ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ

С УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО НА ОТРЕЗКЕ ВЫРОЖДЕНИЯ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЕЙ ВНУТРЕННЕЙ ОТРЕЗКЕ ОБЛАСТИ, ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Мирсабуров М.,
доктор физико-математических наук, профессор,
Маматмуминов Д.,
базовый докторант

Аннотация.

Для уравнения** $-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0$, **в характеристическом треугольнике доказана однозначная разрешимость задачи с условием Бицадзе-Самарского на отрезке вырождения уравнения и параллельной ей внутренней отрезке лежашей внутри области.

Ключевые слова:

Сингулярный коэффициент, видоизмененная задача Коши, функциональное уравнение с двумя сдвигами, методы итераций и последовательных приближений, функциональный ряд, мажорантный ряд, равномерная сходимость.

Введение:

В работе А.В.Бицадзе, А.А.Самарский [1] для уравнения Лапласа в прямоугольной области впервые была сформулирована и исследована задача с нелокальным условиям, связывающим значения искомого решения на части границы области со значением на отрезке внутренней прямой, в точках которой искомая функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению.

Настоящая работа посвящена исследованию, для вырождающегося гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом, задачи с аналогом условия Бицадзе-Самарского, который связывает значения искомого решения на отрезке вырождения и параллельной ей отрезке лежащей в характеристическом треуголник D. Задача Бицадзе-Самарского в области D для уравнения (1) с нелокальными условиями на граничной и в параллельной ей двух внутренних характеристиках исследована в работе [2].

1. Постановка задачи BS (Бицадзе-Самарского). Пусть $D -$ конечная односвязная область полуплоскости $y<0$, ограниченная отрезком AB оси $y=0$, характеристиками AC и BC уравнения

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянная $m>0, A=A(-1,0), B=B(1,0)$.

На отрезке AB рассмотрим точку $E=E(c,0)$, где $c \in I=(-1,1) -$ интервал оси $y=0$, и введем линейную функцию $y=q(x)=ax-b$, отображающее отрезок $[-1.1]$ на отрезок $[-1,c]$ где $a=(1+c)/2, b=(1-c)/2$, причем $q(-1)=-1, q(1)=c$.

Обозначим через

$$\omega(q(x)) = ax_0 - i\eta, \tag{2}$$

аффикс точки пересечения характеристики $x-(2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2}=q(x_0)$ с прямой $y=-\eta$, здесь $-\eta=-(b(m+2)/2)^{2(m+2)} -$ ордината точка пересечения характеристики $x-(2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2}=c$ исходящий из точки $E(c,0)$ с граничной характеристикой BC. Отметим что $\omega(q(x_0))$ биективно отображает отрезок AB оси $y=0$ на отрезок A_0B_0 прямой $y=-\eta$, где $A_0(-a,-\eta) \in AC, B_0(b,-\eta) \in BC$.

Задача BS. В области D найти регулярное решение $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(\bar{D})$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)|_{AC} = \psi(x), \quad x \in [-1,0]; \tag{3}$$

$$u(x,0) = \mu u[\omega(q(x))] + \rho(x), \quad x \in [-1,1], \tag{4}$$

где $\mu -$ некоторая положительная постоянная, $\psi(x), \rho(x) \in C^2(\bar{I}) -$ заданные функции.

2. Исследование задачи BS.

Теорема 1. *Задача BS при выполнении условия*

$$\delta_1 + \delta_2 < 1, \tag{5}$$

однозначна разрешима. где $\delta_1 = a(\mu - 1)/2$, $\delta_2 = a(\mu + 1)/2$

Доказательство. Формула Даламбера [3], дающей в области D для уравнения (1) решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x), x \in \bar{I}; \qquad \lim_{y\to -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in I;$$

имеет вид

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right) + \tau\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)\right] -$$

$$-\frac{(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\int_{-1}^{1} \nu\left(x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)dt \tag{6}$$

Из краевого условия (3) в силу формулы (6) имеем

$$\frac{1}{2}[\tau(-1) + \tau(2x+1)] - \frac{1}{2}\int_{-1}^{2x+1} \nu(z)dz = \psi(x), \quad x \in [-1,0] \tag{7}$$

В (7) $2x + 1 (x \in [-1,0])$ заменив на $x \in [-1,1]$ с учетом $\tau(-1) = 0$ имеем

$$\tau(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} \nu(z)dz = 2\psi((x-1)/2), \quad x \in [-1,1]. \tag{8}$$

Здесь выполнив операцию дифференцирования имеем

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'((x-1)/2), \quad x \in [-1,1] \tag{9}$$

Соотношение (9) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенное на отрезок $[-1,1]$ оси $y = 0$ из области D.

Тепер из формулы (6), с учетом (2) нетрудно вычислить, что

$$u[\omega(q(x))] = \frac{1}{2}[\tau(ax+b) + \tau(ax-b)] - \frac{1}{2}\int_{ax-b}^{ax+b} \nu(z)dz \tag{10}$$

Подставляя в краевое условие (4) значения для $u[\omega(q(x))]$ из (10) имеем

$$\tau(x) = \frac{\mu}{2}[\tau(ax+b)] + \frac{\mu}{2}[\tau(ax-b)] - \frac{1}{2}\int_{ax-b}^{ax+b} \nu(z)dz + \rho(x). \tag{11}$$

и дифференцируя по x соотношение (11) получим

$$\tau'(x) = \frac{a\mu}{2}\tau'(ax+b) + \frac{a\mu}{2}\tau'(ax-b) - \frac{a}{2}\nu(ax+b) + \frac{a}{2}\nu(ax-b) + \rho'(x), \tag{12}$$

Соотношение (12) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенное на отрезок $[-1,1]$ оси $y = 0$ из области D.

Из соотношений (10) и (12) исключая $\tau'(x)$ получим:

$$\nu(x) = \delta_1 \nu(ax+b) + \delta_2 \nu(ax-b) + F(x) \tag{13}$$

где

$$F(x) = \rho'(x) - \psi'(x) + \frac{a\mu}{2}(\psi'(ax+b) + \psi'(ax-b))$$

известная функция. Уравнения (13) является функциональным уравнением с двумя сдвигами $ax + b$ и $ax - b$

Уравнение (13) запишем в виде

$$\nu(x) = \delta_1 \nu(\lambda(x)) + \delta_2 \nu(r(x)) + F(x), \tag{14}$$

где $\lambda(x) = ax + b, r(x) = ax - b.$ Для решения уравнения (14) применим комбинированный метод последовательных приближений и итераций [2].

Для построения членов последовательности $v_0(x), v_1(x), \dots, v_n(x), \dots$ используем рекуррентное соотношение

$$v_n(x) = \delta_1 v_n(\lambda(x)) + \delta_2 v_{n-1}(r(x)) + F(x), x \in \bar{I}, n = 1,2\dots, \quad (15)$$

В качестве нулевого приближения $v_0(x)$ примем решение функционального уравнения

$$v_0(x) = \delta_1 v_0(\lambda(x)) + F(x), x \in \bar{I}, \quad (16)$$

Решение функциональное уравнение (16) будем искать в классе функций ограниченных в точке $x = 1.$ Если отказатся от этого требование, то соотвествующие однородное функциональное уравнение (16) (с $F(x) = 0$) может иметь нетривиальное решение.

Пример. Пусть $\lambda(x) = ax + b, a + b = 1, a - b = c_1.$ Тогда $\delta_1 = a(\mu - 1)/2$ и соотвествуюущее однородное уравнение (16) (с $F(x) = 0$) примет вид

$$v_0(x) = \delta_1 v_0(\lambda(x)) \quad (17)$$

Рассмотрим функцию $v(x) = (1 - x)^\alpha,$ подберем α так, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению (17). Нетрудно проверит, что

$$v_0(\lambda(x)) = (1 - \lambda(x))^\alpha = a^\alpha (1 - x)^\alpha \quad (18)$$

В силу (18) из однородного функционального уравнения (17) получим уравнение

$$\delta_1 a^\alpha - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha = -\log_a \delta_1$$

и согласно (5) заключаем, что найденные $\alpha < 0.$ Следовательно, решение $v(x) = (1 - x)^\alpha$ однородного функционального уравнения (17) не ограничено в окрестности точки $x = 1.$ Таким образом, клас решений, где ищется решение функционального уравнения (17), существенен.

Функциональное уравнение (16) будем решать методом итерацией. В (16) заменив x на $\lambda(x),$ получим

$$v_0(\lambda(x)) = \delta_1 v_0(\lambda(\lambda(x))) + F(\lambda(x)), x \in \bar{I}, \quad (19)$$

Подставляя теперь $v_0(\lambda(x))$ из (19) в (16), имеем

$$v_0(x) = \delta_1^2 v_0(\lambda_2(x)) + \delta_1 F(\lambda_1(x)) + F(x), x \in \bar{I}, \quad (20)$$

здесь $\lambda_1(x) = \lambda(x), \lambda_2(x) = \lambda_1(\lambda_1(x)).$ Соотношение (20) является первой итерацией уравнения (16). Продолжая этот процесс, для $n -$ ой итерации имеем

$$v_0(x) = \delta_1^{n+1} v_0(\lambda_{n+1}(x)) + \sum_{k=0}^{n} \delta_1^k F(\lambda_k(x)), x \in \bar{I}, \quad (21)$$

здесь $\lambda_0(x) = x, \lambda_{n+1}(x) = \lambda_n(\lambda_1(x)) = \lambda_1(\lambda_n(x)), \lambda_k(1) = 1, k \in \overline{1,n}.$

Заметим, что в силу (5),

$$\lim_{n\to\infty} \delta_1^n = 0. \quad (22)$$

Так как $\lambda(x) > x, \lambda(1) = 1,$ то $\lambda_n(x) = \lambda_{n-1}(\lambda_1(x)) = \lambda_1(\lambda_{n-1}(x)) > \lambda_{n-1}(x)$ т.е. функциональная последовательность $\{\lambda_n(x)\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху единицей, т.е. $\lambda_n(x) \le 1, \forall x \in \bar{I}$. Следовательно, по теореме о пределе монотонно возрастающей и ограниченной последовательности, последовательность $\{\lambda_n(x)\}$ сходится к некоторой функции $\lambda^0(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x) = \lambda^0(x), \quad x \in \bar{I}. \quad (23)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $\lambda_n(x) = \lambda_1(\lambda_{n-1}(x))$ получим $\lambda^0(x) = \lambda_1(\lambda^0(x))$ и отсюда заключаем, что $\lambda^0(x) = 1, \forall x \in \bar{I}$, так как $\lambda(x) = \lambda_1(x)$, имеет единственную неподвижную точку $x = 1$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x) = \lambda^0(x) = 1, \quad \forall x \in \bar{I}. \tag{24}$$

В соотношение (21) переходя к пределу при $n \to \infty$, с учетом (22)-(24) и ограниченности значения $v_0(1)$ получим

$$v_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_1^k F(\lambda_k(x)) \in C(\bar{I}) \tag{25}$$

- решение функционального уравнения (16).

Нетрудно убедиться, что

$$|v_0(x)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \delta_1^k |F(\lambda_k(x))| \le \sum_{k=0}^{\infty} M\delta_1^k = \frac{M}{1-\delta}, \quad x \in \bar{I} \tag{26}$$

где $M = \max_{x\in\bar{I}}|F(x)|$. Следовательно, в силу (26) функциональный ряд правой части (25) сходится равномерно, и, в силу непрерывности $F(x)$ на $\bar{I}$, заключаем, что $v_0(x) \in C(\bar{I})$. Нетрудно так же убедиться, что $v_0(x) \in C^2(\bar{I})$

Теперь в рекуррентном соотношении (15) полагая $n = 1$, получим функциональное уравнение для определения $v_1(x)$:

$$v_1(x) = \delta_1 v_1(\lambda(x)) + \delta_2 v_0(r(x)) + F(x) \quad x \in \bar{I}, \tag{27}$$

здесь $v_0(x) -$ известная функция, определенная равенством (25).

Применяя метод итераций к этому функциональному уравнению, как и выше, получим решение уравнения (27) в виде

$$v_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_1^k \delta_2 v_0(r(\lambda_k(x))) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_1^k F(\lambda_k(x)) \in C(\bar{I}). \tag{28}$$

где $v_0(r(\lambda_k(x))) -$ известная величина определяемая по формуле (25).

Нетрудно убедиться, что функциональные ряды правой части (28) сходятся равномерно.

Последовательно продолжая этот процесс, нетрудно найти, что

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_1^k \delta_2 v_{n-1}(r(\lambda_k(x))) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_1^k F(\lambda_k(x)) \in C(\bar{I}). \tag{29}$$

В (29) $v_{n-1}(r(\lambda_k(x))) -$ известная величина.

Таким образом, мы построили функциональную последовательность

$$v_0(x), v_1(x), \dots, v_n(x) \dots \tag{30}$$

Теперь докажем, что функциональная последовательность (30) сходится равномерно. Для этого рассмотрим функциональный ряд

$$v_0(x) + [v_1(x) - v_0(x)] + [v_2(x) - v_1(x)] + \dots + [v_n(x) - v_{n-1}(x)] + \dots \tag{31}$$

Найдем мажорантный ряд для функционального ряда (31). Как и в работе [2] легко найти оценку для членов функциональной последовательности

$$|v_n(x) - v_{n-1}(x)| \le \frac{M}{\delta_2}\left(\frac{\delta_2}{1-\delta_1}\right)^{n+1}, \quad x \in [-1,1] \tag{32}$$

В силу (32) функциональный ряд (31) мажорируется числовым рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\delta_2}\left(\frac{\delta_2}{1-\delta_1}\right)^{n+1}$, и в силу (5) этот ряд является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, следовательно, ряд (31) сходится равномерно на отрезке $\bar{I}$.

Следовательно, функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ сходится равномерно, т.е. существует

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x), \quad \forall x \in \bar{I},$$

и $v(x) \in C(\bar{I})$.

Таким образом, мы нашли $v(x)$. Теперь найдем $v'(x)$, для этого, продифференцировав уравнение (14) по переменной x имеем

$$v'(x) = a\delta_1 v'(\lambda(x)) + a\delta_2 v'(r(x)) + F'(x), \quad x \in \bar{I}, \tag{33}$$

т.е. мы получили функциональное уравнение с двумя сдвигами относительно неизвестной функции $v'(x)$. Так как $0 < a < 1$, то, в силу (5), $a\delta_1 + a\delta_2 < 1$, следовательно, уравнения (33) исследуются как и уравнение (14) и можно найти $v'(x) \in C(\bar{I})$. Аналогично, находится и $v''(x) \in C(\bar{I})$. Таким образом, мы нашли $v(x) \in C^2(\bar{I})$, далее из (8) находим $\tau(x)$, и решение задачи BS восстанавливается по формуле Даламбера (6). Теорема 1 доказана.

Литература

1. Бицадзе А.В.,Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 4(185), 739-740. (1969)
2. Мирсабурова Г. М. Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений// Известия вузов. Математика. 6, 54-59. (2022)
3. Мирсабуров М. Задача с аналогом условия на Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярном коэффициентом. // Дифференц. уравнения. 6(53), 778-788. (2017)