

ΦΟ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

ДЛЯ ЧИСЛА
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА
В ВИДЕ СУММЫ
КВАДРАТОВ ЧЕТЫРЁХ
ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Аллаков И.,
доктор физико-математических наук, профессор,
Имамов О.,
базовый докторант

Аннотация.

В работе доказана, асимптотическая формула для чисел представления натурального числа в виде суммы квадратов четырех простых чисел. В качестве следствия получена новая оценка для количества представлений заданного достаточно большого натурального числа в виде суммы квадратов четырех простых чисел, а также оценена мощность множества натуральных чисел, которые нельзя представить в указанном виде

“

(исключительное множество задачи). Полученный результат в определенном смысле улучшает и дополняет ранее известные результаты в этой области. При доказательстве основного результата используется круговой метод Харди–Литтлвуда в варианте И.М. Виноградова.

Ключевые слова:

исключительное множество, количество представлений, круговой метод, оценка, простые числа, тригонометрическая сумма.

Введение.

Известно, что Хуа-Ло-Кена (см. стр.110, [1]) доказал, что каждое достаточно большое целое число

$n \equiv 5 \pmod{24}$ представимо в виде суммы пяти квадратов простых чисел. Информацию о результатах, полученных в этом направлении за последние годы можно найти в работах Wang Y. H. [2], Аллаков И., Музропова Н.С. [3]. Учитывая результат Хуа-Ло-Кена и утверждение Ж. Л. Лагранжа о сумме четырех квадратов разумно, предполагать, что каждое достаточно большое число $n \equiv 4 \pmod{24}$ можно представить в виде суммы

четырех квадратов простых чисел, то есть в виде

$$n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2, \quad (1)$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 — простые числа.

Несмотря на то, что в направлении решений этой задачи имеется достаточно много работ (см. [4]) эта задача остается нерешенной. В 2000 году J. Y. Liu и M. C. Liu [5] доказал, что если $N \geq 2$ и $U(N)$ — множество положительных целых чисел $n \equiv 4 \pmod{24}$, $n \leq N$ которые нельзя представить в виде (1), тогда справедлива оценка

$$E(N) = \text{card}U(N) \ll N^\theta, \text{ где } \theta > 13/15. \quad (2)$$

Ранее Хуа [1] и W. Schwarz [6] доказали, что, $E(N) \ll N \log^{-A} N$ для любого $A > 0$. Отметим, также P.Shields [7], V.A.Plaksin [8] и E.B.Kovalchik [9] получили асимптотическую формулу в этой задаче, которая справедлива для всех $n \equiv 4 \pmod{24}$ $n \leq N$, за исключением не более чем

$$E(N) < N \exp(-c_1 \sqrt{\log N})$$

значения из них, где c_1 — абсолютная постоянная.

Пусть, далее, $L = \log N$, $C(N) = c_2 (\log \log N)^{-1}$, $c_1, c_2, \dots$ — абсолютные постоянные, $e(n\alpha) = e^{2\pi i n \alpha}$, α — действительное число.

$$\text{Положим } r(n) = \sum_{\substack{n=p_1^2+\dots+p_4^2 \\ p_i^2 \leq N, i=1,4}} (\log p_1) \cdots (\log p_4), \quad (3)$$

$$R(n) = \sum_{\substack{n=p_1^2+\dots+p_4^2 \\ p_i^2 \leq N, i=1,4}} 1. \quad (4)$$

Тогда в силу (3) и (4) имеем

$$r(n) \leq \frac{1}{16} (\log^4 N) R(n). \quad (5)$$

Поэтому

$$R(n) \geq \frac{16}{\log^4 N} r(n). \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что если $r(n) > 0$, тогда для n существует представление в виде (1). В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если N — достаточно большое число тогда,

$$E(N) \ll N^{\frac{13}{15} + 4C(N)}, \quad (7)$$

и для $n \notin U(n)$

$$r(n) = \frac{\pi^2}{16} \mathfrak{S}(n)n + O(NL^{-1}), \quad (8)$$

где $\mathfrak{S}(n) \gg 1$ — сингулярный ряд задачи.

Следствие. Для $R(n)$ — числа представлений заданного $N/2 < n \leq N$, $n \equiv 4 \pmod{24}$, в виде (1) справедлива оценка

$$R(n) > c_2 \frac{n}{\log^4 n} \left(1 - c_3 \frac{1}{\log n} \right)$$

Полученный результат является улучшением ранее полученных результатов [5-9]. Отметим, также что после известной работы H.L. Montgomery and R.C. Vaughan [10] идея о возможности получение оценки снизу для количества представления чисел в указанном виде впервые была предложена Б.М. Бредихином (см. [11]).

Обозначения и краткая описания метода. Сформулированную теорему докажем круговым методом Харди-Литтлвуда [12]. При этом будем использовать схожую схему, которая была использована нами в работе [13].

Для этого нам необходимы следующие обозначения: через, $\mu(n)$ и $\Lambda(n)$ обозначим функцию Эйлера, Мебиуса и Мангольдта, соответственно. $d(n)$ — число делителей натурального числа n , а $d_v(n)$ — обобщенная функция делителей, то есть число решений уравнения $n = n_1 n_2 \cdots n_v$ в натуральных числах. Через $(a, b, \dots)$ и $[a, b, \dots]$ обозначим НОД и НОК чисел $a, b, \dots$

Пусть $A \geq 16$

$$P = N^{2/15} / L^A, \quad Q = N / (PL^{14}). \quad (9)$$

По теореме Дирихле о рациональном приближении каждую $\alpha \in [Q^{-1}, 1 + Q^{-1}]$ можно представить в виде

$$\alpha = aq^{-1} + \eta, \quad |\eta| \leq (qQ)^{-1}, \quad (10)$$

где a, q целые числа с условием $1 \leq a \leq q \leq Q$ и $(a, q) = 1$. Интервал $\alpha \in [Q^{-1}, 1 + Q^{-1}]$

делим на две части следующим образом. Пусть $\mathcal{M}(a, q)$ множество α , удовлетворяющее условию (10) и $q \leq Q$. Тогда множества M и M' определим следующим образом:

$$M = \bigcup_{q \leq P} \bigcup_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \mathcal{M}(a, q), \quad M' = [Q^{-1}, 1 + Q^{-1}] \setminus M. \quad (11)$$

M и M' будем называть большой дугой, а M' малой дугой. Так как $2P \leq Q$, то интервалы $\mathcal{M}(a, q)$ и $\mathcal{M}(a', q')$ не пересекаются. Пусть N – достаточно большое целое число и $N/2 < n \leq N$, $n \equiv 4 \pmod{24}$. Положим

$$S(\alpha) = \sum_{p^2 \leq N} (\log p) e(\alpha p^2). \quad (12)$$

Тогда имеем

$$r(n) = \int_0^1 S^4(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha \quad (13)$$

Действительно в силу (3) и (12) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 S^4(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha &= \int_0^1 \sum_{p_1^2, \dots, p_4^2 \leq N} (\log p_1) \cdots (\log p_4) e(\alpha(p_1^2 + \dots + p_4^2 - n)) d\alpha = \\ &= \sum_{p_1^2, \dots, p_4^2 \leq N} (\log p_1) \cdots (\log p_4) \int_0^1 e(\alpha(p_1^2 + \dots + p_4^2 - n)) d\alpha = r(n). \end{aligned}$$

В силу (11) интеграл на правой части равенства (13) можно представить в виде

$$r(n) = \int_0^1 S^4(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \left(\int_M + \int_{M'} \right) S^4(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = r_1(n) + r_2(n), \quad (14)$$

где

$$r_1(n) = \int_M S^4(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha, \quad r_2(n) = \int_{M'} S^4(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha.$$

Здесь $r_1(n)$ – главный член, а $r_2(n)$ – остаток.

Оценка интеграла по малой дуге. Чтобы оценить вклад малых дуг, отметим, что каждое $\alpha \in M'$ можно записать в виде (10), для которых выполняется условие

$$P < q \leq Q, \quad 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1. \quad (15)$$

Применяя теорему 2 А. Ghosha [14] (см. также [15]), находим

$$S(\alpha) \ll N^{1/2+C(N)} (q^{-1} + N^{-1/4} + qN^{-1})^{1/4} \quad \text{где } C(N) = \frac{c_2}{\log \log N}.$$

Отсюда, в силу условия (15) и (9), получим

$$(16) \quad S(\alpha) \ll N^{1/2+C(N)} (P^{-1} + N^{-1/4} + QN^{-1})^{1/4} \ll N^{1/2+C(N)} P^{-1/4} \left(1 + \frac{P}{N^{1/4}} + \frac{QP}{N} qN^{-1}\right)^{1/4} \ll N^{1/2+C(N)} P^{-1/4},$$

так как

$$\text{Также имеем} \quad \frac{P}{N^{1/4}} = \frac{N^{\frac{2}{15} - \frac{1}{4}}}{L^A} = \frac{N^{\frac{7}{15}}}{L^A} < 1, \quad \frac{QP}{N} = \frac{N}{L^{14}N} = \frac{1}{L^{14}} < 1.$$

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^4 d\alpha = \int_0^1 |S(\alpha) \overline{S(\alpha)}|^2 d\alpha = \sum_{p_i^2 \leq N, i=1,4} (\log p_1) \cdots (\log p_4) \int_0^1 e\left((p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2)\alpha\right) d\alpha \leq (\log N)^4 \sum_{\substack{p_1^2 + p_2^2 = p_3^2 + p_4^2 \\ p_i^2 \leq N, i=1,4}} 1.$$

Сумма на правой части последнего неравенства в силу (6.10) работы [5] оценивается как $O(NL^2)$ поэтому

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^4 d\alpha \ll NL^6. \quad (17)$$

Поэтому применяя неравенство Бесселя и из оценки (16) и (17) получим

$$\begin{aligned} \sum_{N/2 < n \leq N} \left| \int_M S^4(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha \right|^2 &\ll \int_M |S(\alpha)|^8 d\alpha \ll \left\{ \max_{\alpha \in M} |S(\alpha)|^4 \right\} \int_0^1 |S(\alpha)|^4 d\alpha \ll \\ &\ll \left(N^{\frac{1}{2} + \tilde{N}(N)} P^{-\frac{1}{4}} \right)^4 NL^6 \ll N^{3+4\tilde{N}(N)} P^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Исследование интеграла $r_1(n)$ и завершение доказательства теоремы.

Для произвольного характера $\chi(\bmod q)$ и $\chi^0(\bmod q)$ главного характера (по поводу свойства характеров Дирихле (см. стр.35 книги Н.Дavenport [16]) суммы $C(\chi, a)$ и $C(q, a)$ будем определять следующим образом

$$C(\chi, a) = \sum_{h=1}^q \bar{\chi}(h) e\left(\frac{ah^2}{q}\right), \quad C(q, a) = C(\chi^0, a).$$

Здесь $\bar{\chi}$ — характер Дирихле сопряженный с характером $\chi(\bmod q)$.

Если $\chi_1, \dots, \chi_4$ характеры по модулю q , пусть

$$B(n, q, \chi_1, \dots, \chi_4) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q e\left(-\frac{an}{q}\right) C(\chi_1, a) \cdots C(\chi_4, a)$$

$$B(n, q) = B(n, q, \chi^0, \dots, \chi^0)$$

и

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{B(n, q)}{\varphi^4(q)} \quad (19)$$

В силу теоремы 2 работы [5] для $2 \leq n < N$ имеем

$$\int_M S^4(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \frac{\pi^2}{16} \mathfrak{S}(n)n + O(NL^{-1}) \quad (20)$$

Здесь $\mathfrak{S}(n)$ определяется как в равенстве (19) и согласно лемме 3.2 (ii) работы [5] $n \equiv 4 \pmod{24}$

удовлетворяет соотношению $c_4 < \mathfrak{S}(n) \ll (\log \log n)^{11}$, а если $n \not\equiv 4 \pmod{24}$, то $\mathfrak{S}(n) = 0$. Поэтому из (14) и (20) получим

$$r(n) = \frac{\pi^2}{16} \mathfrak{S}(n)n + O(NL^{-1}) + r_2(n) \quad (21)$$

В силу (18) имеем

$$\sum_{N/2 < n \leq N} |r_2(n)|^2 \ll N^{3+4\tilde{N}(N)} P^{-1}.$$

Отсюда следует, что количество $n \equiv 4 \pmod{24}$ и $N/2 < n \leq N$ для которых $r_2(n) \geq NL^{-1}$ не более чем

$$\ll \frac{N^{3+4\tilde{N}(N)} P^{-1}}{N^2 L^{-2}} \ll N^{1+4\tilde{N}(N)} P^{-1} L^2 \ll N^{1+4\tilde{N}(N)} N^{-2/15} L^{A+2} \ll N^{13/15+4\tilde{N}(N)} L^{A+2}, \quad (22)$$

$$\text{где } A \geq 16 \text{ и } C(N) = \frac{c_2}{\log \log N}.$$

Для остальных n выполняется неравенство

$$r_2(n) < NL^{-1}. \quad (23)$$

Таким образом из (21) и (22) находим, что

$$r(n) = \frac{\pi^2}{16} \mathfrak{S}(n)n + O(NL^{-1}),$$

$$\text{для всех } n \equiv 4 \pmod{24} \text{ и } N/2 < n \leq N \text{ за исключение не более чем}$$

$$\ll N^{13/15+4\tilde{N}(N)} L^{A+2}$$

значений из них. Таким образом теорема 1 доказано.

Поскольку, если $\varepsilon > 0$ произвольная фиксированная постоянная, то для достаточно большого N имеем

$$\ll N^{13/15+4\tilde{N}(N)} L^{A+2} < N^{13/15+11\varepsilon}.$$

Поэтому полученный результат лучше чем результаты работы [5].

Доказательство следствия. Из неравенства (6) и равенства (14) находим

$$R(n) \geq \frac{16}{\log^4 N} (r_1(n) + r_2(n)) > \frac{16}{\log^4 N} (r_1(n) - |r_2(n)|).$$

Подставив в правую часть последнего неравенства соответствующие оценки для $r_1(n)$ и $r_2(n)$ из (21) и (23) получим утверждение приведенный в следствие.

Литература

1. Хуа-Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел. // Труды МИ РАН им. В. А. Стеклова, 1947, т.22, с.3-179.
2. Y. H. Wang. Numbers representable by five prime squares with primes in an arifmetic progression.// Acta Arithmetica XC.3 1999. pp.217-244.
3. И.Аллаков, Н.С. Музропова. О решении одного уравнения в простых числах. Чебышевский сборник. 2024, т.25(4), с.5-26.
- 4.X.-M. Meng (Jinan). On sums of a prime and four prime Squares in short intervals. Acta Math. Hungar. 105 (4) (2004), pp.261-283.
5. J. Y. Liu and M. C. Liu. The exceptional set in the four prime squares problem, Illinois J. Math. 44 (2000), pp.272-293.
6. W. Schwarz. Zur Darstellung von Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen H, J. Riene Angew. Math. 206(1961), pp.78-112.
7. P. Shields. Some applications of sieve methods in number theory, Thesis, University of Wales, 1979.
8. V. A. Plaksin. An asymptotic formula for the number of solutions of a nonlinear equation for prime numbers, Math. USSR Izv. 18(1982), pp.275-348.
9. E B. Kovalchik. Some analogies of the Hardy-Littlewood equation, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov 116(1982), pp.86-95, 163.
- 10.Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach' s problem // Acta arithm. – 1975.- V.27. -P.353-370.
- 11.Аллаков И. Некоторые оценки снизу для числа представлений гольдбаховых чисел // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. - Ташкент, ИК АН Узбекистана, 1985. – вып. 77. -С.37-42.
12. R. C. Vaughan. The Hardy-Littlewood Method, Second ed., Cambridge University Press, 1997.
13. I. Allakov, O. Imamov. A lower estimate for the quantity of a natural number represented as a sum of five squared prime numbers from an arithmetic progression Bull. Inst. Math., 2024, Vol.7, No 4, pp. 86-93
14. A. Ghosh. The distribution of dP modulo 1, Proc. London Math. Soc. (3) 42 (1981), pp.252-269.
15. И.Аллаков. Оценка тригонометрических сумм по квадрату простых чисел в арифметической прогрессии. Изв. АН РУз. –Ташкент, 1990. - №5. –с.3-10
16. H. Davenport. Multiplicative Number Theory, 3rd ed., Springer-Verlag New York 2000.