

LOBACHEVSKIY TEKISLIGI KELI- KLEYN TALQININING SUN'IY INTELLEKTGA ASOSLANGAN VIZUAL KOGNITIV METODLARI

To'liqin Safarov,
Abdullah Kurudirek,
Tishk xalqaro universiteti, Iroq,
Sevinch Abdujabborova

Annotatsiya

Ushbu maqolada noyevklid geometriyani, xususan Lobachevskiy geometriyasini o'qitishda sun'iy intellekt texnologiyalaridan foydalanish masalasi ko'rib chiqilgan. Talabalar uchun Evklid geometriyasidan noyevklid fazolarga o'tish jarayonida yuzaga keladigan kognitiv qiyinchiliklar, ayniqsa parallellik va metrika tushunchalarini anglashdagi murakkabliklar tahlil qilingan. Keli-Kleyn modeli asosida "AI-Enhanced Projective Visualization (AEPV)" deb nomlangan vizual-kognitiv metodika taklif etilgan. O'quv jarayoni Bloom's Taxonomy asosida tahlil qilinib, har bir bosqichda sun'iy intellekt vositalarining roli yoritilgan.

Kalit so'zlar:

Lobachevskiy geometriyasi, Keli-Kleyn modeli, sun'iy intellekt (AI), vizual-kognitiv metod, noyevklid geometriya, giperbolik fazo, interaktiv o'qitish, matematik vizuallashtirish, Bloom's Taxonomy, ta'lim texnologiyalari

Аннотация.

В данной статье рассматривается вопрос использования технологий искусственного интеллекта в преподавании

неевклидовой геометрии, в частности геометрии Лобачевского. Анализируются когнитивные трудности, возникающие у студентов в процессе перехода от евклидовой геометрии к неевклидовым пространствам, особенно сложности в понимании понятий параллельности и метрики. На основе модели Кэли-Клейна предложена визуально-когнитивная методика под названием «AI-Enhanced Projective Visualization (AEPV)». Учебный процесс проанализирован на основе таксономии Блума, и освещена роль инструментов искусственного интеллекта на каждом этапе обучения.

Ключевые слова.

Геометрия Лобачевского, модель Кэли-Клейна, искусственный интеллект (ИИ), визуально-когнитивный метод, неевклидова геометрия, гиперболическое пространство, интерактивное обучение, математическая визуализация, таксономия Блума, образовательные технологии

Annotation.

This article examines the integration of artificial intelligence (AI) technologies in the

ЛОБАЧЕВСКИЙ ТЕКИСЛИГИ КЕЛИ-КЛЕЙН ТАЛҚИНИНИНГ СИ АСОСИДАГИ ВИЗУАЛ КОГНИТИВ МЕТОДЛАРИ

КЛЕЙН МОДЕЛИ
ВИЗУАЛЛАШТИРИЛИШИ

НЕЙРОН ТАРМОҚ
ТАҲЛИЛИ

МАЪЛУМОТЛАР
ОҚИМИ

КОГНИТИВ
СИГНАЛЛАРНИ
ҚАЙТА ИШЛАШ

ГЕОМЕТРИК
СТРУКТУРА

ПАРАМЕТРЛАР

НАТИЖАЛАР



teaching of non-Euclidean geometry, specifically Lobachevskian geometry. It analyzes the cognitive challenges students face during the transition from Euclidean geometry to non-Euclidean spaces, focusing on complexities in conceptualizing parallelism and metrics. Based on the Cayley-Klein model, a visual-cognitive methodology titled “AI-Enhanced Projective Visualization (AEPV)” is proposed. The educational process is analyzed through the framework of Bloom’s Taxonomy, highlighting the role of AI tools at each instructional stage.

Key words.

Lobachevskian geometry, Cayley-Klein model, artificial Intelligence (AI), visual-cognitive method, non-Euclidean geometry, hyperbolic space, interactive teaching, mathematical visualization, Bloom’s Taxonomy, educational technologies.

Noyevklid geometriyalarini o‘qitish geometriya fani-ning muxim qismlaridan biri hisoblanadi¹. Talabalar Evklid geometriyasining beshinchi aksiomasidan voz kechish va noyevklid fazolarni tasavvur qilishda kognitiv to‘siqlarga duch kelishadi. Lobachevskiy tekisligining Keli-Kleyn talqini bu borada eng qulay modellardan biri bo‘lsa-da, uning proyektiv metrikasi va masofalarni aniqlashda qo‘shimcha qiyinchiliklarga duch kelish mumkin².

Zamonaviy ta’limda Sun’iy intellekt (AI) shunchaki yordamchi vosita emas, balki kognitiv mapping (ongda xarita hosil qilish) vositasiga aylanmoqda. Ushbu maqolada biz AI algoritmlari yordamida Lobachevskiy tekisligi va unda aniqlangan metrika yordamida interaktiv o‘qitish metodikalarini ko‘rib chiqamiz.

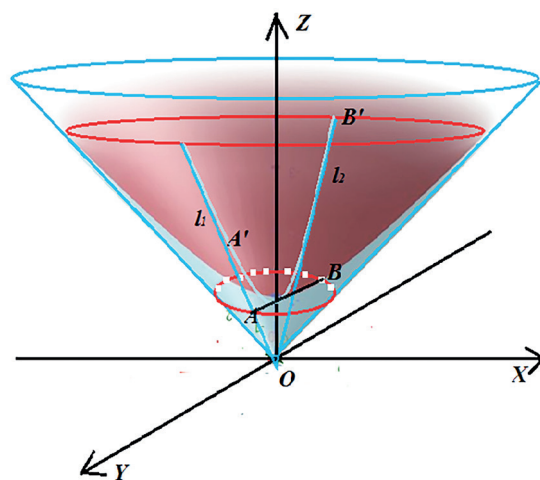
N.I.Lobachevskiy “Tasavvurdagi geometriya” nomli asarida birinchi marta 1826-yilda noyevklid geometriya haqida ma’ruza qilgan. Shundan so‘ng, Lobachevskiy geometriyasining yaratilishi haqidagi ma’ruzalar bir qator manbalarda bayon qilindi. Lobachevskiy geometriyasi o‘z o‘rniga va metodlariga ega bo‘lishi uchun, uning bir nechta talqini paydo bo‘ldi. Ayniqsa, Keli-Kleyn va Puankare nazariyalari alohida ahamiyatga ega³.

Ma’lumki, Lobachevskiy geometriyasining asosini uning parallellik aksiomasi orqali ko‘rish mumkin. Bunda Yevklid geometriyasidagi parallellik aksiomasidan farqli bo‘lgan aksiomalari Lobachevskiy geometriyasi uchun ham o‘rinlidir⁴.

Lobachevskiy aksiomasini tasavvur orqali anglash va tushunish talabalar uchun shu vaqtgacha egallagan bilimlari yetarli bo‘lmaydi. Ya’ni biz bilgan tekislik orqali bu aksiomani tasavvur qilish mumkin emas.

Lobachevskiy tekisligining talqinini Minkovskiy fazodagi mavhum radiusli sfera, aniqrog‘i ikki pallali giperboloidning bir pallasi va unga mos izotrop konus (nol radiusli sfera) dan foydalanamiz⁵.

Koordinatalar sistemasidan konus uchini koordinatalar boshiga keltiramiz. Oz o‘qi esa, konusning simmetriya markazida bo‘lsin (1-rasm).



1-rasm. Lobachevskiy tekisligi

Lobachevskiy tekisligining Keli-Kleyn modelini tuzamiz.

1) Ikki pallali giperboloidning (bir pallasi) ustida bajarilgan Lobachevskiy geometriyasidagi aksiomalarni Keli -Kleyn modeli bilan bog‘laymiz.

2) 1-rasmda konusni kesib o‘tgan P_z tekislik giperboloidning O' nuqtadagi urinma tekisligi bo‘lib, konus bilan chegaralangan qismi L doirani Lobachevskiy tekisligi deb ataymiz.

3) Giperboloidning A' nuqtasi L doira ichidagi A nuqtaga, giperboloid va P_z tekislikning kesishishidan hosil bo‘lgan b chiziq esa, shu doira ichidagi b' vatarga mos keladi. Natijada, Minkovskiy fazosidagi sfera ustidagi geometriya, ya’ni Lobachevskiy tekisligi $z=l$ tekislikning izotrop konus bilan kesishishidan hosil bo‘lgan doira ichki nuqtalariga bir qiymatli proyeksiyalanadi.

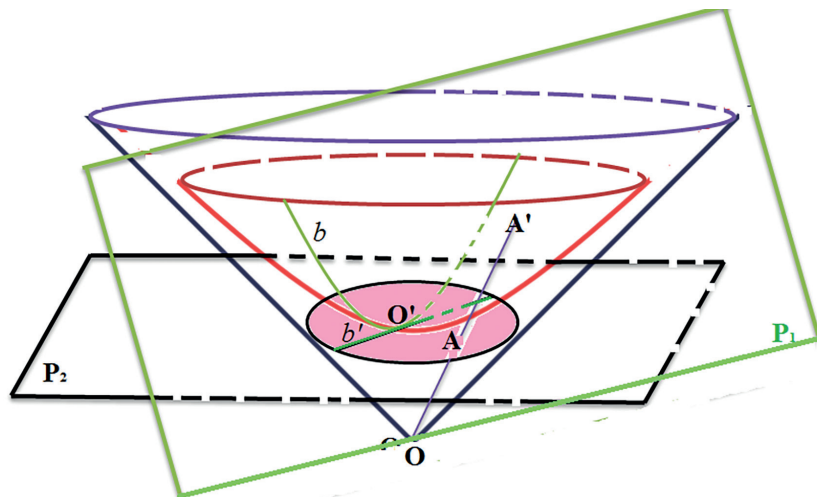
1 Abdullah Kurudirek, Safarov T. Bringing Life to Mathematics Through Supporting Linear Algebra and Non-Euclidean Geometries. AIP scopus. 2026 y

2 Artikbayev A. Safarov T.N. Yangi geometriya asoslari. O‘quv qo‘llanma Termiz-2023 y 152 b.

3 Xatamov I.M, Fayzullayev Sh. Lobachevskiy tekisligining giperboloid ustidagi talqini. – T.: “Fizika, matematika va informatika” jurnali, 2019 yil 1-son.

4 Artikbayev A, Safarov T. “Geometriya asoslari” fanini o‘qitishga zamonaviy yondashish haqida. Fizika, matematika va informatika jurnal. №2/ 2023. B. 3-8

5 Nijdam, T., et al. “HIVE: A Hyperbolic Interactive Visualization Explorer for Representation Learning”. ICCVW Proceedings (2025).



2-rasm.Lobachevskiy tekisligi

4) Lobachevskiy tekisligi nuqtalari doira ichki nuqtalariga, to'g'ri chiziq esa, doira vatarlariga o'tadi, doirani chegaralovchi aylana Lobachevskiy tekisligining cheksiz uzoqlikdagi nuqtalarining aksi bo'ladi.

Hosil bo'lgan tekislik Lobachevskiy tekisligining Keli-Kleyn talqini deb ataladi.

Biz taklif etayotgan metodika "AI-Enhanced Projective Visualization" (AEPV) deb nomlanadi⁶. Metodika ikki bosqichdan iborat:

1. Matematik modelni AIga yuklash: Keli-Kleyn modelida masofa quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\theta = \frac{1 - \frac{x_1 x_2}{z_1 z_2} - \frac{y_1 y_2}{z_1 z_2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{z_1}\right)^2 - \left(\frac{y_1}{z_1}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_2}{z_2}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{z_2}\right)^2}} \quad (1)$$

1) Konus uchi O koordinatalar boshi $z=1$ giperboloidning urinma tekisligini o'tkazamiz (3-rasm).

2) Giperboloid ustidagi $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar tanlab, ular orasidagi masofani θ bilan belgilaymiz. Bu masofa konus uchidan A va B nuqtalarga yo'nalgan radius vektorlar orasidagi giperbolik burchakka, ya'ni $\theta = \angle AOB$ bo'lgan kattalikka teng bo'ladi.

3) A va B nuqtalarning urinma tekislikdagi mos nuqtalarini $A'\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}, 1\right)$ va $B'\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}, 1\right)$ ko'rinishda yozib olamiz, natijada

tenglik hosil bo'ladi.

4) Agar $\frac{x_1}{z_1} = u_1$, $\frac{x_2}{z_2} = u_2$ va $\frac{y_1}{z_1} = v_1$, $\frac{y_2}{z_2} = v_2$, va, deb olsak, ya'ni urinma tekislikdagi u, v koordinatalarga

nisbatan (1) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

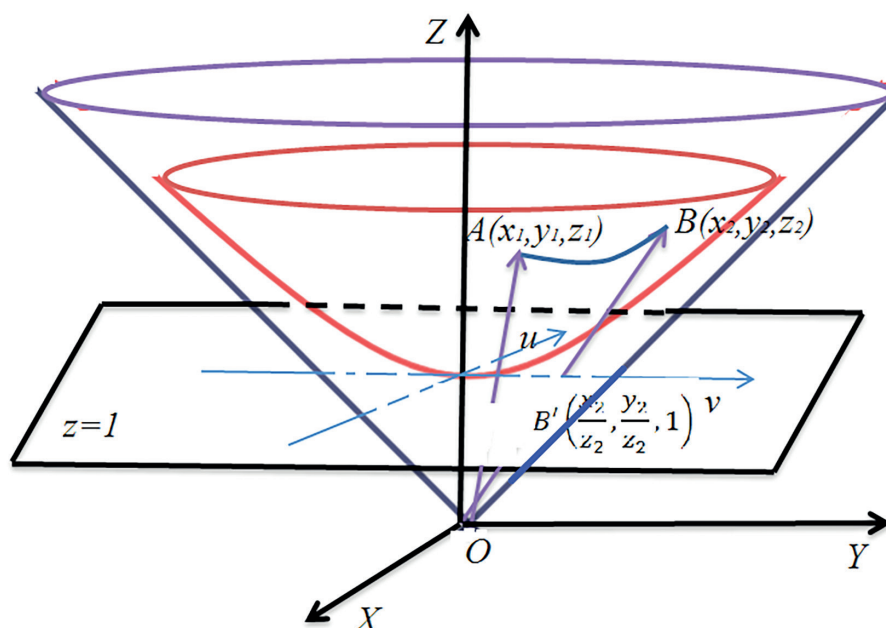
$$\theta = \frac{1 - u_1 u_2 - v_1 v_2}{\sqrt{1 - u_1^2 - v_1^2} \sqrt{1 - u_2^2 - v_2^2}} \quad (2)$$

(2) Lobachevskiy tekisligidagi masofa deb ataladi.

1-rasmda ko'rsatilgan O nuqtadan chiquvchi nurlarning konus sirtini P_1, P_2

tekisligiga proyeksiyalash jarayoni AI tomonidan 3D animatsiya ko'rinishiga keltiriladi. Talaba konusning qiyaligini o'zgartirganda, AI avtomatik ravishda doiradagi metrik o'zgarishlarni qayta hisoblaydi.

6 Safarov T.N. "Geometriya asoslari" fani metodikasini takomillashtirish". "Urganch davlat pedagogika instituti axborotnomasi" ilmiy-nazariy va metodik jurnal. №1. 2025. Urganch – B. 286-292.

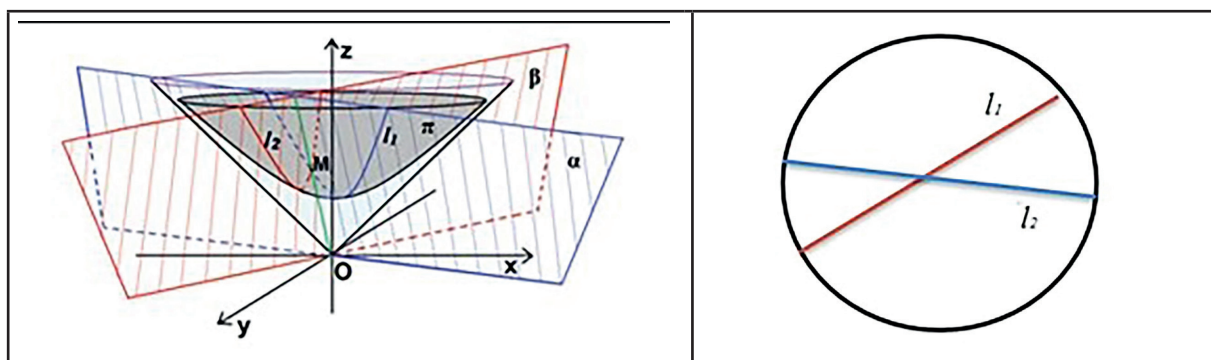


3-rasm. Lobachevskiy tekisligida metrika

Quyidagi jadvalda Lobachevskiy tekisligining Keli-Kleyn talqini AI-vizualizator platformasi bilan ishlash jarayoni keltiramiz.

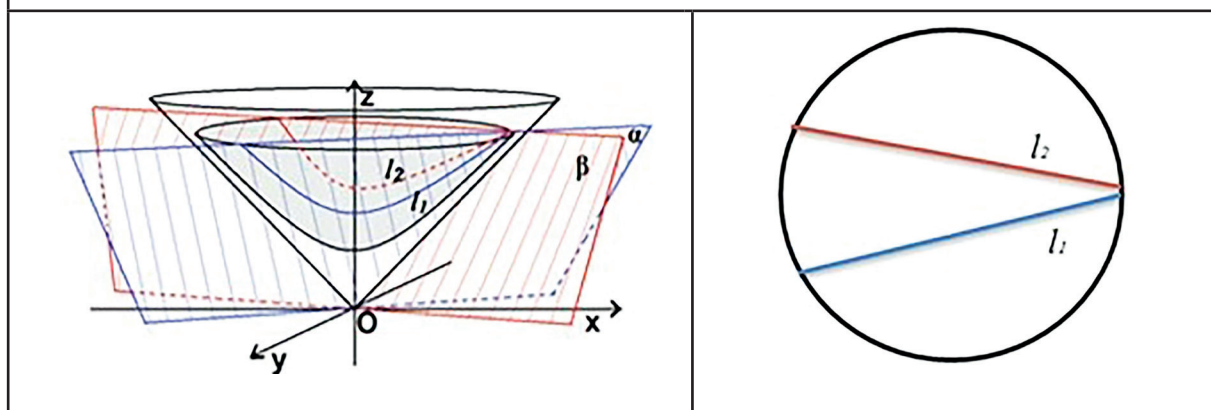
1-jadval

1.Kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar	
Sun‘iy intellektga asoslangan vizual-kognitiv metodlar doirasida Keli-Kleyn talqini giperboloid yuzasidagi chiziqlarni yuqori aniqlikda tahlil qiladi. Bunda giperboloiddan tashqarida kesishuvchi , va tekisliklar asimptotik konusning uchi orqali o‘tib, sirtida umumiy nuqtaga ega bo‘lmagan Lobachevskiy to‘g‘ri chiziqlarini hosil qiladi. AI algoritmlari ushbu holatni «kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar» sifatida aniq vizuallashtirib, murakkab matematik abstraksiyani kognitiv simulyatsiyaga aylantiradi. Bu yondashuv ultra-parallel chiziqlarning o‘zaro joylashuvini dinamik formatda va intuitiv darajada anglash imkonini beradi.	
AI-vizualizatsiya	An’anaviy
2. To‘g‘ri chiziqlarning kesishishi	
Sun‘iy intellektning vizual-kognitiv metodlari yordamida giperboloid ichidan va asimptotik konus uchi orqali o‘tuvchi tekisliklar kesishishi chuqur tahlil qilinadi. Ushbu modelda va tekisliklari giperboloid yuzasida umumiy nuqtaga ega bo‘lib, bu nuqtada Lobachevskiy to‘g‘ri chiziqlari o‘zaro kesishadi. AI tizimlari ushbu geometrik bog‘liqlikni uch o‘lchamli fazoda kognitiv vizuallashtirib, «kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar» fenomenini aniq ko‘rsatib beradi. Natijada, matematik abstraksiya intellektual algoritmlar orqali vizual simulyatsiya qilinib, nuqtalar va chiziqlarning o‘zaro joylashuvi haqidagi kognitiv tasavvurni sezilarli darajada kengaytiradi.	



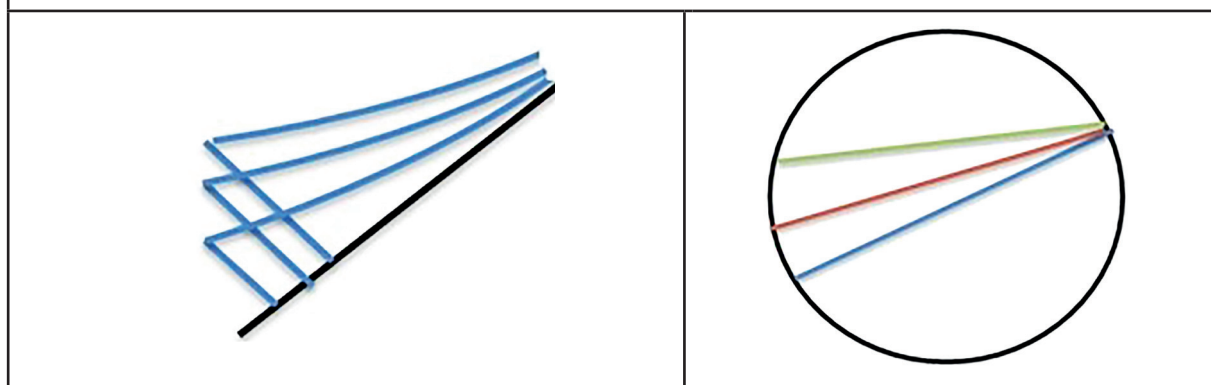
3.Parallel to'g'ri chiziqlar

Sun'iy intellektning vizual-kognitiv tahlili doirasida parallel to'g'ri chiziqlar asimptotik konusning yasovchisi orqali o'tuvchi, va tekisliklar kesishmasi sifatida modellashtiriladi. Mazkur holatda Yevklid ma'nosidagi kesishish chizig'i giperboloidning asimptotik yuzasida yotib, Lobachevskiy geometriyasidagi va chiziqlari uchun umumiy asimptotani hosil qiladi. AI algoritmlari ushbu giperbolalarning na kesishuvchi, na kesishmaydigan, balki cheksizlikda tutashuvchi «parallelizm» holatini aniq vizuallashtiradi. Ushbu kognitiv simulyatsiya geometrik ob'ektlarning o'ziga xos dinamikasini namoyon etib, murakkab topologik tushunchalarni vizual mantiq darajasiga olib chiqadi.



4.O'zaro parallel to'g'ri chiziqlar

AI vizual-kognitiv tahlili asimptotik konusning yagona yasovchisi orqali o'tuvchi tekisliklar dastasini dinamik model sifatida namoyon etadi. Ushbu tekisliklar giperboloid yuzasini o'zaro parallel bo'lgan Lobachevskiy to'g'ri chiziqlari bo'ylab kesib o'tib, bir yo'nalishga ega bo'lgan chiziqlar to'plamini hosil qiladi. Sun'iy intellekt tizimlari ushbu dasta ichidagi har bir giperbolik egri chiziqni umumiy asimptotik nuqtaga intiluvchi struktura sifatida vizuallashtiradi. Bu kognitiv metodika parallelizm tushunchasini cheksizlikdagi yagona bog'liqlik nuqtasi orqali modellashtirib, Lobachevskiy tekisligining geometrik dastasini mantiqiy simulyatsiyaga aylantiradi.



5. Lobachevskiy aksiomasi bajarilishining ikkinchi holi

Lobachevskiy aksiomasi AI vizual-kognitiv metodlari orqali uchyoq qirralarining giperboloid va asimptotik konus bilan o'zaro joylashuvi asosida modellastiriladi. Bunda giperboloid ichidagi qirra sirtida nuqtani shakllantirsa, konus yasovchilarida yotuvchi va qirralar parallelizm chegaralarini belgilaydi. Sun'iy intellekt algoritmlari, va tekisliklari kesishmasidan hosil bo'lgan va to'g'ri chiziqlarini kognitiv simulyatsiya qilib, nuqtadan o'tuvchi ikki chiziqning ga parallel ekanligini yaqqol namoyon etadi. Ushbu intellektual yondashuv Lobachevskiy aksiomasining giperboloid modelidagi mohiyatini vizual mantiq darajasiga olib chiqib, noyevklid geometriya qonuniyatlarini dinamik formatda isbotlaydi.

