to the subspace ${}^2\mathcal{H}^0_s$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator ${}^2\overline{H}^0_s$ acting in the space l^{as}_2 as

$${}^2\overline{H}^0_s{}^2\psi^0_s = 8Af(m,n,r,k,p,q,t,l) + B\sum_{\tau}[f(m+\tau,n,r,k,p,q,t,l) + f(m,n+\tau,r,k,p,q,t,l)+$$

$$+f(m,n,r+\tau,k,p,q,t,l)+f(m,n,r,k+\tau,p,q,t,l)+f(m,n,r,k,p+\tau,q,t,l)+f(m,n,r,k,p,q+\tau,t,l)+$$

$$+f(m,n,r,k,p,q,t+\tau,l)+f(m,n,r,k,p,q,t,l+\tau)]+U[\delta_{m,n}+\delta_{m,k}+\delta_{m,q}+\delta_{m,l}+\delta_{n,r}+\delta_{n,p}+\delta_{n,t}+\delta_{r,k}+$$

$$+\delta_{r,q}+\delta_{r,l}+\delta_{k,p}+\delta_{k,t}+\delta_{p,q}+\delta_{p,l}+\delta_{q,t}+\delta_{t,l}]f(m,n,r,k,p,q,t,l). \tag{2}$$

The operator ${}^2H^0_s$ acts on a vector ${}^2\psi^0_s \in {}^2\mathcal{H}^0_s$ as

$${}^2H^0_s\,{}^2\psi^0_s = \sum_{m,n,r,k,p,q,t,l\in Z^\nu} ({}^2\overline{H}^0_s f)(m,n,r,k,p,q,t,l)\,{}^2s^0_{m,n,r,k,p,q,t,l\in Z^\nu}. \tag{3}$$

Lemma 1. The spectra of the operators ${}^2H^d_{1/2}$ and ${}^1\overline{H}^d_{1/2}$ coincide.

Let $\mathcal{F}: l_2((Z^\nu)^8) \to L_2((T^\nu)^8) \equiv {}^2\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$ be the Fourier transformation, where T^ν is the $\nu-$ dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e., $\lambda(T^\nu)=1$. We set ${}^2\widetilde{H}^0_s = \mathcal{F}\,{}^2\overline{H}^0_s\mathcal{F}^{-1}$.

Theorem 2. (quasimomentum representation of the action of operator ${}^2H^0_s$). The Fourier transform of operator ${}^2\overline{H}^0_s$ is an operator ${}^2\widetilde{H}^0_s$ acting in the space $L^{as}_2((T^\nu)^8)$ be the formula

$$
\begin{aligned}
{}^2\widetilde{H}^0_s\ {}^2\psi^0_s = h(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi,\alpha,\beta)f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi,\alpha,\beta) + U\int_{T^\nu}[f(s,\lambda+\mu-s,\gamma,\theta,\eta,\xi,\alpha,\beta)+\\
+f(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s,\eta,\xi,\alpha,\beta)+f(s,\mu,\gamma,\theta,\eta,\lambda+\xi-s,\alpha,\beta)+f(s,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi,\alpha,\lambda+\beta-s)+\\
+f(\lambda,s,\mu+\gamma-s,\theta,\eta,\xi,\alpha,\beta)+f(\lambda,s,\gamma,\theta,\mu+\eta-s,\xi,\alpha,\beta)+f(\lambda,s,\gamma,\theta,\eta,\xi,\mu+\alpha-s,\beta)+\\
+f(\lambda,\mu,s,\gamma+\theta-s,\eta,\xi,\alpha,\beta)+f(\lambda,\mu,s,\theta,\eta,\gamma+\xi-s,\alpha,\beta)+f(\lambda,\mu,s,\theta,\eta,\xi,\alpha,\gamma+\beta-s)+\\
+f(\lambda,\mu,\gamma,s,\theta+\eta-s,\xi,\alpha,\beta)+f(\lambda,\mu,\gamma,s,\eta,\xi,\theta+\alpha-s,\beta)+f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,s,\eta+\xi-s,\alpha,\beta)+\\
+f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,s,\xi,\alpha,\eta+\beta-s)+f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,s,\xi+\alpha-s,\beta)+f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi,s,\alpha+\beta-s)]ds.
\end{aligned}
$$

Where

$$
h(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi,\alpha,\beta) = 8A + 2B\sum_k^\nu[\cos\lambda_k+\cos\mu_k+\cos\gamma_k+\cos\theta_k+\cos\eta_k+\cos\xi_k+\cos\alpha_k+\cos\beta_k].
$$

Since all parameters $\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi,\alpha,\beta$ and s a changed in the ν-dimensional torus T^ν, therefore, you can write as (4)

$$
{}^2\widetilde{H}^0_s = \widetilde{H}^1_1\bigotimes I\bigotimes I\bigotimes I + I\bigotimes\widetilde{H}^2_1\bigotimes I\bigotimes I + I\bigotimes I\bigotimes\widetilde{H}^3_1\bigotimes I + I\bigotimes I\bigotimes I\bigotimes\widetilde{H}^4_1.
$$

Here

$$
(\widetilde{H}^1_1 f)(\lambda,\mu) = \{2A+2B\sum_{k=1}^\nu[\cos\lambda_k+\cos\mu_k]\}f(\lambda,\mu) + 4U\int_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds,
$$

$$
(\widetilde{H}^2_1 f)(\gamma,\theta) = \{2A+2B\sum_{k=1}^\nu[\cos\gamma_k+\cos\theta_k]\}f(\gamma,\theta) + 4U\int_{T^\nu} f(s,\gamma+\theta-s)ds,
$$

$$
(\widetilde{H}^3_1 f)(\eta,\xi) = \{2A+2B\sum_{k=1}^\nu[\cos\eta_k+\cos\xi_k]\}f(\eta,\xi) + 4U\int_{T^\nu} f(s,\eta+\xi-s)ds,
$$

$$
(\widetilde{H}^4_1 f)(\alpha,\beta) = \{2A+2B\sum_{k=1}^\nu[\cos\alpha_k+\cos\beta_k]\}f(\alpha,\beta) + 4U\int_{T^\nu} f(s,\alpha+\beta-s)ds.
$$

Let the total quasimomentum of the two-electron systems $\lambda+\mu=\Lambda_1,\quad \gamma+\theta=\Lambda_2,\quad \eta+\xi=\Lambda_3,\quad \alpha+\beta=\Lambda_4$ be fixed. Denote by $L_2(\Gamma_{\Lambda_1})$ the space of functions that are square integrable over the manifold $\Gamma_{\Lambda_1}=\{(\lambda,\mu):\lambda+\mu=\Lambda_1\}$. Note that in this case the operator $\widetilde{H}^1_1$ and space $\mathcal{H}^1_1 = L_2((T^\nu)^2)$ can be expanded into the direct integral $\widetilde{H}^1_1 = \bigoplus\int_{T^\nu}\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}d\Lambda_1$, $\mathcal{H}^1_1 = \bigoplus\int_{T^\nu}\mathcal{H}^1_{1\Lambda_1}d\Lambda_1$.

It is clear that $\sigma(A\bigotimes I + I\bigotimes B) = \{\lambda+\mu:\lambda\in\sigma(A),\quad \mu\in\sigma(B)\}$. Therefore, we must investigate the spectrum of the operators $\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}$, $\widetilde{H}^2_{1\Lambda_2}$, $\widetilde{H}^3_{1\Lambda_3}$ and $\widetilde{H}^4_{1\Lambda_4}$.

It is known that the continuous spectrum of operator $\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}$ is independent of the parameter U and consists of the intervals

$$
\sigma_{cont}(\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}) = G^\nu_{\Lambda_1} = [m^\nu_{\Lambda_1}, M^\nu_{\Lambda_1}] = [2A-4B\sum_{k=1}^\nu\cos\frac{\Lambda^k_1}{2}, 2A+4B\sum_{k=1}^\nu\cos\frac{\Lambda^k_1}{2}].
$$

Definition 1. *The eigenfunction $\phi_{\Lambda_1}\in L_2((T^\nu)^2)$ of the $\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}$ corresponding to an eigenvalue $z_{\Lambda_1}\notin G^\nu_{\Lambda_1}$ is called a bound state (antibound state) of $\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}$ with the quasi momentum Λ_1, and the quantity z_{Λ_1} is called the energy of this state.*

We consider the one-dimensional case.

Theorem 3. Let ν=1 and $U<0$, then for all values of parameters of the Hamiltonian, the operator $\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}$ has a unique eigenvalue $z_1 = 2A - 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$ that is below the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}$, i.e., $z_1 < m^1_{\Lambda_1}$.

Theorem 4. Let ν=1 and $U>0$, then for all values of parameters of the Hamiltonian, the operator $\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}$ has a unique eigenvalue $\widetilde{z}_1 = 2A + 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$ that is above the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}^1_{1\Lambda_1}$, i.e., $\widetilde{z}_1 > m^1_{\Lambda_1}$.

Now, using the above results and representation (4), we describe the structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the energy operator of eight-electron systems in the Hubbard model in the second singlet state of the system.

Theorem 5. Let $\nu = 1$, and $U < 0$, then the essential spectrum of operator ${}^2\widetilde{H}^0_s$ is the union of fifteen segments:

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^0_s) = [a+c+e+m, b+d+f+n]\cup[a+c+e+z_4, b+d+f+z_4]\cup[a+c+m+z_3, b+d+n+z_3]\cup[a+e+m+$$

$$+z_2, b+f+n+z_2]\cup[c+e+m+z_1, d+f+n+z_1]\cup[a+c+z_3+z_4, b+d+z_3+z_4]\cup[a+e+z_2+z_4, b+f+z_2+z_4]\cup$$

$$\cup[c+e+z_1+z_4, b+n+z_1+z_4]\cup[a+m+z_2+z_3, b+n+z_2+z_3]\cup[c+m+z_1+z_3, d+n+z_1+z_3]\cup$$

$$\cup[e+m+z_1+z_2, f+n+z_1+z_2]\cup[a+z_2+z_3+z_4, b+z_2+z_3+z_4]\cup[c+z_1+z_3+z_4, d+z_1+z_3+z_4]\cup$$

$$\cup[e+z_1+z_2+z_4, f+z_1+z_2+z_4]\cup[m+z_1+z_2+z_3, n+z_1+z_2+z_3],$$

and discrete spectrum of operator ${}^2\widetilde{H}^0_s$ is consists of a unique eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^0_s) = \{z_1+z_2+z_3+z_4\}$, what lies to the below than the left edge of the essential spectrum of operator ${}^2\widetilde{H}^0_s$. Here

$$a = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}, b = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}, c = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}, d = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}, e = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2},$$

$$f = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2}, m = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_4}{2}, n = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_4}{2}, z_1 = 2A - 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}},$$

$$z_2 = 2A - 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}, z_3 = 2A - 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}}, z_4 = 2A - 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_4}{2}},$$

$$\widetilde{z}_1 = 2A + 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}, \widetilde{z}_2 = 2A + 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}, \widetilde{z}_3 = 2A + 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}},$$

$$\widetilde{z}_4 = 2A + 4\sqrt{U^2 + B^2\cos^2\frac{\Lambda_4}{2}}.$$

References

1. **Tashpulatov S.M.** *Spectra of the energy operator of three-electron system in the impurity hubbard model.*//Theoretical and Mathematical Physics. 2026. vol. 226, No 3, PP. 558-573.

UDK 517.938

Saddle-Node Bifurcations and Hysteresis in the Spruce Budworm Outbreak Model

Nurboev I.A.[1]
[1]Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
ilhombeknurboyev01@gmail.com

This paper gives a self-contained qualitative and bifurcation analysis of the classical spruce budworm outbreak model of Ludwig, Jones and Holling [2], as presented in Strogatz §3.7 [1]. We derive the model's nondimensional form, classify its fixed points by a graphical stability-alternation argument, and construct in closed form the saddle-node bifurcation curve governing the transition between refuge, bistable, and outbreak regimes. At the biologically documented value $k = 300$ both fold points are located numerically to high precision, and we show that Ludwig et al.'s empirical "$r < 1/2$"threshold is in fact the $k \to \infty$ limit of the upper fold.

The eastern spruce budworm (*Choristoneura fumiferana*) is a serious pest in eastern Canada, attacking the leaves of the balsam fir tree; outbreaks recur roughly every 30-40 years and can kill most mature trees in an infested stand within about four years [2]. Ludwig, Jones and Holling [2] exploited a separation of time scales to propose a one-dimensional model: the budworm population evolves on a fast scale of months, while the forest evolves on a slow scale of decades. Strogatz [1] presented this analysis mostly through graphical reasoning; a formula for the bifurcation curve is given, but neither of its two branches is evaluated numerically. That gap is what we take up here.

In the absence of predators the budworm population $N(t)$ grows logistically with intrinsic rate R and carrying capacity K; predation, chiefly by birds, is a loss term $p(N)$. Ludwig et al. [2] modeled this with $p(N) = BN^2/(A^2 + N^2)$, a case of the type-III functional response. The full model is

$$\dot{N} = RN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}, \qquad A, B > 0. \tag{1}$$

With $x = N/A$, $\tau = Bt/A$, $r = RA/B$, $k = K/A$, (1) becomes the dimensionless flow

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x; r, k) := rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2}. \tag{2}$$

$x^* = 0$ is a fixed point for all (r, k), and $f'(0) = r > 0$, so it is always unstable. Nonzero fixed points satisfy $f(x)/x = 0$, i.e.

$$g(x; r, k) := r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{1 + x^2} = 0 \iff r\left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1 + x^2}. \tag{3}$$

The right-hand side of (3) is a fixed curve, independent of the parameters, while the left-hand side is a straight line with x-intercept k and y-intercept r [1,2]. For k below a critical value the line meets the curve exactly once; for larger k it can cross the curve once, three times, or twice tangentially. In the generic three-root case write the roots as $a < b < c$. Since $x^* = 0$ is unstable and stability must alternate along the line, a and c are stable while b is unstable: a is a low-density refuge level, b an unstable threshold separating the two basins of attraction, and c a high-density outbreak level.

As r decreases at fixed k, the line rotates until it becomes tangent to the curve, at which point b and c collide and annihilate in a saddle-node bifurcation [1], leaving only the refuge state a. Symmetrically, increasing r causes a and b to collide, leaving only c. The tangency condition $g = 0$ together with $\partial g/\partial x = 0$ gives the bifurcation curve in closed parametric form:

$$r(x) = \frac{2x^3}{(1 + x^2)^2}, \qquad k(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}. \tag{4}$$

This curve splits the (k, r)-plane into refuge-only, bistable, and outbreak-only regions; in the bistable region hysteresis governs the outcome. If the forest sits on the refuge branch a and r is slowly increased past the upper fold, the population jumps to the outbreak level c; reducing r back below the same value does not restore the refuge state, because the system is now on branch c, which persists until the lower fold is crossed. The two thresholds for "outbreak begins"and "outbreak ends"are therefore different.

At $k = 300$, solving (4) numerically by Brent's method (10^{-12} tolerance) gives both fold points: $r = 0.501675$ (upper, where $a = b = 1.00336$) and $r = 0.013333$ (lower, where $b = c = 149.993$). Table 1 lists representative fixed points inside the bistable window.

Table 1. Computed fixed points at $k = 300$.

r	a (refuge)	b (threshold)	c (outbreak)
0.05	0.05012	1.497	278.453
0.15	0.1535	6.668	293.178
0.30	0.3329	3.038	296.629
0.45	0.6238	1.615	297.761
0.5017	1.00336	1.00336	298.00
0.0133	0.01334	149.993	149.993

The bistable window is thus numerically estimated as $0.013333 < r < 0.501675$, confirming Ludwig et al.'s rough "$r < 1/2$"estimate to six digits. Moreover, letting $x \to 1^+$ in (4) gives $k \to \infty$ and $r \to 1/2$, so the upper fold approaches $r = 1/2$ precisely as $k \to \infty$.

Ludwig et al. [2] estimated $k \approx 300$ for a young, vigorously growing forest, with r increasing from below $1/2$ toward 1 as the forest matures. Writing S for average tree size, both K and A scale with S, so $k = K'/A'$ stays structurally fixed while $r = RA'S/B$ grows with S [1]. The model thus predicts a transition toward the outbreak regime as r increases beyond the upper fold.

The hysteresis structure carries a direct management implication: intervention should occur before the system crosses the upper fold. Direct population control alone, once an outbreak has developed, may not immediately restore the low-density equilibrium, since the refuge state itself may no longer exist. This regime-shift structure connects to May's broader survey of ecological systems with multiple stable states [3].

In conclusion, we gave an independent, gap-free derivation of the Ludwig-Jones-Holling model, classified its fixed points, and constructed in closed form the saddle-node bifurcation curve (4) governing its hysteresis. Both fold points were located numerically to high precision at $k = 300$, sharpening Ludwig et al.'s empirical threshold into an exact $k \to \infty$ limit.

Literature

1. **Strogatz S.H.** *Nonlinear Dynamics and Chaos.* Reading, MA: Perseus Books. – 1994. – 498 p.
2. **Ludwig D., Jones D.D., Holling C.S.** Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest. *J. Animal Ecology.* – 1978. – Vol. 47, No. 1. – P. 315-332.
3. **May R.M.** Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states. *Nature.* – 1977. – Vol. 269. – P. 471-477.

UDK 517.98

On fixed points of a rational mapping related to the p-adic Potts model on $(2,3)$-ary tree

Rahmatullaev M. M.[1], Abdukaxorova Z. T.[2]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan; mrahmatullaev@rambler.ru
[2]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan; zulxumorabdukaxorova@gmail.com

1. p-adic numbers.

Let p be a fixed prime number. The field $\mathbb{Q}_p$ is defined as the completion of $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic absolute value

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

where $v_p(x)$ denotes the p-adic valuation. Any nonzero $x \in \mathbb{Q}$ can be represented in the form

$$x = p^r \frac{m}{n},$$

where $r \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, and $p \nmid mn$. The p-adic absolute value is non-Archimedean and satisfies the strong triangle inequality

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

In particular, if $|x|_p \neq |y|_p$, then

$$|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

These properties play a fundamental role in p-adic analysis (see [1]).

2. Dynamical systems in $\mathbb{Q}_p$.

We recall some standard notions from the theory of p-adic dynamical systems (see [3]).

For $a \in \mathbb{Q}_p$ and $r > 0$, the p-adic open ball centered at a with radius r is defined by

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p < r\}.$$

A function $f : U_r(a) \to \mathbb{Q}_p$ is called analytic if it can be represented by a power series

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x-a)^n, \qquad f_n \in \mathbb{Q}_p,$$

which converges on $U_r(a)$.

Let $U \subseteq \mathbb{Q}_p$ be an f-invariant set and let $f : U \to U$ be an analytic map. For $x_0 \in U$, the orbit of x_0 is defined by

$$x^{(n)} = f^n(x_0), \qquad n \geq 0,$$

where

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-times}}$$

denotes the n-th iterate of f.

Definition 1. If $f(x_0) = x_0$, then x_0 is called a *fixed point* of f. The set of all fixed points of f is denoted by $\mathrm{Fix}(f)$.

The renormalization group approach has proved useful in studying dynamical properties of p-adic statistical mechanical models. In particular, F.Mukhamedov and O.Khakimov investigated the chaotic behavior of the renormalization group transformation for the p-adic Ising model on (i,k)-ary trees [2]. Motivated by this approach, we consider the p-adic Potts model on the $(2,3)$-ary tree and study the fixed points of the corresponding rational mapping.

The construction of translation-invariant p-adic quasi-Gibbs measures for the three-state Potts model on the $(2,3)$-ary tree leads to the following rational mapping:

$$f(x) = \frac{ax^6 + 4x^3 + b}{x^6 + bx^3 + a + 3},$$

where

$$a = \frac{\theta^3 + 2}{\theta^2 + \theta + 1}, \qquad b = \frac{2(\theta^2 + 4\theta + 1)}{\theta^2 + \theta + 1}.$$

The following theorem describes the number of fixed points of f.

Theorem 1. Let $p > 3$ be a prime number. Then

$$|\mathrm{Fix}(f)| = \begin{cases} 2, & p \equiv 2 \pmod 3, \\ 4, & p \equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$$

Literature

1. **Vladimirov V. S., Volovich I. V. and Zelenov E. V.** *p -Adic Analysis and Mathematical Physics* (World Sci. Publ., Singapore,1994).

2. **Mukhamedov, F., Khakimov, O.** *Chaotic behavior of renormalization group of the p-adic Ising model on ary trees.* J. Math. Anal. Appl. 487(2), 124–138 (2020).

3. **Khrennikov A.Yu., Nilsson M.** *p-adic deterministic and random dynamical systems* (Kluwer, Dordreht, 2004.)

UDK 517.98-519.21

p-adic dynamical systems on invariant spheres of a Möbius transformation

Rozikov U.A.[1], Aliev E.,T.[2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
rozikovu@yandex.ru
[2]Kimyo International University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
aliev-erkinjon@mail.ru

We consider the p-adic dynamical system (see [1]–[3]) generated by the Möbius transformation

$$f(x)=\frac{x+a}{bx+c}, \qquad a,b,c\in\mathbb{Q}_p, \quad b\neq 0, \quad c\neq ab, \qquad x\neq -\frac{c}{b},$$

and study its dynamics on spheres centered at the origin,

$$S_\alpha(0)=\{x\in\mathbb{Q}_p:\ |x|_p=\alpha\}.$$

For

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{Q}_p\setminus\left\{-\frac{c}{b}\right\},$$

we say that $S_\alpha(0)$ is relatively invariant if

$$f\big(S_\alpha(0)\cap\mathrm{Dom}(f)\big)\subset S_\alpha(0).$$

If $S_\alpha(0)\subset\mathrm{Dom}(f)$, this condition is equivalent to the usual invariance. Put

$$\mathcal{P}=\left\{x\in\mathbb{Q}_p:\ \exists\, n\geq 0 \text{ such that } f^n(x)=-\frac{c}{b}\right\}.$$

Accordingly, the natural phase space of the dynamical system generated by f is

$$\mathcal{D}=\mathbb{Q}_p\setminus\mathcal{P}.$$

Then $f(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}$, and every iterate $f^n(x)$ is well defined for all $x\in\mathcal{D}$ and all $n\geq 0$.

Our first result gives a complete classification of invariant spheres.

Theorem 1. *The following conditions are equivalent:*

(a) $S_\alpha(0)$ *is relatively invariant under* f*;*

(b) $S_\alpha(0)$ *is invariant under* f*;*

(c) one of the following cases holds:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && |c|_p>\max\{1,\sqrt{|ab|_p}\}, && \alpha=\left|\frac{a}{c}\right|_p;\\
&\text{(II)} && |c|_p<1,\ |ab|_p<1, && \alpha=\frac{1}{|b|_p};\\
&\text{(III)} && |c|_p=1,\ |ab|_p<1, && \alpha\in\left(|a|_p,\frac{1}{|b|_p}\right);\\
&\text{(IV)} && \sqrt{|ab|_p}>\max\{1,|c|_p\}, && \alpha=\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|_p}.
\end{aligned}$$

Moreover, in each of the cases (I)–(IV)*, one has*

$$S_\alpha(0)\cap\mathcal{P}=\varnothing.$$

Hence every invariant sphere described above is contained in the natural phase space:

$$S_\alpha(0)\subset\mathcal{D}.$$

The main dynamical results are the following.

Theorem 2. *Assume that one of the cases* (I)–(IV) *above holds. Then all iterates of* f *are well defined on* $S_\alpha(0)$*. Moreover, the following assertions hold.*

(i) In cases (I) *and* (II)*, the sphere* $S_\alpha(0)$ *contains a unique fixed point* x^**, and for every* $x \in S_\alpha(0)$*,*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^*.$$

Thus the induced dynamics on $S_\alpha(0)$ *is contracting.*

(ii) In case (III)*, if* $p \neq 2$*, then* $(S_\alpha(0), f, \mu_\alpha)$ *is not ergodic. If* $p = 2$*, then* $(S_\alpha(0), f, \mu_\alpha)$ *is ergodic if and only if*

$$c \equiv 1 \pmod 4, \qquad |ab|_2 \le \frac{1}{8}, \qquad \alpha \in \left(2|a|_2, \frac{1}{2|b|_2}\right).$$

(iii) In case (IV)*, if* $p > 3$*, then* $(S_\alpha(0), f, \mu_\alpha)$ *is not ergodic. If* $p = 3$*, then* $(S_\alpha(0), f, \mu_\alpha)$ *is ergodic if and only if one of the following conditions holds:*

(a) $|ab|_3 = 9$*,* $a|a|_3 \equiv -b|b|_3 \pmod 3$*, and* $c \not\equiv -1 \pmod 3$*;*

(b) $|ab|_3 > 9$*,* $a|a|_3 \equiv -b|b|_3 \pmod 3$*, and*

$$|c|_3 = \frac{\sqrt{|ab|_3}}{3}.$$

If $p = 2$*, putting* $s = \sqrt{|ab|_2}$*, the system is ergodic if and only if one of the following conditions holds:*

(a) $s = 2$*,* $a|a|_2 \equiv b|b|_2 \pmod 4$*,* $sc \equiv 0 \pmod 4$*;*

(b) $s \ge 4$*,* $a|a|_2 \equiv b|b|_2 \pmod 4$*,* $sc \equiv 2 \pmod 4$*.*

The proofs are based on a reduction of the dynamics on $S_\alpha(0)$ to the unit sphere $S_1(0) = \mathbb{Z}_p^\times$ by means of topological conjugacy and on ergodicity criteria for induced maps modulo p^k. Hence the invariant spheres are completely classified, the possible bad points are excluded from the phase space, and the asymptotic and ergodic behavior of the system on such spheres is described.

Reference

1. Anashin V.S., Ergodic transformations in the space of p-adic integers. In: *p-Adic Mathematical Physics*. AIP Conf. Proc. 826. Melville, NY: American Institute of Physics, 2006. pp. 3–24.
2. Rozikov U.A., Sattarov I.A., p-adic dynamical systems of $(2,2)$-rational functions with unique fixed point. *Chaos Solitons Fractals*. 2017. Vol. 105. pp. 260–270.
3. Aliev E.T., Rozikov U.A., Dynamical systems of Möbius transformation: real, p-adic and complex variables. *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*. 2024. Vol. 16. No. 1. pp. 1–13.

UDK 517.977

The simple motion pursuit differential game with rigid segments

Ruzimuradova D.,Kh.[1], Abdullayev A.,Kh.[2]
[1] Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
drozimuradova@gmail.com
[2] Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
abduganiax@mail.ru

Pursuit-evasion differential games with constrained controls have been extensively studied within the framework of differential game theory and optimal control [1-3]. In this paper, we consider a planar pursuit differential game between two rigid segments with identical kinematics but unequal control capabilities and construct a stagewise strategy that guarantees capture in finite time. The game involves two players: a pursuer P and an evader E, moving in the two-dimensional Euclidean plane $\mathbb{R}^2$. Let $x^P(t), x^E(t) \in \mathbb{R}^2$ denote the midpoint positions of the corresponding segments, while $\theta^P(t), \theta^E(t) \in \mathbb{R}$ represent their respective orientation angles relative to the horizontal axis. Furthermore, let $2\ell > 0$ be the length of

the segments. The unit vectors orthogonal to the segments are denoted by $e^{\perp}(\theta^P)$ and $e^{\perp}(\theta^E)$, where $e^{\perp}(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

The motion of each segment is generated by the orthogonal velocities of its endpoints, which yields the following coupled translation-rotation dynamics for both players:

$$\begin{aligned} \dot{x}^P &= v^P e^{\perp}(\theta^P), \qquad & \dot{\theta}^P &= \frac{1}{\ell}\omega^P, \\ \dot{x}^E &= v^E e^{\perp}(\theta^E), \qquad & \dot{\theta}^E &= \frac{1}{\ell}\omega^E, \end{aligned} \tag{1}$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} x^P(t_0) &= x_1^P, \qquad & \theta^P(t_0) &= \theta_0^P, \\ x^E(t_0) &= x_1^E, \qquad & \theta^E(t_0) &= \theta_0^E. \end{aligned} \tag{2}$$

Here, the pairs of measurable functions $(v^P(\cdot), \omega^P(\cdot))$ and $(v^E(\cdot), \omega^E(\cdot))$ act as the translational and rotational control inputs for P and E, respectively. The admissible controls are subject to the following geometric bounds:

$$|v^P(t)| + |\omega^P(t)| \le \rho, \qquad |v^E(t)| + |\omega^E(t)| \le \sigma, \quad t \ge t_0, \tag{3}$$

where ρ and σ are given positive constants such that the pursuer has a control advantage, i.e., $\rho > \sigma > 0$.

Capture in the game (1)–(3) is said to occur if there exists a finite time $\tau > t_0$ such that the midpoints coincide: $x^P(\tau) = x^E(\tau)$. The pursuer aims to guarantee capture, whereas the evader seeks to prevent it, ensuring $x^P(t) \neq x^E(t)$ for all $t > t_0$.

Problem 1. Find an admissible pursuit strategy for the pursuer that guarantees capture in the game (1)–(3).

Capture strategy. We propose a constructive stagewise strategy depending only on the evader's position at the beginning of each stage. At each stage $n \ge 1$, the pursuer executes a two-phase time-optimal maneuver: a pure rotation followed by a pure translation.

Let $D_1 = \|x_1^P - x_1^E\|$ denote the initial Euclidean distance between the midpoints. At the first stage, the pursuer rotates through the minimal angle θ_1^P such that $e^{\perp}(\theta_0^P + \theta_1^P) \parallel (x_1^E - x_1^P)$, followed by a translation toward the point x_1^E. Let Δt_1 be the time required by the pursuer to complete this maneuver. Meanwhile, during this time interval Δt_1, the evader applies an arbitrary admissible control and reaches a new position x_2^E. At the end of the first stage, the pursuer reaches the position previously occupied by the evader, i.e., $x_2^P = x_1^E$.

This procedure is recursively applied. Let x_n^P and x_n^E denote the states at the beginning of the n-th stage, and let $D_n = \|x_n^E - x_{n-1}^E\|$ be the evader's displacement during the previous stage. At stage n, the pursuer rotates by a minimal angle θ_n^P satisfying

$$e^{\perp}\left(\sum_{j=0}^{n} \theta_j^P\right) \parallel (x_n^E - x_n^P).$$

Subsequent to the rotation, P performs a translation in the aligned direction toward the point x_n^E.

The following theorem establishes that the constructed strategy guarantees capture in finite time.

Theorem 1. In game (1)–(3), the pursuer, under the constructed strategy, guarantees capture within the time

$$T_0 = \frac{1}{\rho}(D_1 + \ell|\theta_1^P|) + \frac{1}{\rho - \sigma}(D_2 + \ell|\theta_2^P|).$$

Reference

1. **Isaacs R.** *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization.* New York: John Wiley and Sons. - 1965.

2. **Krasovskii N., Subbotin A.** *Game-Theoretical Control Problems.* New York: Springer. - 1988.

3. **Pontryagin L., Boltyanskii V., Gamkrelidze R., Mishchenko E.** *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* New York: Interscience Publishers. - 1962.

UDK 517.98-519.21

Ergodicity of p-adic $(1,2)$-rational dynamical systems on invariant spheres

Sattarov I. A.[1], Aliev E. T.[2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
sattarovi-a@yandex.ru
[2]Kimyo International University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
aliev-erkinjon@mail.ru

Let p be a fixed prime number. For a nonzero rational number $x \in \mathbb{Q}$, represented in the form

$$x = p^{\gamma}\frac{m}{n},$$

where $\gamma \in \mathbb{Z}$ and the integers m and n are not divisible by p, the p-adic norm is defined by

$$|x|_p = p^{-\gamma},$$

and $|0|_p = 0$. The completion of the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic norm $|\cdot|_p$ is called the field of p-adic numbers and is denoted by $\mathbb{Q}_p$. The p-adic norm satisfies the strong triangle inequality

$$|x+y|_p \le \max\{|x|_p, |y|_p\}, \qquad x, y \in \mathbb{Q}_p.$$

Therefore, $\mathbb{Q}_p$ is a complete non-Archimedean field. For $a \in \mathbb{Q}_p$ and $r > 0$, the closed p-adic ball with center at a and radius r is defined by

$$V_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x-a|_p \le r\},$$

whereas the p-adic sphere with center at a and radius r is defined by

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x-a|_p = r\}.$$

In this paper we consider the dynamical system generated by the function

$$f(x) = \frac{ax}{x^2+cx+a}, \qquad a \neq 0, \qquad a, c \in \mathbb{Q}_p, \tag{5}$$

where

$$x \neq \hat{x}_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4a}}{2}.$$

We are interested in the ergodicity properties of the dynamical system on each invariant sphere. Denote

$$\alpha = \min\{|\hat{x}_1|_p, |\hat{x}_2|_p\} \qquad \text{and} \qquad \beta = \max\{|\hat{x}_1|_p, |\hat{x}_2|_p\}.$$

Define the following set

$$I = \{r : \ 0 < r < \alpha\}.$$

Corollary 1. *The sphere $S_r(0)$ is invariant for f if and only if $r \in I$.*

Theorem 1. *For every closed ball $V_\rho(s) \subset S_r(0)$, $r \in I$, the following equality holds*

$$f(V_\rho(s)) = V_\rho(f(s)).$$

Theorem 2. *If $s \in S_r(0)$ for $r \in I$, $r \neq |c|_p$, then*

1. $|f^{n+1}(s) - f^n(s)|_p = \rho(r)$ *for any* $n \ge 1$.
2. $f(V_{\rho(r)}(s)) = V_{\rho(r)}(s)$.
3. *If $V_\theta(s) \subset S_r(0)$ is an invariant set for f, then $\theta \ge \rho(r)$.*

Consider the dynamical system (X, T, μ), where $T : X \to X$ is a measure-preserving transformation, and μ is a probability measure. The dynamical system is called *ergodic* if for every invariant set V we have $\mu(V) = 0$ or $\mu(V) = 1$.

We assume that the square root $\sqrt{c^2 - 4a}$ exists in $\mathbb{Q}_p$. For each $r \in I$, $r \neq |c|_p$, consider a measurable space $(S_r(0), \mathcal{B})$, where $\mathcal{B}$ is the algebra generated by closed subsets of $S_r(0)$. Every element of $\mathcal{B}$ is a union of some balls $V_\rho(d)$.

A measure $\bar{\mu} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ is said to be a *Haar measure* if it is defined by $\bar{\mu}(V_\rho(s)) = \rho$ for $s \in S_r(0)$ and $\rho \in p^{\mathbb{Z}}$ such that $V_\rho(s) \subset S_r(0)$.

Note that

$$S_r(a) = V_r(a) \setminus V_{r/p}(a).$$

So, we have

$$\bar{\mu}(S_r(0)) = r\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

We consider normalized (probability) Haar measure:

$$\mu(V_\rho(c)) = \frac{\bar{\mu}(V_\rho(c))}{\bar{\mu}(S_r(0))} = \frac{p\rho}{(p-1)r}.$$

By Theorem 1 we conclude that f preserves the measure μ, i.e.,

$$\mu(f(V_\rho(s))) = \mu(V_\rho(s)).$$

Theorem 3. *Let $r \in I$ and $r \neq |c|_p$. If $p \neq 2$, then the dynamical system $(S_r(0), f, \mu)$ is not ergodic.*

Theorem 4. *Let $p = 2$ and $r \in I$. Then the dynamical system $(S_r(0), f, \mu)$ is ergodic if and only if $|c|_2 = \beta$ and $r = \frac{\alpha}{2}$.*

Reference

1. **Aliev E.T., Sattarov I.A.** *p-adic $(1,2)$-rational dynamical systems with two fixed points on $\mathbb{C}_p$. Uzbek Mathematical Journal.* 2021. Vol. 65. No. 2. pp. 5–14.
2. **Rozikov U.A., Sattarov I.A.** *Dynamical system of the p-adic $(2,2)$-rational functions with two fixed points. Results in Mathematics.* 2020. Vol. 75. 100. pp. 1–37.

UDC 517.977

ON THE ATTAINABILITY DOMAIN OF PLAYERS WITH EXPONENTIAL GEOMETRIC CONSTRAINTS ON CONTROLS

Soyibboev U. B.[1], Nuriddinova F. T.[2]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
ulmasjonsoyibboev@gmail.com
[2]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
fotimanuriddinova0205@gmail.com

We consider a differential game of pursuit involving two players in $\mathbb{R}^n$: a pursuer P and an evader E. Their motions are governed by the linear differential equations

$$P: \quad \dot{x} = Ax + u, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E: \quad \dot{y} = Ay + v, \qquad y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $x, y \in \mathbb{R}^n$ denote the positions of P and E, respectively, A is a given real $n \times n$ matrix, and $x_0 \neq y_0$ are the players' initial positions.

The control functions $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$, belonging to P and E respectively, are assumed to be Lebesgue measurable mappings from $[0,+\infty)$ into $\mathbb{R}^n$, satisfying the exponential-type bounds

$$|u(t)| \le \alpha a^{-kt}, \qquad |v(t)| \le \beta a^{-kt} \qquad \text{(a.e. } t \ge 0), \tag{3}$$

where $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$, $k > 0$ are given parameters and $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$; the case $0 < a < 1$ (resp. $a > 1$) corresponds to a decreasing (resp. increasing) resource bound on the players' admissible speeds. We denote by $\mathbb{U}_{exp}$ and $\mathbb{V}_{exp}$ the sets of all such admissible controls for P and E.

For any $u(\cdot) \in \mathbb{U}_{exp}$, $v(\cdot) \in \mathbb{V}_{exp}$, the corresponding trajectories admit the representation

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}u(s)\,ds, \qquad y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}v(s)\,ds. \tag{4}$$

We introduce the following notation:

$$z(t) = x(t) - y(t), \qquad z_0 = x_0 - y_0.$$

The pursuer P aims to achieve $x(T) = y(T)$ at some finite time $T > 0$ (capture), while the evader E seeks either to maintain $x(t) \ne y(t)$ for all $t \ge 0$, or, if this is not possible, to delay the capture time T as long as possible.

Definition 1. *For $\alpha \ge \beta$, we call the function*

$$\mathbf{u}(z_0, v, t) = v - \delta(z_0, v, t)\zeta_0(t) \tag{5}$$

the Π*-strategy of the pursuer, where* $\zeta_0(t) = \frac{e^{At}z_0}{\|e^{At}z_0\|}$, $z_0 = x_0 - y_0$,

$$\delta(z_0, v, t) = \langle v, \zeta_0(t)\rangle + \sqrt{\langle v, \zeta_0(t)\rangle^2 + \alpha^2 - |v|^2},$$

and $\langle v, \zeta_0(t)\rangle$ implies the scalar product of the vectors v and $\zeta_0(t)$ in $\mathbb{R}^n$, and $\|\cdot\|$ means the Euclidean norm in $\mathbb{R}^n$.

In the present work, we investigate the attainability domain of the pursuer P — that is, the set of all positions P can reach at a given time T under the admissible controls $\mathbb{U}_{exp}$ — and establish its explicit description.

In accordance with Theorem 1 [1], if $\alpha > \beta$, then, by means of the Π-strategy (5), the pursuer P captures the evader E at some point of $\mathbb{R}^n$ no later than

$$T = \frac{1}{\|A\| + k\ln a} \ln\Big(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta - |z_0|\big(\|A\| + k\ln a\big)}\Big).$$

. For the case $\alpha > \beta$, we now construct the set of possible meeting points of the players.

Let the pairs $(x_0, \mathbf{u}(z_0, v(\cdot), t)) \in \mathbb{U}_{exp}$ and $(y_0, v(\cdot)) \in \mathbb{V}_{exp}$ generate, respectively, the trajectories of the pursuer P and the evader E according to (4), for $t \in [0, t^*]$, where $0 < t^* < T$ denotes the instant at which the players meet, i.e., $x(t^*) = y(t^*)$. For each pair $(x(t), y(t))$ we associate the set

$$W(t) = W(x(t), y(t)) = \{\omega : |\omega - x(t)| \ge (\alpha/\beta)|\omega - y(t)|\}, \qquad t \in [0, t^*]. \tag{6}$$

In particular, at $t = 0$,

$$W(0) = W(x_0, y_0) = \{\omega : |\omega - x_0| \ge (\alpha/\beta)|\omega - y_0|\}.$$

Since $|z(t)| \ge 0$ throughout $[0, t^*]$, the inclusion $y(t) \in W(t)$ clearly holds on this interval.

Lemma 1. The multi-valued mapping $W(t)$ admits the representation

$$W(t) = x(t) + \Lambda(t, v(\cdot))\,[W(0) - x_0], \tag{7}$$

where $\Lambda(t, v(\cdot))$ is the convergence function defined by (5), and $W(0) = x_0 - C(z_0) + R(z_0)S$,

$$C(z_0) = \frac{\alpha^2 z_0}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad R(z_0) = \frac{\alpha\beta|z_0|}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \Lambda(t, v(\cdot)) = 1 - \frac{1}{|z_0|}\int_0^t \delta(z_0, v(s), s)\,ds \tag{8}$$

with S the unit ball centered at the origin of $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2. (Main lemma). The set-valued mapping

$$W^*(t) = W(t) - e^{At}x_0 + \int_0^t \mathbf{u}(z_0, v(s), s)\, ds - \big(e^{At} + \int_0^t \frac{\delta(z_0, v(s), s)}{|z_0|}\, ds\big)\big(R(z_0)S - C(z_0)\big)$$

is monotone nonincreasing on $[0, t^*]$ with respect to set inclusion; that is, for any $t_1, t_2 \in [0, t^*]$ with $t_1 < t_2$,

$$W^*(t_2) \subset W^*(t_1)$$

Corollary 2. As a consequence of the main lemma, the inclusion

$$W(t) \subset W(0) - x_0(1 + e^{At}) - \int_0^t \mathbf{u}(z_0, v(s), s)\, ds - \big(1 - e^{At} + \int_0^t \frac{\delta(z_0, v(s), s)}{|z_0|}\, ds\big)\big(R(z_0)S - C(z_0)\big)$$

holds for every $t \in [0, t^*]$.

Lemma 3. For every $t \in [0, t^*]$, the inclusion

$$y(t) \in W(0) - x_0(1 + e^{At}) - \int_0^t \mathbf{u}(z_0, v(s), s)\, ds - \big(1 - e^{At} + \int_0^t \frac{\delta(z_0, v(s), s)}{|z_0|}\, ds\big)\big(R(z_0)S - C(z_0)\big), \quad (9)$$

is valid.

Based on (9), we now solve the "Lifeline"game in favor of the pursuer P by introducing the set

$$W_P = \bigcup_{t=0}^{T} \Big\{W(0) - x_0(1 + e^{At}) - \int_0^t \mathbf{u}(z_0, v(s), s)\, ds - \big(1 - e^{At} + \int_0^t \frac{\delta(z_0, v(s), s)}{|z_0|}\, ds\big)\big(R(z_0)S - C(z_0)\big)\Big\},$$

which is readily seen to be convex and closed, where T is a guaranteed pursuit time (cf. Theorem 1 [1]). We refer to W_P as the attainability domain of the pursuer P.

Definition 2. The Π-strategy (5) is said to guarantee capture for the pursuer P in the "Lifeline"game on $[0, T]$ if there exists some $t^* \in [0, T]$ for which the following two conditions hold: (a) $x(t^*) = y(t^*)$; (b) $y(s) \notin M$ for all $s \in [0, t^*]$.

Theorem 1. Suppose the attainability domain W_P of the pursuer P and the set M have empty intersection, i.e., $W_P \cap M = \emptyset$, in the "Lifeline"game. Then the Π-strategy (5) guarantees capture for the pursuer P.

We next describe a solution of the "Lifeline"game in favor of the evader E.

Definition 3. A control $v^*(\cdot) \in \mathbb{V}_{exp}$ is called a winning control for the evader in the "Lifeline"game if, whatever control $u(\cdot) \in \mathbb{U}_{exp}$ the pursuer chooses, at least one of the following holds:

a) there exists a finite instant τ such that $y(\tau) \in M$ while $x(t) \neq y(t)$ for all $t \in [0, \tau]$;

b) $x(t) \neq y(t)$ holds for every $t \geq 0$.

Introduce the set

$$W_E = \left\{\omega^* :\ \omega^* = \frac{\beta\, e^{At}\big(I - e^{-(A + kI\ln a)t}\big)}{A + kI\ln a}\omega, \quad \omega \in W(0)\right\}$$

which we call the attainability domain of the evader E.

Theorem 2. If the attainability domain W_E of the evader meets the set M, that is, $W_E \cap M \neq \emptyset$ in the "Lifeline"game, then the evader E, using the control

$$v^* = \beta\, \frac{\omega^* - y_0}{|\omega^* - y_0|} a^{-kt}, \qquad \omega^* \in W_E \cap M, \quad (10)$$

succeeds in reaching the set M without being captured by the pursuer P.

Remark 2. Comparing the attainability domains W_P of the pursuer and W_E of the evader defined above, one readily verifies that the inclusion $W_E \subset W_P$ holds in the "Lifeline"game.

REFERENCES

1. **Soyibboev U.B., Solijonova R.R., Nuriddinova F.T.** *Linear differential pursuit-evasion problem of players with exponential constraints on controls.* // Actual problems of algebra, analysis, topology and computational mathematics: Abstracts of the international scientific conference (May 30–31, 2025, Tashkent, Uzbekistan). - Tashkent, 2025. - P. 203–205.
2. **Samatov B.T., Soyibboev U.B.** *Differential game with a lifeline for the inertial movements of players* // Ural Mathematical Journal. - 2021. - Vol. 7, No. 2. - P. 94–109.
3. **Isaacs R.** *Differential Games.* New York: John Wiley and Sons, 1965.

UDC 517.98

ON DYNAMICS AND PERIODIC STRUCTURE OF $(2,2)$-RATIONAL MAPPINGS OVER $\mathbb{Q}_2$

Yusupbaeva Kh. E.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
khilolayusupbayeva@gmail.com

In this paper we consider the following $(2,2)$-rational mapping over $\mathbb{Q}_2$

$$f_{a,b}(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}. \tag{1}$$

In this work, we restrict our attention to $(2,2)$-rational functions that are not of Ising type. Accordingly, we assume throughout that

$$a(a-1)b(a+b+1)(a-b+1)(b^2-4a)\neq 0.$$

Let us define the following sets:

$$\mathrm{Fix}(f_{a,b})=\{x\in\mathbb{Q}_2 : f_{a,b}(x)=x\},$$

$$\mathrm{Per}_2(f_{a,b})=\left\{x\in\mathbb{Q}_2 : f_{a,b}^2(x)=x\right\}\setminus \mathrm{Fix}(f_{a,b}),$$

which are called the set of all fixed points and the set of all 2-periodic points of the function $f_{a,b}$, respectively.

We introduce the set

$$\mathcal{P}(f_{a,b})=\left\{x\in\mathbb{Q}_2 : \exists\, n\geq 0 \text{ s.t. } \left(f_{a,b}^n(x)\right)^2+bf_{a,b}^n(x)+a=0\right\},$$

which will be referred to as the set of bad points of the map $f_{a,b}$.

We note that $\mathcal{P}(f_{a,b})\neq\emptyset$ if and only if $\sqrt{b^2-4a}\in\mathbb{Q}_2$. Whenever this condition holds, we define

$$\hat{x}_{\pm}:=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2}.$$

Proposition 1. Let $f_{a,b}$ be a $(2,2)$-rational function defined by (1). Then

$$\mathrm{Fix}(f_{a,b})=\begin{cases}\{x_0,x_-,x_+\}, & \text{if } b-a\in\bigcup\limits_{i=1}^{5}A_i,\\ \{x_0\}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Here A_1,A_2,A_3,A_4 are defined in (2), and $A_5=\mathbb{Q}_2\setminus\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{cases}A_1=45+128\mathbb{Z}_2,\\ A_2=\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+2^2+2^3+\cdots+2^{2n+3}+2^{2n+5}+2^{2n+6}+2^{2n+7}\mathbb{Z}_2\right),\\ A_3=81+128\mathbb{Z}_2,\\ A_4=\bigsqcup\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+2^{2n+2}+2^{2n+5}\mathbb{Z}_2\right).\end{cases} \tag{2}$$

Proposition 2. Let $f_{a,b}$ be a $(2,2)$-rational function defined by (1). Then

$$\mathrm{Per}_2(f_{a,b}) = \begin{cases} \{x^-, x^+\}, & \text{if } \dfrac{b-1}{a} \in \bigcup\limits_{i=1}^{5} A_i, \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Here A_1, A_2, A_3, A_4 are defined in (2), and $A_5 = \mathbb{Q}_2 \setminus \mathbb{Z}_2$.

In this paper, we investigate the dynamical properties of the function $f_{a,b}$ in the case where $|a|_2 > |b|_2$ and $|a|_2 \neq 1$.

Remark 1. In case where $|a|_2 > 1$, by $|b|_2 < |a|_2$ we have

$$|b-a|_2 > 1 \quad \text{and} \quad \left|\frac{b-1}{a}\right|_2 < 1.$$

Therefore, by Propositions (1) and (2), the function $f_{a,b}$ has exactly three fixed points and no two-periodic points. More precisely,

$$\mathrm{Fix}(f_{a,b}) = \{x_0, x_+, x_-\}, \qquad \mathrm{Per}_2(f_{a,b}) = \emptyset.$$

Theorem 1. Let $|a|_2 > \max\{|b|_2, 1\}$. Then for the initial point $x \in \mathbb{Q}_2$ it holds

$$\omega_{f_{a,b}}(x) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{if } x \in \mathbb{Z}_2^*, \\ \{x_-\}, & \text{if } x \in 2\mathbb{Z}_2^*, \\ \{x_+\}, & \text{if } x \in \mathbb{Q}_2 \setminus (\mathbb{Z}_2 \cup \mathcal{P}(f_{a,b})). \end{cases}$$

Moreover, $\mathcal{P}(f_{a,b})$ is finite.

Remark 2. In case $|a|_2 < 1$, by $|b|_2 < |a|_2$ we have

$$|b-a|_2 < 1 \quad \text{and} \quad \left|\frac{b-1}{a}\right|_2 > 1.$$

By Propositions 1 and 2, it follows that

$$\mathrm{Fix}(f_{a,b}) = \{x_0\}, \qquad \mathrm{Per}_2(f_{a,b}) = \{x^+, x^-\}.$$

Moreover,

$$\left|x^+\right|_2 = \frac{1}{|a|_2}, \quad \left|x^-\right|_2 = |a|_2$$

Theorem 2. Let $|b|_2 < |a|_2 < 1$. Then for the initial point $x \in \mathbb{Q}_2$ it holds

$$\omega_{f_{a,b}}(x) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{if } x \in \mathbb{Z}_2^*, \\ \{x^+, x^-\}, & \text{if } x \in \mathbb{Q}_2 \setminus (\mathbb{Z}_2^* \cup \mathcal{P}(f_{a,b})). \end{cases}$$

Moreover, $\mathcal{P}(f_{a,b})$ is finite.

Literature

1. **Rozikov U.A., Sattarov I.A.** *On a topological dynamics of* $(2,1)$*-rational p-adic mappings. p*-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. - 2014. - Vol. 6, No. 3. - P. 210-222.

2. **Yusupbaeva Kh.E.** *Asymptotic dynamics of* $(2,2)$*-rational mapping over* $\mathbb{Q}_2$. -International conference mathematical analysis and dynamical systems.- May 20-21,2026.- Tashkent.- P. 238-239.

3. **Kh. Yusupbaeva, O. Khakimov.** *On dynamics of the Ising mapping over* $\mathbb{Q}_2$. Bulletin of the Institute of Mathematics.-2024.-7(4).-P. 76–86.

UDK 517.938

ON THE COMPLETE DYNAMICS OF A TWO-PARAMETER SYSTEM OF RATIONAL MAPPINGS WITH $0 < a < 1$, $b > 1$

Zoyidov A. N.[1]
[1]Kimyo International University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
a.zoyidov@kiut.uz

Introduction. The iterative dynamics of quadratic-rational mappings is a central object of study in the theory of discrete dynamical systems. Systems of two coupled quadratic-rational recursions of the type considered below arise naturally as *boundary laws* in the construction of Gibbs measures for statistical-mechanical models (Potts, SOS, and related models) defined on the Cayley tree [1]. Consequently, a full description of the fixed points of such mappings, together with their number, stability, and the global (not merely local) behaviour of orbits, is of both theoretical and applied interest.

In this note we describe completely the dynamics generated by the system

$$z = \frac{(a+1)t^2+1}{2t^2+a}, \qquad t = \frac{(b^2+1)z^2+b}{2bz^2+1}, \tag{1}$$

where the parameters satisfy $0 < a < 1$, $b > 1$. The first equation of (1) defines a function $z = f(t)$, the second a function $t = g(z)$. Their composition

$$\Phi(t) = g(f(t))$$

is a one-dimensional map $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, and the iterative dynamics of (1) is completely equivalent to the one-dimensional dynamical system $t_{n+1} = \Phi(t_n)$, $z_n = f(t_n)$.

Main results. Write $f(t) = F(t^2)$, $g(z) = G(z^2)$, where

$$F(u) = \frac{(a+1)u+1}{2u+a}, \qquad G(v) = \frac{(b^2+1)v+b}{2bv+1}, \qquad u, v \geq 0,$$

$$F'(u) = \frac{(a+2)(a-1)}{(2u+a)^2}, \qquad G'(v) = \frac{1-b^2}{(2bv+1)^2}.$$

Lemma 1. *For every $0 < a < 1$ and $b > 1$ the function F is strictly decreasing on $[0, \infty)$, with $F(0) = \frac{1}{a}$ and $F(u) \to \frac{a+1}{2}$ as $u \to \infty$; the function G is strictly decreasing on $[0, \infty)$, with $G(0) = b$ and $G(v) \to \frac{b^2+1}{2b}$ as $v \to \infty$.*

Consequently, for every real t, $f(t) \in J_a := \left(\frac{a+1}{2}, \frac{1}{a}\right]$, and for every real z, $g(z) \in K_b := \left(\frac{b^2+1}{2b}, b\right] \subset (1, \infty)$.

Theorem 1. *For every real t, $\Phi(t) = g(f(t)) \in K_b$; hence K_b is forward invariant: $\Phi(K_b) \subseteq K_b$. Moreover Φ is strictly increasing on $(0, \infty)$, strictly decreasing on $(-\infty, 0)$, and even: $\Phi(-t) = \Phi(t)$.*

Theorem 2. *For every pair of parameters $0 < a < 1$, $b > 1$:*

(i) *Φ possesses a unique fixed point $t^* = t^*(a, b) \in K_b$;*

(ii) *t^* is globally asymptotically stable: for every initial value $t_0 \in \mathbb{R}$ the orbit $\{t_n\} = \{\Phi^n(t_0)\}$ enters K_b after one step and then converges monotonically to t^*;*

(iii) *the convergence rate is governed by $0 < \Phi'(t^*) < 1$, so the map has no periodic orbits of period ≥ 2 and no chaotic behaviour anywhere in the domain $0 < a < 1$, $b > 1$: the dynamics is globally regular for all admissible parameter values.*

Remark 1. The map f alone always fixes $t = 1$: $f(1) = \frac{a+2}{a+2} = 1$, with $f'(1) = \frac{2(a-1)}{a+2}$, so $|f'(1)| = \frac{2(1-a)}{a+2} < 1$ for all $a \in (0, 1)$ – an attracting fixed point of f. However $g(1) = 1 + \frac{b(b-1)}{2b+1} > 1$ for $b > 1$, so the pair $(z, t) = (1, 1)$ is *not* a fixed point of the full system (1); the true fixed point t^* given by Theorem 2 always satisfies $t^* > 1$ and lies strictly inside K_b.

Remark 2. As $b \to 1^+$, the interval K_b collapses to the single point $\{1\}$, so $t^* \to 1$ and $\Phi'(t^*) \to 0$ (a super-stable degenerate limit). As $b \to \infty$ with a fixed, $f(t) \to \frac{a+1}{2}$ for large t, hence $t^* \sim g\left(\frac{a+1}{2}\right) \sim \frac{b}{2}$; the parameter a has a comparatively mild, monotone effect on t^*.

Example. For $a = 0.5$ the fixed point t^* and the local contraction rate $\Phi'(t^*)$ computed for several values of b are:

b	1.5	2	3	5	10
t^*	1.1983	1.4312	1.9270	2.9349	5.4439
$\Phi'(t^*)$	0.0469	0.0525	0.0388	0.0171	0.0036

In particular, for $a = 0.5,\ b = 2$, starting from $t_0 = 1.25$ the orbit

$$t_0 = 1.2500,\quad t_1 = 1.4204,\quad t_2 = 1.4306,\quad t_3 = 1.4312,\quad t_4 = 1.4314,\ \ldots$$

increases monotonically to $t^* \approx 1.4312$, confirming Theorem 2 numerically; in all cases tested across the full range $0 < a < 1,\ b > 1$ the same qualitative picture (a unique, monotonically and rapidly attracting fixed point) was observed.

Conclusion. For every $0 < a < 1$, $b > 1$ the map $\Phi = g \circ f$ generated by system (1) has a completely regular global dynamics: a unique fixed point $t^*(a, b) \in K_b$, globally and monotonically attracting, with no periodic orbits of period ≥ 2 and no chaos anywhere in the parameter domain. The dependence of t^* on the parameters is smooth, with the explicit limiting behaviour $t^* \to 1$ as $b \to 1^+$ and $t^* \sim b/2$ as $b \to \infty$. Since systems of type (1) occur as boundary laws for models on the Cayley tree, these results describe the (unique, non-periodic) structure of the corresponding translation-invariant Gibbs measures.

Literature

1. **Rozikov U.A.** *Gibbs measures on Cayley trees.* Singapore: World Scientific. - 2013.
2. **Devaney R.L.** *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd ed.* Addison-Wesley. - 1989.
3. **Elaydi S.** *Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering, 2nd ed.* Chapman & Hall/CRC. - 2007.

UDK 517.911.5

Теорема единственности для уравнений Пфаффа удовлетворяющими условию Нагумо

Бегалиев А.О.[1],Маматова Х.Н.[2],Рамазанов У.А.[3]
[1,2,3]Термезский университет экономики и сервиса, Термез, Узбекистан
azizuzmu@mail.ru

Объектом нашего рассмотрения является уравнение Пфаффа, имеющее вид

$$a_0(x,u)\,du + a_1(x,u)\,dx_1 + \cdots + a_n(x,u)\,dx_n = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $(x,u) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $a_k(x,u) \in C^1(D)$, $k = \overline{0,n}$. Уравнение (1) связывает переменные $u, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их дифференциалы.

Если хотя бы один из коэффициентов $a_0(x,u), a_1(x,u), \ldots a_n(x,u)$ не равен 0 в каждой точке (x,u), то уравнение (1) можно привести к нормальной форме. Для конкретности, $a_0(x,u) \neq 0$ в заданной точке $(x^0, u^0) \in D$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Поэтому (1) можно переписать в виде

$$du = -\frac{a_1(x,u)}{a_0(x,u)}dx_1 - \frac{a_2(x,u)}{a_0(x,u)}dx_2 - \cdots - \frac{a_n(x,u)}{a_0(x,u)}dx_n \tag{2}$$

Из математического анализа известно, что дифференциал для произвольной функции $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно записать следуюшим образом

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n \tag{3}$$

В результате из (2), (3) и единсвенности дифференциала получаем систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f_1(x,u),\ \ \frac{\partial u}{\partial x_2} = f_2(x,u),\ \ \ldots,\ \ \frac{\partial u}{\partial x_n} = f_n(x,u),$$

или в векторной записи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,u), \tag{4}$$

где $\frac{\partial u}{\partial x} = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_j(x,u) = -\frac{a_j(x,u)}{a_0(x,u)}$, $j = \overline{1,n}$.

Итак, пусть функции f_k непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $k = 1,2,\dots,n$, и $(x^0,u^0) \in D$. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,u), u(x^0) = u^0. \tag{5}$$

Задача о единственности решения задачи Коши для ОДУ хорошо изучена (см. статью [1] и список литературы в ней). Здесь приведем аналог теоремы Нагумо [2].

Теорема 1. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ непрерывные функции окрестности точки (x^0,u^0) и для любых $(x,\nu),(x,\omega) \in D$, $\nu \neq \omega$, имеет место неравенство

$$\left|\langle x - x^0,\ f(x,\nu) - f(x,\omega)\rangle\right| < |\nu - \omega|.$$

Тогда задача Коши (5) имеет единственное решение ($\langle\cdot\,,\cdot\rangle-$ скалярное произведение).

Литература

1. **Araújo J. A. C.** *On uniqueness criteria for systems of ordinary differential equations.* J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 281. P. 264–275.
2. **Mejstrik T.** *Some remarks on Nagumo's theorem.* Czechoslovak Mathematical Journal. 2012. Vol. 62. P. 235–242.

УДК 517.938

БИФУРКАЦИЯ ЦИКЛОВ В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С КОМБИНИРОВАННЫМИ ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Кунгиров М. Н.
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, г. Самарканд, Узбекистан;
e-mail: mamur.qongirov@mail.ru

Рассматривается зависящая от малого параметра $\alpha > 0$ двумерная автономная динамическая система дифференциальных уравнений вида

$$x' = B_0x + \alpha\big(B_1x + b_p(x) + c_q(x)\big), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где B_0, B_1 — постоянные вещественные матрицы порядка 2, а вектор-функции $b_p(x)$ и $c_q(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными полиномами нечетной ($p \geqslant 3$) и четной ($q \geqslant 2$) степеней соответственно [1, 2].

Для исследования предельных циклов, ответвляющихся от контура Γ_0 при $\alpha \to 0$, применяется метод оператора сдвига по траекториям и строится соответствующая усредненная функция отображения Пуанкаре [1]:

$$F(u) = \frac{1}{T_0}\int e^{-B_0t}\left[B_1e^{B_0t}u + b_p\big(e^{B_0t}u\big) + c_q\big(e^{B_0t}u\big)\right]dt, \qquad u \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

В теории бифуркаций известно, что если значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации циклов системы (1), ответвляющихся от траектории Γ_0, то любой вектор $u_0 \in \Gamma_0$ обязательно должен являться точкой равновесия усредненной системы, то есть удовлетворять необходимому условию $F(u_0) = 0$ [1]. При этом четная степень q в первом приближении метода усреднения полностью исчезает и не влияет на условия рождения цикла.

Литература

1. Юмагулов М. Г., Кунгиров М. Н. У. Бифуркации периодических колебаний в динамических системах с однородными нелинейностями // Уфимский математический журнал. — 2025. — Т. 17. — № 4. — С. 144–159.
2. Kungirov M. N. Bifurcation of periodic oscillations arising from a closed phase curve in systems with odd nonlinearities // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, No. 6. P. 2739–2745.

УДК 517.977

К решению задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания

Мамадалиев Н. А.[1,2], Васиева Х. Г.[3]

[1] Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
[2] Институт математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; numanjon.mamadaliyev59@gmail.com
[3] Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан; vasiyeva98@gmail.com

Постановка задачи. Пусть движение конфликтно управляемого объекта в конечномерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ описывается следующей системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, содержащей неизвестную функцию и ее производные в различные моменты времени [1]:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$; $A, B-$ постоянные прямоугольные матрицы порядка $d \times d,\ d \times d$, $C,\ D,-$ постоянные матрицы размерности которых $d \times m,\ d \times l$, соответственно; $h-$ фиксированное положительное действительное число, величина запаздывания; $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1,\ v(t) \in \mathbb{R}^l$, $l \geq 1,-$ управления преследующего и управляющего игроков, соответственно. Управления $u(t)$ и $v(t)$ выбираются из класса $L_{p[0,+\infty)}$, $p > 1$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|u(\cdot)\| = \Big(\int\limits_0^{+\infty} \mid u(t) \mid^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \rho, \quad \|v(\cdot)\| = \Big(\int\limits_0^{+\infty} \mid v(t) \mid^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \sigma, \tag{2}$$

где $\rho > 0$ и $\sigma \geq 0-$ константы.

Определение 1. *Произвольные измеримые функции $u = u(t), 0 \leq t < +\infty, v = v(t),\ 0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям вида (2) назовем допустимыми управлениями преследующего и убегающего игроков, соответственно.*

Кроме конфликтно - управляемого процесса (1) в пространстве $\mathbb{R}^d$ выделено непустое терминальное множество M, имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0- линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^d,\ M_1-$ выпуклое компактное подмножество из подпространства $L-$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^d$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^d$).

Начальным положением для конфликтно - управляемого процесса (1) является $d-$ мерная абсолютно непрерывная функция $f(t) \in X$, определенная на отрезке $[-h, 0]$, т.е. где

$$X = \Big\{ f(\cdot) : z(t) = f(t),\ t \in [-h, 0],\ z(0) = f(0) \in \mathbb{R}^d \setminus M \Big\}. \tag{3}$$

Преследование начинается в момент $t = 0$ из начального положения $f(\cdot) \in X$ и считается законченным в момент времени $t = t^\star[f(\cdot)]$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество M : т.е. имеет место включение $z(t^\star) \in M$. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Целью настоящей работы является получение некоторых достаточных условий при выполнении которых для данного начального положения $f(\cdot) \in X$, из которых в игре (1)-(2) гарантируется возможности завершение преследования за конечное время T.

Пусть допустимые управления $u = u(t)$, $v = v(t)$ выбраны на отрезке $[0, t]$, $t > 0$. Тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии (3) в силу формулы Коши имеет место следующее представление [1]

$$z(t) = K(t)f(0) + \int_{-h}^{0} K(t - r - h)Bf(r)dr - \int_{0}^{t} K(t - r)\Big[Cu(r) - Dv(r)\Big]dr, \tag{4}$$

где $K(t)$, $0 < t \leq \tau$, – единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами [1]: а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}-$ нулевая матрица порядка $d \times d$; b) $K(0) = E$, где $E-$ единичная матрица порядка $d \times d$; в) элементы матрицы $K(t), 0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ при $t > 0$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t - h). \tag{5}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а)-г), могут быть доказаны обычным методом последовательного интегрирования уравнения (5).

Перечисленными выше данными описана дифференциальная игра двух лиц (1)-(2), в которой принимает участие один преследователь, имеющая в своем распоряжении которой вектор управления u и преследуемый (убегающий) игрок, в распоряжении которого вектор управления v. Рассмотрим для дифференциальной игры (1)-(2) задачу преследования.

Определение 2. *Назовем предысторией управления убегающего игрока в момент* t, $t \geq 0$, *функцию* $v_t(\cdot) = \Big\{v(r) : 0 \leq r \leq t, \int_{0}^{+\infty} \mid v(r) \mid^p dr \leq \sigma^p\Big\}$, $v(r)$ – измерима.

Мы будем полагать, что в каждый момент времени t, $t \geq 0$, преследователь располагает информацией о начальном положении $f(\cdot) \in X$, и о предыстории управления убегающего игрока $v_t(\cdot)$ [2].

Определение 3. *Будем говорить, что траектория конфликтно-управляемого процесса (1)-(2) из начального положения* $f(\cdot) \in X$ *может быть приведена на терминальное множество* M *в момент времени* $T = T(f(\cdot))$, $0 \leq T < +\infty$, *если по любой допустимой функции* $v = v(t)$, $0 \leq t \leq T$, *можно построить такую допустимую функцию* $u(t) = u(t, f(\cdot), v_t(\cdot))$, $0 \leq t \leq T$, *что абсолютно непрерывное решение* $z(t)$, $0 \leq t \leq T$, *задачи Коши*

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - h) - Cu(t, f(\cdot), v_t(\cdot)) + Dv(t),$$

с учетом начального условия (3), попадает на терминальное множество M *за время, не превосходящее числа* $T = T(f(\cdot))$, *т.е. имеет место включению* $z(t^\star)$ *при некотором* $t = t^\star \in [0, T]$.

Число $T(f(\cdot))$ называется гарантированным временем преследования из точки $f(\cdot) \in X$, функция $u(t, f(\cdot), v_t(\cdot))$, $0 \leq t \leq T$, $v \in \mathbb{R}^l$, – функцией преследования.

Вспомогательные конструкции. Пусть $\tau-$ положительное число и $t \in [0, \tau]$. Через $\pi-$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^d$ на L, т.е. $\pi : \mathbb{R}^d \to L$. Рассмотрим линейные отображения $\pi K(t)C\mathbb{R}^m \to L$, $\pi K(t)D\mathbb{R}^l \to L$, когда $t \geq 0$.

Предположение 1. *Для всех* $t \in [0, \tau]$ *имеет место включение* $\pi K(t)C\mathbb{R}^m \supset \pi K(t)D\mathbb{R}^l$. *Тогда существует отображение* $G(\tau, t) : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ *такое, что* $\pi K(t)CG(\tau, t) = \pi K(t)D$ *на отрезке* $[0, \tau]$, *в случае, когда несколько отображений* $G(\tau, t)$ *удовлетворяют условию* $\pi K(t)CG(\tau, t) = \pi K(t)D$, *выбирается произвольное из них.*

Обозначим через $G_{ij}(\tau, t)$ элементы матрицы, соответствующей отображению $G(\tau, t)$, относительно канонических базисов в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^l$; функции $G_{ij}(\tau, t)$, $0 \leq t \leq \tau$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, l$, считаются из пространства $L_{p[0,+\infty)}$, $p > 1$.

В силу предположения 1 получаем $\pi K(t)CG(\tau, t)w = \pi K(t)Dw$ для всех $t \in [0, \tau]$ и $w \in \mathbb{R}^l$.

С помощью непрерывной матрицы $G(\tau, t)$, построим функцию [3]

$$\chi^p(t) = \sup\Big\{\int_{0}^{t} \mid G(t, t - \tau)w(\tau) \mid^p d\tau : \int_{0}^{t} \mid w(\tau) \mid^p d\tau \leq 1\Big\},$$

где $w(\cdot)-$ произвольная функция из пространства $L_{p[0,+\infty)}$ с указанным ограничением.

С помощью функции $\chi^p(t)$ определим величину [3] $\mu^p = \sup_{0\le t<+\infty}\chi^p(t)$, ясно, что $\mu^p > 0$.

Предположение 2. *Имеет место неравенство* $\rho^p > \sigma^p\mu^p$.

Если выполнено предположение 2, то очевидно, что μ не может равнятся $+\infty$.

Введем следующие обозначения. Через γ обозначим константу $\rho^p - \sigma^p\mu^p$, а через $R(\tau,t,v,\alpha)$ обозначим функцию

$$\Big[\mid G(\tau,\tau-t)v\mid^p + \alpha\cdot\gamma\cdot\mid \xi[\tau,f(\cdot)]\mid^{-1}\Big]^{1/p},$$

где $(\tau,t)\in\Delta=\{(\tau,t): 0\le t\le\tau<+\infty\}$, $v\in\mathbb{R}^l$, $\alpha\ge 0$, $u\in S$, $S-m-$ мерный замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^m$ с центром в нуле. Через $\hat{w}(\tau,t,u,v,\alpha)-$ обозначим множество вида

$$R(\tau,t,v,\alpha)\pi K(\tau-t)Cu - \pi K(\tau-t)Dv,$$

а через $W(\tau,t,S,v,\alpha)-$ множество

$$R(\tau,t,v,\alpha)\pi K(\tau-t)CS - \pi K(\tau-t)Dv,$$

где $W(\tau,t,S,v,\alpha)=\{\hat{w}(\tau,t,u,v,\alpha): u\in S\}$. Легко убедится, что $0\in W(\tau,t,u,v,\alpha)$ для всех $t\in[0,\tau]$, $v\in\mathbb{R}^l$, $\alpha\ge 0$ (см.[3], лемма 1).

$$\xi[t,f(\cdot),\tilde{w}(\tau,.)] = K(t)f(0) + \int_{-h}^{0} K(\tau-t-h)Bf(t)dt + \int_{0}^{t}\tilde{w}(\tau,t)dt,$$

$$\eta[\tau,f(\cdot),\tilde{w}(\tau,\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[\tau,f(\cdot),\tilde{w}(\tau,\cdot)]}{|\xi[\tau,f(\cdot),\tilde{w}(\tau,\cdot)]|} & \text{при } \xi[\tau,f(\cdot),\tilde{w}(\tau,\cdot)]\neq 0,\\ \eta^0 & \text{при } \xi[\tau,f(\cdot),\tilde{w}(\tau,\cdot)]= 0.\end{cases}$$

Введем в рассмотрение многозначное отображение вида

$$\mathfrak{J}(t,\tau,v,f(\cdot)) = \Big\{\alpha\ge 0 : W(\tau,t,S,v,\alpha)\bigcap\alpha\Big(M_1 - \eta\Big[\tau,f(\cdot),\tilde{w}(\tau,\cdot)\Big]\Big)\neq\emptyset\Big\}. \tag{6}$$

Предположение 3. *Для некоторого начального положения* $f(\cdot)\in X$ *многозначное отображение* $\mathfrak{J}(\tau,t,v,f(\cdot))$ *принимает непустые значения на множестве* $\Delta\times\mathbb{R}^l$.

Теорема. Пусть выполнены предположения 1-3, на параметры игры (1)-(2), множество $T(f(\cdot),\tilde{w}(\tau,\cdot))$ не пусто и $T\in T(f(\cdot),\tilde{w}(\tau,\cdot))$. Тогда траектория процесса (1)-(2) из начального положения $f(\cdot)\in X$ может быть переведена на терминальное множество M в конечный момент времени T.

Литература

1. **Беллман Р.,Кук К.** *Дифференциально-разностные уравнения.* М.: Наука.-1967.- 548 с.

2. **Чикрий А.А.** *Конфликтно управляемые процессы.* Киев: Наукова думка.-1992.- 384 с.

3. **Саматов Б.А.** *Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления.* Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". Киев. N.4. - 2013. С. 16–32.

УДК 517.923+517.925.54

О ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА НА ПОЛУОСИ

Маматов А.Э.
Toshkent axborot texnologiyalar universiteti, Uzbekiston
aemamatov@mail.ru

Аннотация. В работе изучаются свойства функции рассеяния на полуоси для системы дифференциальных уравнений Дирака в случае конечной плотности с нулевым граничным условием.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, непрерывный спектр, собственное значение, функция Йоста.

Annotation. The paper studies the scattering function for a Dirac system on the half-line with finite density and a zero boundary condition.

Keywords: Dirac system, continuous spectrum, eigenvalue, Jost function.

Рассмотрим в пространстве $L_2^2(0,\infty)$ самосопряженный оператор Дирака

$$Dy = i\sigma_3 y' + i\begin{pmatrix} 0 & -\overline{q(x)} \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y_1(0) = y_2(0). \tag{1}$$

Предположим, что функция $q(x)$ удовлетворяет условию конечной плотности

$$\int_0^\infty (1+x)|q(x)-m|\,dx < \infty, \qquad m > 0. \tag{2}$$

Положим

$$k(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - m^2}.$$

При действительных λ, $|\lambda| > m$, система (1) имеет решения Йоста

$$f^+(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{i(k-\lambda)}{m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx} + \int_x^\infty \Gamma(x,y) \begin{pmatrix} \dfrac{i(k-\lambda)}{m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{iky}\,dy,$$

$$f^-(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i(\lambda-k)}{m} \end{pmatrix} e^{-ikx} + \int_x^\infty \Gamma(x,y) \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i(\lambda-k)}{m} \end{pmatrix} e^{-iky}\,dy. \tag{3}$$

Здесь $\Gamma(x,y)$ — матричное ядро, которое удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_x + \sigma_3\Gamma_y\sigma_3 - U_0\Gamma + \sigma_3\Gamma\sigma_3 U = 0$$

и условию

$$\Gamma(x,x) - \sigma_3\Gamma(x,x)\sigma_3 = U - U_0(x), \qquad \Gamma(x,y) \longrightarrow 0 \quad (y \to \infty). \tag{4}$$

В формулах

$$U_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{q(x)} \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{pmatrix}.$$

Решения Йоста аналитически продолжаются в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно. Непрерывный спектр оператора имеет вид

$$\sigma_c(D) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty),$$

а дискретный спектр состоит из конечного числа простых собственных значений $\lambda_j \in (-m, m)$.

Введём функции Йоста

$$s^+(\lambda) = f_1^+(0,\lambda) - f_2^+(0,\lambda), \qquad s^-(\lambda) = f_2^-(0,\lambda) - f_1^-(0,\lambda).$$

Из (3) получаем

$$\begin{aligned} s^+(\lambda) = {} & \frac{i(k-\lambda)}{m} - 1 \\ & + \int_0^\infty \left[\frac{i(k-\lambda)}{m}(\Gamma_{11} - \Gamma_{21}) + \Gamma_{12} - \Gamma_{22} \right](0,y) e^{iky}\,dy, \end{aligned} \tag{5}$$

и аналогичное интегральное представление для $s^-(\lambda)$.

Из условия (2) следует асимптотика

$$s^+(\lambda) = -1 + O(|\lambda|^{-1}), \qquad |\lambda| \to \infty. \tag{6}$$

Кроме того, на непрерывном спектре

$$s^+(\lambda) = \overline{s^-(\lambda)}.$$

Поэтому функцию рассеяния можно определить формулой

$$S(\lambda) = \frac{s^-(\lambda)}{s^+(\lambda)} = e^{2i\delta(\lambda)},$$

где $\delta(\lambda)$ — фаза рассеяния.

Лемма. Функция рассеяния $S(\lambda)$ является отношением двух функций: числитель аналитичен в нижней полуплоскости, а знаменатель — в верхней. При $|\lambda| \to \infty$

$$S(\lambda) = 1 + O(|\lambda|^{-1}).$$

Нули функции $s^+(\lambda)$ в интервале $(-m, m)$ являются собственными значениями оператора D и полюсами функции рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния // Докл. АН СССР. 1966. Т.167, №6. С.1219–1222.
2. Iantchenko A., Korataev E. Resonance for Dirac operators on the half-line // J. Math. Anal. Appl. 2014. Т.420, №1. С.279–313.
3. Фам Л.В. Обратная задача рассеяния для системы уравнений Дирака на полуоси // Линейные краевые задачи математической физики. Киев, 1973. С.174–207.
4. Hryniv R.O., Manko S.S. Inverse Scattering on the Half-Line for ZS-AKNS Systems with Integrable Potentials // Integral Equations Operator Theory. 2016. Т.84, №3. С.323–355.
5. Маматов А.Э. Прямая задача теории рассеяния для системы дифференциальных уравнений Дирака на полуоси в случае конечной плотности // Дифференциальные уравнения. 2024. Т.60, №3. С.298–311.
6. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.

УДК 517.977

Задача преследования в дифференциальных играх с интегральными и импульсными ограничениями

Мустапокулов Х. Я.[1,2]
[1]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
[2]Международный университет Нордик, Ташкент, Узбекистан;
m_hamdam@mail.ru

Постановка задачи. В $\mathbb{R}^m$ рассматривается конфликтно управляемый процесс с запаздыванием [1]:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) + Cu(t) - Dv(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^m$; $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times q}$ — постоянные матрицы; $h > 0$ — величина запаздывания; $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и $v(t) \in \mathbb{R}^q$ — управления преследующего и убегающего игроков соответственно.

Терминальное множество $M \subset \mathbb{R}^m$ имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство, M_1 — компакт из ортогонального дополнения $L = M_0^{\perp}$. Пусть $\pi : \mathbb{R}^m \to L$ — оператор ортогонального проектирования ($z \in M \iff \pi z \in M_1$).

Начальное положение задается абсолютно непрерывной функцией $\varphi(t) \in X$:

$$X = \{\varphi(t) : z(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0],\ \ \varphi(0) \in \mathbb{R}^m \setminus M\}. \tag{2}$$

Пусть $K(t)$ — матричная функция, удовлетворяющая условиям [1]: $K(t) = \tilde{0}$ при $t < 0$, $K(0) = E$, $K(t) \in C^1[0, \tau]$, и при $t > 0$:

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t - h). \tag{3}$$

Управление преследователя $u(\cdot)$ удовлетворяет интегральному ограничению:

$$\int_0^{\infty} \|u(t)\|^2 dt \le \rho^2 \quad (\rho \ge 0). \tag{4}$$

Убегающий игрок применяет импульсное управление в моменты $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($\tau_0 < \tau_1 < \dots$) без конечных точек сгущения [2]:

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \delta(t - \tau_i), \quad v_i \in Q \subset \mathbb{R}^q, \quad t \ge 0. \tag{5}$$

Предыстория управления убегающего в момент t определяется как $v_t(\cdot) = \{v(r) : r \in [0, t], v(r) \in Q\}$. Преследователю в момент t известны $\varphi(\cdot)$ и $v_t(\cdot)$ [3].

Определение. *Будем говорить, что игра (1), начинающаяся из положения $\varphi(t) \in X$, завершится к моменту времени T, если при любом допустимом импульсном управлении $v(\cdot)$ убегающего, используя информацию $v_t(\cdot)$, можно построить допустимое управление $u(\cdot)$ преследователя такое, что траектория $z(t)$ переводится на терминальное множество M за конечное время T.*

Решение задачи. Распределим ресурс ρ по отрезкам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ набором чисел $\rho_i \ge 0$ ($\sum_{i=0}^{n(t)} \rho_i^2 \le \rho^2$). Введем множества:

$$\Psi_i(t; \tau_i, \tau_{i+1}) = \Big\{ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi K(t - r) C u(r) dr : \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|u(r)\|^2 dr \le \rho_i^2 \Big\}, \quad i = 0, \dots, n(t) - 1,$$

$$\Psi_{n(t)}(t; \tau_{n(t)}, t) = \Big\{ \int_{\tau_{n(t)}}^{t} \pi K(t - r) C u(r) dr : \int_{\tau_{n(t)}}^{t} \|u(r)\|^2 dr \le \rho_{n(t)}^2 \Big\}.$$

С использованием операции геометрической разности ($\underline{*}$) построим множества:

$$\widehat{W}_i(t, v_i) = \Psi_i(t; \tau_i, \tau_{i+1}) - \pi K(t - \tau_i) D v_i, \quad W_i(t) = \Psi_i(t; \tau_i, \tau_{i+1}) \underline{*} \pi K(t - \tau_i) DQ.$$

Пусть $\Theta = \{t \ge 0 : W_i(t) \ne \varnothing,\ i = 0, \dots, n(t)\}$.

Предположение. *Существуют неотрицательные числа $\rho_0, \dots, \rho_{n(t)}$ ($\sum \rho_i^2 \le \rho^2$) такие, что множество Θ непусто.*

Зафиксируем векторы $\omega = \omega(t) = \{w_i(t) \in W_i(t),\ i = 0, \dots, n(t)\}$ и сформируем:

$$\xi[t, \varphi(\cdot), \omega] = \pi K(t - \tau_0)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(t - r - h) B \varphi(r) dr + \sum_{i=1}^{n(t)} w_i(t). \tag{6}$$

Определим функция $\tilde{\lambda}_i$:

$$\tilde{\lambda}_i(t, \varphi(\cdot), v, \omega) = \sup\Big\{\lambda \ge 0 : \lambda\Big[M_1 - \xi[t, \varphi(\cdot), \omega]\Big] \bigcap \Big[\widehat{W}_i(t, v) - w_i(t)\Big] \ne \varnothing\Big\}. \tag{7}$$

Положим $k = \min\{j \in \{1,\dots,n(t)\} : \sum_{i=1}^{j} \tilde{\lambda}_i \geq 1\}$ (если такого j нет, то $k = n(t)+1$). Разрешающая функция λ_i определяется как [3]:

$$\lambda_i(t,\varphi(\cdot),v,\omega) = \begin{cases} \widetilde{\lambda}_i(t,\varphi(\cdot),v,\omega), & i = 1,\dots,k-1; \\ 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \widetilde{\lambda}_j(t,\varphi(\cdot),v,\omega), & i = k; \\ 0, & i = k+1,\dots,n(t). \end{cases} \tag{8}$$

Множество гарантированных времен:

$$T(\varphi(\cdot),\omega) = \Big\{t \in \Theta : \sum_{i=0}^{n(t)} \inf_{v\in Q} \lambda_i(t,\varphi(\cdot),v,\omega) = 1\Big\}. \tag{9}$$

Теорема. *Пусть выполнено Предположение, $\tau_i \in \Theta$ для всех i, множество M_1 выпукло и $T(\varphi(\cdot),\omega) \neq \varnothing$ для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ и некоторого набора ω. Тогда для любого $T \in T(\varphi(\cdot),\omega)$ траектория системы (1) переводится из положения $\varphi(\cdot)$ на терминальное множество M за конечное время T.*

Литература

1. **Беллман Р., Кук К.** *Дифференциально-разностные уравнения.* М.: Наука, 1967. — 548 с.
2. **Филиппов А.Ф.** *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М.: Наука, 1985. — 224 с.
3. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** *Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. N 1. С. 212–224.

УДК 536.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОСОБОМ ТИПЕ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

Мухтаров Я.
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан;
ya-muxtarov@rambler.ru

Аннотация. Геометрическая теория дифференциальных уравнений занимает важное место во многих проблемах естествознания. Среди многочисленных задач этой теории важное место занимают вопросы определения существования (отсутствия) и единственности периодических решений. В статье изучается окрестность особой точки одного класса дифференциальных уравнений при особом типе в бесконечности. Даны коэффициентные условия существования бесконечно удаленных особых точек.

Ключевые слова. Особые точки, изолированная особая точка, особая точка второй группы, бесконечно удаленные особые точки.

Введение. Геометрическая теория дифференциальных уравнений занимает важное место во многих задачах естествознания. Среди многочисленных задач этой теории видное место занимают вопросы существования (отсутствия), единственности и числа периодических решений, построение схем фазовых траекторий, проблемы устойчивости и другие. Здесь следует отметить исследования Немыцкого В.В., Фроммера М., Лукашевича И.А., Шарипова Ш.Р., а также работы [1-3].

Изложение материала. Рассмотрим один общий метод исследования уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_{k(x,y)} + Q_n(x,y)}{P_{k(x,y)} + Q_{n(x,y)}} \tag{1}$$

в целом на всей плоскости при особом типе в бесконечности. Если для уравнения (1) имеем особый тип в бесконечности, то оно примет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_{k(x,y)} + yf_{n-1}(x,y)}{P_{k(x,y)} + xf_{n-1}(x,y)}, \tag{2}$$

где $f_{n-1}(x,y)$ - однородный многочлен $(n-1)$-й степени. Найдем особые точки уравнения (2). Имеем:

$$\begin{cases} Q_k(x,y) + yf_{n-1}(x,y) = 0 \\ P_k(x,y) + xf_{n-1}(x,y) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Отсюда

$$xQ_k(x,y) - yP_k(x,y) = 0 \tag{4}$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение возможных касательных для конечной части плоскости. Значит, особые точки уравнения (2), отличные от начала координат, расположены на лучах, определяемых уравнением (4). Пусть

$$y_i = \tau_i x_i \tag{5}$$

решения уравнения (4), тогда, имея в виду второе уравнение системы (3), получим

$$y_i = \sqrt[n-k]{-\frac{P_k(1,\tau_i)}{f_{n-1}(1,\tau_i)}} \cdot \tau_i, \quad x_i = \sqrt[n-k]{-\frac{P_k(1,\tau_i)}{f_{n-1}(1,\tau_i)}}. \tag{6}$$

Заметим, что между направлениями, определяемыми из уравнения возможных касательных

$$\Phi_{k+1}(\tau) = Q_{k(1,\tau)} - \tau P_{k(1,\tau)} = 0 \tag{7}$$

и особыми точками, лежащими на экваторе сферы Пуанкаре, существует глубокая связь. Координаты особых точек экватора определяются из условия $f_{n-1}(1,\tau) = 0, f_{n-1}(\mu,1) = 0$.

Формулы (6) выражают координаты особых точек, лежащих в конечной части плоскости (кроме начала координат), через угловые коэффициенты лучей, определяемых уравнением (7). Здесь возможны следующие случаи:

1. Если число ($n-k$) четное и $P_k(1,\tau)f_{n-1}(1,\tau) < 0$, то на лучах, определяемых уравнением (7), будут лежать по две диаметрально противоположные особые точки относительно начала координат.

2. Если число ($n-k$) нечетное, то на лучах будет лежать по одной особой точке.
Если система $\Phi_{k+1}(\tau) = 0. f_{n-1}(1,\tau) = 0$ совместна при $z = 0$, то тогда точки пересечения экватора с лучами уравнения (6) дадут координаты бесконечно удаленных особых точек, уходящих из конечной части плоскости, так как для таких точек координаты x_i и y_i обращаются в бесконечность, как это видно из формулы (6). Следовательно, эти особые точки экватора появляются тогда и только тогда, когда особые точки конечной части плоскости, кроме начала координат, уходят в бесконечность.
Таким образом, имеет место
Теорема. Если бесконечно удаленные особые точки уравнения (1) при особом типе в бесконечности удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} f_{n-1}(1,\tau) = f'_{n-1}(1,\tau_i) = \cdots = f^{(r-1)}_{n-1}(1,\tau_i) = 0, \quad f^{(r)}_{n-1}(1,\tau_i) \neq 0, \\ \Phi_{n-1}(1,\tau) = \Phi'_{n-1}(1,\tau_i) = \cdots = \Phi^{(s-1)}_{n-1}(1,\tau_i) = 0, \quad \Phi^{(s)}_{n-1}(1,\tau_i) \neq 0, \end{cases}$$

то они могут быть одного из следующих типов: закрытый узел, шести сепаратрисное седло, закрытый седло-узел, открытый седло-узел, узел и седло.

Заключение. Получены коэффициентные критерии существования бесконечно удаленных особых точек уравнения (1) при особом типе в бесконечности.

Литература

1. **Шилов Г.Е.** *Интегральные кривые однородного уравнения первого порядка.* // УМН. – 1950. – т. 5, вып. 5(39). – С. 193–203.
2. **Мухтаров Я., Буриев Т.Э.** *Качественное исследование двумерных однородных полиномиальных динамических систем.* // CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. – Россия, Елец. – 2018. – вып. №3(11). – С. 26–29.
3. **Мухтаров Я., Шодиев Д.С., Умарова Ф.** *Фазовые портреты плоских полиномиальных систем дифференциальных уравнений.* // Ilmiy axborotnoma. Aniq va tabiiy fanlar seriyasi. – 2019. – №1(113). – С. 14–20.

УДК 517.2

Об аналитическом решении одного непрерывного аналога F-квадратично-стохастического оператора

Расулов Х. Р.
[1]Бухарский государственный университет, Институт математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, г.Бухара;
e-mail: xrasulov71@mail.ru

Квадратичные стохастические операторы используются при построении нелинейных моделей эволюции распределений на симплексе и занимают заметное место в математической генетике и теории дискретных динамических систем [1]. Особый интерес представляют невольтерровские операторы, для которых структура наследования не сводится к классическому вольтерровскому условию. В работе [2] введён класс F-квадратичных стохастических операторов и исследовано поведение их дискретных траекторий. Естественным продолжением такого исследования является рассмотрение соответствующей динамики в непрерывном времени. В настоящей работе изучается задача Коши для непрерывного аналога одного квадратичного стохастического оператора из [2], который при $m = 3$, $F = \{1\}$, $M = \{2, 3\}$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 1 - x_0 - 2(1 - a_0)x_1x_2 - 2(1 - b_0)x_1x_3, \\ \dot{x}_1 = 2a_1x_1x_2 + 2b_1x_1x_3 - x_1, \\ \dot{x}_2 = 2a_2x_1x_2 + 2b_2x_1x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 = 2a_3x_1x_2 + 2b_3x_1x_3 - x_3, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_k(0) = x_k^0 \geq 0, \qquad \sum_{k=0}^{3} x_k^0 = 1, \tag{2}$$

где $a_k > 0, b_k > 0, k = 0, 1, 2, 3$.

Для записи решения введем матрицы

$$B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad e^{\xi B} = \begin{pmatrix} E_{11}(\xi) & E_{12}(\xi) \\ E_{21}(\xi) & E_{22}(\xi) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\Phi_{ij}(\xi) = \int_0^{\xi} E_{ij}(s)\, ds, \qquad i, j = 1, 2,$$

$$\tau = a_2 + b_3, \qquad \Delta = \sqrt{(a_2 - b_3)^2 + 4a_3b_2}.$$

и определим

$$G(\xi) = x_1^0 + a_1 \left[\Phi_{11}(\xi)x_2^0 + \Phi_{12}(\xi)x_3^0 + \Phi_{21}(\xi)x_2^0 + \Phi_{22}(\xi)x_3^0\right],$$

$$H(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{ds}{G(s)}, \qquad \eta(t) = H^{-1}\left(2(1 - e^{-t})\right).$$

Тогда

$$E_{11}(\xi) = e^{\tau\xi/2}\left(\cosh\frac{\Delta\xi}{2} + \frac{a_2 - b_3}{\Delta}\sinh\frac{\Delta\xi}{2}\right), \qquad E_{12}(\xi) = e^{\tau\xi/2}\frac{2b_2}{\Delta}\sinh\frac{\Delta\xi}{2},$$

$$E_{21}(\xi) = e^{\tau\xi/2}\frac{2a_3}{\Delta}\sinh\frac{\Delta\xi}{2}, \qquad E_{22}(\xi) = e^{\tau\xi/2}\left(\cosh\frac{\Delta\xi}{2} - \frac{a_2 - b_3}{\Delta}\sinh\frac{\Delta\xi}{2}\right).$$

Теорема. *Если $x_1^0 > 0$, то решение задачи Коши (1), (2) имеет вид*

$$\begin{cases} x_0(t) = 1 - x_1(t) - x_2(t) - x_3(t), \\ x_1(t) = e^{-t}G(\eta(t)), \\ x_2(t) = e^{-t}\left[E_{11}(\eta(t))x_2^0 + E_{12}(\eta(t))x_3^0\right], \\ x_3(t) = e^{-t}\left[E_{21}(\eta(t))x_2^0 + E_{22}(\eta(t))x_3^0\right]. \end{cases}$$

где

$$\eta(t) = H^{-1}\left(2(1 - e^{-t})\right).$$

Если $x_1^0 = 0$, то

$$\begin{cases} x_0(t) = 1 - \left(x_2^0 + x_3^0\right)e^{-t}, \\ x_1(t) = 0, \\ x_2(t) = x_2^0 e^{-t}, \\ x_3(t) = x_3^0 e^{-t}. \end{cases}$$

Таким образом, для непрерывного аналога F-квадратичного стохастического оператора при $m = 3$ получено точное аналитическое представление решения задачи Коши. Полученные формулы позволяют непосредственно проследить зависимость его компонент от начальных данных и коэффициентов системы. Кроме того, из полученного представления следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = (1, 0, 0, 0).$$

Отметим, что для случая $m = 2$ точное аналитическое решение соответствующей задачи Коши было получено ранее в [3].

Литература

1. Бернштейн С. Н., Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследованности, Ученые записки научно-исслед. каф. Укр. (отд. матем.), 1 (1924), 83–115.

2. Розиков У. А., Жамилов У. У. F-квадратичные стохастические операторы // Математические заметки. 2008. Т. 83, № 4. С. 606–612.

3. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F-quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, No4, pp.126–131.

УДК 517.925

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НОВОЙ БИФУРКАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА В ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Суванов Ш.[1], Тилавов А.[2].

[1]Национальный педагогический университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
sh.suvanov@npuu.uz

[2]Институт Математики имени В.И.Романовский АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
asliddintm@mail.ru

В работе рассматривается двумерная нелинейная динамическая система зависящая от двух вещественных параметров a и b. Проведено численное исследование существования предельных циклов при различных отрицательных значениях параметра b и изменении параметра a. Получена характерная бифуркационная картина: при определённых значениях параметров в системе существует изолированный предельный цикл, а при малом изменении параметра a этот цикл приближается к сепаратрисам седловой особой точки и исчезает в результате формирования гомоклинической орбиты.

Особый интерес представляет поведение критического значения параметра a и периода предельного цикла при существенном изменении параметра b. В частности, при больших отрицательных значениях b критическое значение a стремится к значению $-1/2$, тогда как период предельного цикла существенно уменьшается.

Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = ax + y + x^2, \qquad \dot{y} = bx + y, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Система (1) представляет собой двумерную полиномиальную динамическую систему с двумя управляющими параметрами. Наличие нелинейного члена x^2 приводит к возможности возникновения сложной глобальной структуры фазового портрета, включая существование предельных циклов и гомоклинических орбит.

Целью настоящей работы является численное исследование изменения фазовой структуры системы при варьировании параметров a и b. Особое внимание уделяется следующему явлению. При фиксированном отрицательном значении b существует узкий интервал параметра a, в котором наблюдается предельный цикл.

При дальнейшем изменении параметра a предельный цикл приближается к сепаратрисам седловой особой точки. В критическом режиме формируется гомоклиническая структура, после чего изолированный предельный цикл исчезает.

Особенно интересным является тот факт, что описанная картина сохраняется при весьма широком диапазоне значений параметра b: от $b = -1.01$ до $b = -999$.

Численный метод исследования. Система (1) имеет две особые точки: $O = (0, 0)$ и $S = (b-a,\ b(a-b))$. Эти точки сопряжены в следующем смысле: если O является седлом, то P является анти-седлом (узлом или фокусом) и наоборот [1]. На прямой $a = b$ (за исключением точки (-1,-1)) плоскости параметров (a, b) точки P и O сливаются, что соответсвует бифуркации седла-узла.

Численное исследование проводилось путём интегрирования системы (1) для различных фиксированных значений параметра b и последовательного изменения параметра a.

Для каждого набора параметров определялась фазовая траектория, соответствующая наблюдаемому предельному циклу. При наличии замкнутой изолированной траектории вычислялся её период T.

При изменении параметра a в непосредственной окрестности критического значения отслеживалось изменение положения траектории относительно сепаратрис седловой точки.

Полученные результаты показывают, что критическая область является очень узкой. В частности, изменение a на величину порядка 10^{-4}–10^{-3} в ряде случаев приводит к качественному изменению фазового портрета: существующий предельный цикл исчезает.

В качестве первого примера рассмотрим значение $b = -1.01$. При $a = -0.999$ численное интегрирование показывает наличие предельного цикла с периодом примерно $T \approx 66$. При изменении параметра до $a = -0.997$ изолированный предельный цикл уже не обнаруживается.

Наблюдаемая между этими состояниями траектория приближается к сепаратрисной структуре седловой точки, что указывает на возможность существования критической гомоклинической орбиты при некотором промежуточном значении

$$-0.999 < a_* < -0.997.$$

Аналогичная картина сохраняется при дальнейшем уменьшении параметра b.

Основные численные результаты. Результаты численного исследования представлены в таблице 1.

Величина a_{yes} соответствует исследованному значению параметра a, при котором предельный цикл ещё наблюдался. Величина a_{no} соответствует ближайшему исследованному значению параметра, при котором предельный цикл уже не наблюдался.

Таблица 1: Численные значения параметров и периода предельного цикла

b	a_{yes}	a_{no}	T
-1.01	-0.9990	-0.9970	66.00
-1.10	-0.9620	-0.9610	39.35
-1.20	-0.9263	-0.9262	32.75
-1.40	-0.8635	-0.8634	27.65
-1.60	-0.8100	-0.8103	25.215
-1.80	-0.7643	-0.7642	23.15
-4	-0.5424	-0.5420	15.48
-6	-0.5068	-0.5060	13.80
-10	-0.5002	-0.5001	8.25
-20	-0.5001	-0.5000	3.353
-30	-0.5001	-0.5000	2.47
-40	-0.5001	-0.5000	2.4375
-50	-0.5005	-0.5000	1.65
-100	-0.5009	-0.5005	1.0645
-200	-0.5005	-0.5000	0.740
-300	-0.5005	-0.5000	0.640
-600	-0.5005	-0.5000	0.430
-900	-0.5005	-0.5000	0.3565
-999	-0.5005	-0.5000	0.345

Из таблицы 1 видны несколько важных закономерностей.

Во-первых, при $b \to -\infty$ критическое значение параметра a, при котором наблюдается исчезновение цикла, приближается к $a = -\frac{1}{2}$.

Во-вторых, при уменьшении b период предельного цикла существенно уменьшается. Для $b = -1.01$ период имеет величину около 66, тогда как для $b = -999$ он составляет лишь $T \approx 0.345$.

Таким образом, параметр b существенно влияет на характерный временной масштаб движения.

В-третьих, в окрестности критической области изменение параметра a является очень малым. Это особенно хорошо заметно при $b = -10, -20, -30, \ldots, -999$.

Поэтому для точного определения критической кривой в пространстве параметров необходимо использовать существенно более мелкий шаг по параметру a, а также специальный алгоритм продолжения периодических орбит.

Заключение. В работе проведено численное исследование двумерной нелинейной динамической системы (1). Установлено, что при широком диапазоне отрицательных значений параметра b система демонстрирует существование предельного цикла в узкой области параметра a.

При приближении к критическому значению параметра наблюдается сближение предельного цикла с сепаратрисной структурой седловой особой точки. После перехода через критическое значение предельный цикл исчезает.

Таким образом, полученные результаты представляют собой численное свидетельство существования интересной глобальной бифуркационной структуры в системе (1) и создают основу для её дальнейшего теоретического исследования.

Литература

1. **Azamov, A.A., Tilavov, A.M.** *A simplest nonlinear system having limit cycle.* Uzbek Math. J. 2009. No. 2, pp. 35–41.

2. **Coppel, W.** *A new class of quadratic systems*, Journal of Differential Equations. 1991. DOI:10.1016/0022-0396(91)90054-D.

УДК 517.938

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ХИЩНИК–ЖЕРТВА С РАЦИОНАЛЬНЫМ РОСТОМ ПОПУЛЯЦИИ ЖЕРТВЫ

Эшмаматова Д. Б.[1,2], Файзуллаева Ш. А.[1]

[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;
[2]Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
e-mail: 24dil@mail.ru; shahlo9735@gmail.com

Неподвижные точки и условия их существования относятся к базовым объектам качественного анализа дискретных динамических систем [2]. В математической экологии важную роль играют дискретные модели популяционной динамики; классическая модель Бевертона–Холта является одним из базовых примеров рационального описания роста популяции [1].

В настоящей работе рассматривается дискретная модель типа хищник–жертва, в которой рост популяции жертвы задаётся рациональной функцией, а взаимодействие двух популяций учитывается билинейным членом. Цель работы состоит в определении биологически допустимых неподвижных точек модели и получении точных условий существования граничного равновесия и положительного равновесия сосуществования.

Рассмотрим следующую дискретную систему популяционной динамики при $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n + \gamma x_n^2} - a x_n y_n, \\ y_{n+1} = y_n + b x_n y_n - d y_n. \end{cases} \tag{1}$$

При $x_n \geq 0$ и $y_n \geq 0$ переменные x_n и y_n имеют биологический смысл численностей популяций жертвы и хищника соответственно. В настоящей работе биологически допустимыми неподвижными точками называются неподвижные точки с неотрицательными координатами. Предполагается, что $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$. Параметр α характеризует репродуктивный потенциал жертвы, β, γ — внутривидовую саморегуляцию, a — воздействие хищника, b — прирост хищника за счёт потребления жертвы, d — его естественную смертность.

Введём обозначение

$$A(x) = \frac{\alpha}{1 + \beta x + \gamma x^2}. \tag{2}$$

Неподвижной точкой системы (1) называется точка $E = (x^*, y^*)$, для которой $x_{n+1} = x_n = x^*$ и $y_{n+1} = y_n = y^*$. Следовательно, неподвижные точки (1) находятся из системы

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{\alpha x^*}{1 + \beta x^* + \gamma (x^*)^2} - a x^* y^*, \\ y^* = y^* + b x^* y^* - d y^*. \end{cases} \tag{3}$$

С использованием обозначения (2) систему (3) эквивалентно можно записать в виде

$$x^* \big(A(x^*) - a y^* - 1\big) = 0, \qquad y^* \big(b x^* - d\big) = 0.$$

Отсюда $x^* = 0$ либо $A(x^*) - a y^* = 1$, и $y^* = 0$ либо $b x^* = d$. Совместный разбор этих случаев приводит к следующему результату.

Теорема 1. Предположим, что $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$. Тогда все биологически допустимые неподвижные точки системы (1) имеют следующий вид.

1. Равновесие вымирания $E_0 = (0, 0)$ существует при всех допустимых значениях параметров.

2. Ненулевое граничное равновесие без хищника $E_1 = (\bar{x}, 0)$ существует тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$, где

$$\bar{x} = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma(\alpha - 1)}}{2\gamma}.$$

3. Положительное равновесие сосуществования $E_* = (x^*, y^*)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\alpha > 1 + \beta\frac{d}{b} + \gamma\frac{d^2}{b^2}.$$

В этом случае

$$x^* = \frac{d}{b}, \qquad y^* = \frac{1}{a}\left(\frac{\alpha}{1 + \beta\frac{d}{b} + \gamma\frac{d^2}{b^2}} - 1\right).$$

Доказательство. В граничном случае $y^* = 0$, $x^* > 0$ получаем $A(x^*) = 1$, и положительность указанного корня $\bar{x}$ эквивалентна условию $\alpha > 1$. Для положительного равновесия из второго уравнения следует $x^* = d/b > 0$, а из первого — приведённая формула для y^*, причём

$$y^* > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1 + \beta\frac{d}{b} + \gamma\frac{d^2}{b^2}.$$

Тем самым условие существования положительного равновесия является необходимым и достаточным.

Таким образом, все биологически допустимые неподвижные точки системы (1) описаны явно. Равновесие вымирания $E_0 = (0, 0)$ существует при всех допустимых значениях параметров, ненулевое граничное равновесие $E_1 = (\bar{x}, 0)$ существует тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$, а положительное равновесие сосуществования $E_* = (x^*, y^*)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\alpha > 1 + \beta\frac{d}{b} + \gamma\frac{d^2}{b^2}.$$

Это неравенство задаёт точный порог существования положительного стационарного состояния обеих популяций в рамках рассматриваемой модели: репродуктивный потенциал жертвы α должен превышать величину, определяемую параметрами внутривидовой саморегуляции и отношением d/b. Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего исследования локальной устойчивости и бифуркационных свойств неподвижных точек системы.

Литература

1. **Beverton R. J. H., Holt S. J.** *On the Dynamics of Exploited Fish Populations.* Fishery Investigations, Series II, Vol. XIX. London: Ministry of Agriculture, Fisheries and Food, 1957. 533 p.

2. **Elaydi S. N.** *Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering.* 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.

УДК 519.95

СОСТОЯНИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В СМЫСЛЕ НЭША, ОСНОВАННЫЕ НА ИГРАХ n ЛИЦ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Янгиева О. У.
Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
ogiloyyangiyeva5@gmail.com

Понятие равновесия в экономической системе развивалось постепенно. С начала под равновесием понимался лишь материальный баланс продуктов, затем баланс между спросом и предложением продуктов вместе с балансом финансов. Теперь, в основном благодаря идеям теории игр, стало возможным определять равновесие в экономике как решение в том или ином смысле игры многих лиц, участников экономического процесса. При этом решение подходящим образом сформулированной игры должно обеспечить, естественно, материальные и финансовые балансы.

Обычно понятие экономического равновесия связывают с наличием противоречивых интересов, с конкуренцией и т.п. Поэтому модели равновесия иногда называют моделями конкурентной.

Пусть Ω некоторое множество. Совокупность всех непустых подмножеств Ω обозначим через $\Pi(\Omega)$. Рассмотрим теперь два множества: Ω_1 и Ω_2, а также отображение a множество Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$. Это отображение будем называть точечно-множественным. Для $\xi \in \Pi(\Omega_1)$ положим $a(\xi) = \bigcup\limits_{x\in\xi} a(x)$. На множестве $a(\Omega_1)$ можно определить отображение a^{-1}, обратное a: $a^{-1}(y) = \{x \in \Omega_1 : \ y \in a(x)\}$ $(y \in a(\Omega_1))$. Очевидно, что $a^{-1}(a(\Omega_1)) = \Omega_1$ и, кроме того, $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$. Графиком отображения a множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$ называется подмножество Z прямого произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$, определяемое следующим образом:

$$Z = \{(x,\, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 : \ x \in \Omega_1, \ \ y \in a(x)\}.$$

Отображение a множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$ назовем замкнутым (или полунепрерывным сверху), если график Z этого отображения замкнут. В терминах последовательностей замкнутость отображения означает следующее: если x_n – последовательность элементов Ω_1, $x_n \to x$, $y_n \in a(x_n)$, $y_n \to y$, то $x \in \Omega_1$, $y \in a(x)$. Заметим, что из замкнутости отображения a, определенного на множестве Ω_1, вообще говоря, не следует замкнутость Ω_1. Замкнутые точечно-множественные отображения играют важную роль при исследовании многих задач математической экономики и теории игр. Это объясняется, в частности, тем, что для указанных отображений справедлива теорема Какутани о неподвижной точке.

Пусть Ω – непустое подмножество конечномерного пространства X и a – отображение множества Ω в $\Pi(\Omega)$. Точка $x_0 \in \Omega$ называется неподвижной точкой отображения a, если $x_0 \in a(x_0)$.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – подмножество пространств X_1 и X_2 соответственно.

Отображение $a : \Omega_1 \to \Pi(\Omega_2)$ называется полунепрерывным снизу, если для любых точек $x \in \Omega_1$ и $y \in a(x)$ и любой последовательности x_n, такой что $x_n \to x$, $x_n \in \Omega_1\,(n = 1, 2, ...)$ найдется последовательности y_n такая, что $y_n \in a(x_n)$ и $y_n \to y$. Отображение $a : \Omega_1 \to \Pi(\Omega_2)$ назовем непрерывным по Какутани, если оно одновременно полунепрерывно сверху и полунепрерывно снизу.

Пусть $a : \Omega_1 \to \Pi(\Omega_2)$, где Ω_1 и Ω_2 замкнуты. Обозначим через $\tilde{\Pi}(\Omega)$ совокупность всех компактных подмножеств замкнутого множества Ω и предположим, что $a(\xi) \in \tilde{\Pi}(\Omega_2)$ для любого $\xi \in \tilde{\Pi}(\Omega_1)$. Пусть Ω_1 и Ω_2 замкнутые множества и $a : \Omega_1 \to \Pi(\Omega_2)$ – отображение переводящее каждый компакт в компакт. Будем говорить, что отображение a непрерывно по Хаусдорфу, если из соотношений $\xi_n \in \tilde{\Pi}(\Omega_1)$, $\xi_n \to \xi$, $(n = 1, 2, ...)$ следует, что $a(\xi_n) \to a(\xi)$.

«Классическая» игра n лиц описывает конфликтную ситуацию, в которой участвует n игроков. Будем обозначать этих игроков числами 1, 2, ..., n. Игрок i имеет в своем распоряжении некоторое множество X_i, которое называется *множеством* его *стратегий*. Кроме того, этот игрок описывается функцией выигрыша (функцией полезности) u_i, определенной на прямом произведении $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Число $u_i = u_i(x_1, ...x_n)$ показывает выигрыш, который получает i – й игрок, если первый игрок выбрал свою стратегию x_1, второй игрок – стратегию x_2, ..., n - й игрок – стратегию x_n.

Игра n лиц, определенная с помощью множеств стратегий X_i и функций выигрыша u_i, называется игрой, заданной в нормальной форме.

Элемент $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ множества $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ называется состоянием равновесия в смысле Нэша рассматриваемой нами игры, если для всех $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ выполняются соотношения

$$u_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1},\ ...,\ \bar{x}_n) = \max_{x_i \in X_i} u_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1},\ ...,\ \bar{x}_n).$$

Стратегия $\bar{x}_i$ игрока i, участвующая в состоянии равновесия $\bar{x}$, называется оптимальной. Смысл приведенных определений заключается в следующем. Предположим, что какой-либо из игроков, скажем i, не воспользовался своей оптимальной стратегией $\bar{x}_i$, в то время как каждый из остальных игроков k выбрал оптимальную стратегию $\bar{x}_k$. В этом случае игрок i обеспечит себе выигрыш не большой, чем если бы он применил стратегию $\bar{x}_i$.

Нэш [1] показал, что в случае, когда X_i – компактные выпуклые множества, а функций выигрыша u_i – непрерывные вогнутые по x_i функции $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$, состояние равновесия существует.

С точки зрения моделей экономического равновесия представляет интерес рассмотреть некоторое обобщение описанной выше игры n лиц в нормальной форме. Суть этого обобщения заключается в том, что множества стратегий X_i игроков i предполагаются зависящими от выбора этих стратегий, в то время как в «классической» игре они считаются раз и навсегда заданными. Точнее говоря, если игрок 1 выбрал свою стратегию x_1, игрок 2 – стратегию x_2, . . . , игрок n – стратегию x_n, то множество всех стратегий игрока 1 есть $X_1(x_1, x_2, ...x_n)$, игрока 2 – $X_2(x_1, x_2, ...x_n)$, . . . , игрока n – $X_n(x_1, x_2, ...x_n)$. При этом, разумеется, естественно, считать, что $x_i \in X_i(x_1, x_2, ...x_n)$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$. Считаем, таким образом, что каждый из игроков, выбирая тем или иным способом свои стратегии, может влиять на совокупность всех стратегий как других игроков, так и самого себя.

Приведем формальное описание рассматриваемой игры. В этой игре участвуют n игроков: $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$. В распоряжении каждого игрока i имеется некоторое множество $\tilde{X}_i$. На множестве $\tilde{X} = \prod\limits_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$ заданы функции выигрыша u_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$. Кроме того, задано n точечно-множественных отображений $X_i : \tilde{X} \to \prod\left(\tilde{X}_i\right)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Элемент $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ множества $\tilde{X}$ называется состоянием игры, если $x_i \in X_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$. При этом i – я проекция x_i вектора x называется стратегией i - го игрока, отвечающей состоянию x, а множество $X_i(x)$ – совокупность всех стратегий этого игрока, отвечающих указанному состоянию. Рассматриваемую игру будем, так же как и в «классическом» случае, называть игрой n лиц в нормальной форме. Итак, по определению, игрой n лиц в нормальной форме представляет объект

$$G = \left(\left(\tilde{X}_i\right)_{i=1}^{n}, (u_i)_{i=1}^{n}, (X_i)_{i=1}^{n}\right). \tag{1}$$

Состоянием равновесия в смысле Нэша игры G, определенной формулой (1), назовем вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, обладающий следующими свойствами:

1) $x_i \in X_i(x_1, x_2, ...x_n)$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ (т.е. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ – состояние игры G),

2) $u_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1},\ ...,\ \bar{x}_n) = \max\limits_{x_i \in X_i(\bar{x})} u_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1},\ ...,\ \bar{x}_n)$.

Теорема. Пусть игра $G = \left(\left(\tilde{X}_i\right)_{i=1}^{n}, (u_i)_{i=1}^{n}, (X_i)_{i=1}^{n}\right)$ обладает следующими свойствами:

1) каждое из множеств $\tilde{X}_i$ является выпуклым компактом в конечномерном пространстве,

2) каждая функция u_i непрерывна на множестве $\tilde{X} = \prod\limits_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$ и вогнута по переменной x_i (т.е. при любом $x \in \tilde{X}$ функция $\tilde{u}_i : \tilde{X}_i \to R^1_+$, определенная формулой $\tilde{u}_i(y) = u_i(x^{(i)}, y)$, является вогнутой),

3) при любом $x \in \tilde{X}$ множество $X_i(x)$ выпукло $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$,

4) отображение $X_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ непрерывно по Какутани. Тогда G обладает состоянием равновесия.

Заметим что, отображение a, непрерывное по Хаусдорфу, является непрерывным и по Какутани, т.е. является полунепрерывным и сверху и снизу. Поэтому в сформулированной теореме непрерывность по Какутани можно заменить с условием непрерывности по Хаусдорфу.

Используя результатов модели Эрроу – Дебре, можно показать что, описанную модель равновесие по Нэшу является оптимальным, т.е. лежит на границе множества допустимых ситуаций. Этот факт обосновывает известное положение экономической теории о том, что при простом товарном производстве автоматически обеспечивается сбалансированное и в некотором смысле гармоничное развитие экономики. Дело в том, что в условиях простого товарного производства потребители и производители достаточно мелки и описание их поведения по Нэшу представляется достаточно реалистичным.

Литература

1. **J.F. Nash.** *Equilibrium points in N-person games.* Proc. Nat. Acad. Sc. USA 36 (1950), 49 – 49.

2.**В.Л. Макаров., А.М. Рубинов.** *Математическая теория экономической динамики и равновесия.*–М.: Наука, 1973, 336 стр.

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

MATEMATIK ANALIZ VA MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARINING ZAMONAVIY MASALALARI

mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya

MATERIALLARI TO‘PLAMI. I qism

Termiz, 2026-yil, 21-22-sentyabr

Mas’ul muharrirlar:
Imamov Oybek Shanazarovich,

Amonov Bobur Baxtiyorovich

Musahhihlar:

Xo‘jaqulov J.R, Mamatmo‘minov D.T., Mirzayev F.S
Texnik muharrir:

Abdunazar BO‘RIYEV

Kompyuterda sahifalovchi:

To‘rabek KARAMATOV

Terishga: 15.09.2026-yilda berildi.
Bosishga 15.09.2026-yilda ruxsat etildi.
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. Ofset qog‘ozi.
Times New Roman garniturasi.
Shartli bosma tabog‘i 22,5 Adadi 50 nusxada. 364 bet.
MANZILI:“TerDU NMM” bosmaxonasi,
Termiz shahri, A.Navoiy ko‘chasi 42-uy.