



NATURAL SONLAR UCHLIGINI
OLTITA TUB SON YORDAMIDA
IFODALASHLAR MASALASIDA
KICHIK YOYLAR BO'YICHA

INTEGRALNI BAHOLASH

Safarov A. (PhD),
Abrayev B. (PhD),
Erdonov B.



Annotatsiya:

Maqolada bir vaqtning o'zida uchta natural sonni oltita tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalashlar masalasi tekshirilgan. Ma'lumki, bu masala umumiy holda Xua Lo-Ken tomonidan qo'yilgan. Ishda kichik yoylar bo'yicha integral

uchun $\left| I_2(\vec{b}) \right| < N^3 Q^{-1/3}$ baho (b_1, b_2, b_3) , $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$

larning ko'pi bilan $X^3 Q^{-1/13}$ ta uchliklaridan tashqari barcha uchliklari uchun o'rinli ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar:

baho, musbat yechimga ega bo'lishlik, kongruent yechimga ega bo'lishlik, effektiv son, fiksirlangan son, tub son, katta yoylar, kichik yoylar.

Kirish.

Faraz qilaylik $b_1, b_2, \dots, b_s$ — natural sonlar, $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ — butun sonlar, $p_1, p_2, \dots, p_m$ — tub sonlar bo'lsin. Ushbu

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{im}p_m, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (1.1)$$

tenglamalar sistemasini qaraymiz [1]. $U_{s,m}(X)$ – orqali (1.1) sistema tub sonlarda yechimga ega bo'lmaydigan $(b_1, b_2, \dots, b_s), 1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X$, elementlar majmuasini belgilaymiz, ya'ni

$$U_{s,m}(X) = \{ (b_1, b_2, \dots, b_s), 1 \leq b_1, \dots, b_s \leq X, b_i \neq a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{im}p_m \}$$

va $U_{s,m}(X)$ to'plamning elementlari sonini $E_{s,m}(X) = \text{card}U_{s,m}(X)$ – orqali belgilaylik.

(1.1) sistemani Wu Fang [2] $m \geq 2s + 1$ bo'lganda o'rganib, ba'zi qo'shimcha shartlarda (1.1) sistemaning yechimlari soni uchun asimptotik formula oldgan.

Xitoylik olimlar M. C. Liu va K. M. Tsang [3], (1.1) sistemaning xususiy holi $s = 2, m = 3$ uchun $E_{2,3}(X) \leq X^{(2-\varepsilon)}$ ko'rsatkichli bahoni olganlar, bu yerda X yetarlicha katta haqiqiy son, ε absolyut effektiv hisoblanuvchi musbat kichik o'zgarmas.

I. Allakov [4] yuqoridagi M. C. Liu va K. M. Tsang natijalarini $2 - \varepsilon < 1,9999833$ ekanligini ko'rsatish orqali yaxshiladi, keyin esa bu natijani (1.1) sistema $s = n, m = n + 1$ bo'lgan hol uchun umumlashtirdi [5].

(1.1) sistemaning yechimga ega bo'lishi quyidagi ikki shartga bog'liq [1,5]:

a) ixtiyoriy p tub son uchun

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \dots + a_{im}l_m \equiv b_i \pmod{p}, \quad (i = 1, \dots, s)$$

chiziqli taqqoslamalar sistemasini qanoatlantiruvchi $l_1, \dots, l_m, 1 \leq l_1, \dots, l_m \leq p - 1$ butun sonlar mavjud:

b) biror $y_1, y_2, \dots, y_m$ musbat haqiqiy sonlari uchun

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{im}y_m = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \text{ tenglik o'rinli.}$$

Bu a) va b) shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s), 1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X$ vektorlar to'plamini $W_{s,m}(X)$ – orqali belgilaymiz.

Keyinchalik I. Allakov va B. X. Abayev [6,7] da (1.1) tenglamalar sistemasini $s = 2$ va $m = 4$ bo'lganda va I. Allakov va B. X. Erdonov [8, 9] $s = 3$ va $m = 5$ bo'lganda o'rgandilar. Hamda biror haqiqiy musbat $y_1, \dots, y_5$ sonlari uchun

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4 + a_{i5}y_5 > 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda

$$\text{card}W_{3,5}(X) \gg X^3 B^{-28} (\ln \ln B)^{-1} \quad (1.3)$$

baho o'rinli ekanligini ko'rsatdilar.

Yuqorida qarab chiqilganlardan ko'rinadiki $s = 3$ bo'lganda $m = 6$ bo'lgan hol uchun (1.1) sistemani o'rganish haqidagi masala ochiqlicha qolib kelmoqda, chunki bu holat yuqoridagi mualliflarning ishlarida yoritilmagan.

Ushbu ishda biz aynan $s = 3, m = 6$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz, (1.1) sistemada $s = 3, m = 6$ deb faraz qilsak quyidagi sistemani olamiz:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{i6}p_6, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.4)$$

Avvalo (1.4) sistema uchun yechimga ega bo'lishlik shartlarining bajarilishini tekshiramiz. Ma'lumki, (1.4) sistemaning yechimga ega bo'lishligi yuqoridagi singari musbat yechimga va kongruent yechimga ega bo'lishlik

shartlari deb ataluvchi shartlarga bog'liq. Tushunarliki, $\text{card}W_{3,6}(X) \geq \text{card}W_{3,5}(X)$. Bundan va (1.3) dan

$W_{3,6}(X)$ to'plam yetarlicha ko'p elementga ega ekan deb xulosa qilishimiz mumkin. Qulaylik uchun biz quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$B = \max_{\substack{i=1,2,3; \\ j=1,6}} \{3 | a_{ij} | \}, \quad \Delta_{ijk} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j, k \leq 6, \quad i \neq j \neq k.$$

Δ_{ijk} determinantda $i, (j, k)$ ustunlarni ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinantni $\Delta_{bjk}, (\Delta_{ibk}, \Delta_{ijb})$ bilan belgilaylik.

Triviallik va xoslikdan qochish uchun koeffitsiyentlarga quyidagi shartlarni qo'yamiz:

$$\Delta_{123} \cdot \Delta_{124} \cdot \dots \cdot \Delta_{456} \neq 0, \quad EKUB(\Delta_{123}, \Delta_{124}, \dots, \Delta_{456}) = 1.$$

2. Belgilashlar va asosiy natija

Faraz qilaylik a_{ij} lar $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{i6}y_6 > 0$, ($i = 1, 2, 3$) shartni qanoatlantiruvchi butun

sonlar bo'lsin. $\mathbb{R}$ — haqiqiy sonlar to'plami va $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{(2.1) \text{ ta}}$ bo'lsin. X va N larni

$$X \geq B^{\exp(\delta^{-2})} \text{ va } N = 108B^5 X$$

munosabatlar yordamida aniqlaylik. (2.1) da δ juda kichik bo'lganligi uchun X va N lar juda katta son bo'lad. Qulaylik uchun quyidagilarni kiritamiz:

$$Q := N^\delta, \quad L := NQ^{-1/90}, \quad T := Q^{1/\sqrt{\delta}} \quad (2.2)$$

(2.1) dan

$$B \leq Q^\delta \quad (2.3)$$

kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $y \in \mathbb{R}$ uchun $e(y) = e^{2\pi iy}$ va $e_q(y) = e\left(\frac{y}{q}\right)$,

$$S(y) := \sum_{L < n \leq N} \Lambda(n) e(ny) \quad (2.4)$$

bo'lsin. Bu yerda $\Lambda(n)$ — quyidagi tenglik yordamida aniqlanuvchi Mangoldt funksiyasi

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{agar } n = p^k, \quad k \geq 1 \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{agar } n \neq p^k \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

$\tau = N^{-1}T^{1/6}$ bo'lsin.

$$1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq q \leq Q \text{ va } (h_1, h_2, h_3, q) = 1 \quad (2.5)$$

shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy h_1, h_2, h_3, q butun sonlar uchun $m(h_1, h_2, h_3, q)$ kubni

$$m(h_1, h_2, h_3, q) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left| x_i - \frac{h_i}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q}, i = 1, 2, 3 \right\}$$

tenglik bilan M_1 va M_2 larni esa

$$M_1 = \cup m(h_1, h_2, h_3, q), \quad M_2 = [\tau, 1 + \tau]^3 \setminus M_1, \quad (2.6)$$

tengliklar bilan aniqlaymiz. (2.6) dagi birlashma (2.5) shartni qanoatlantiruvchi barcha h_1, h_2, h_3, q lar bo'yicha olinadi. Bundan keyin M_1 ni katta yoylar va M_2 ni kichik yoylar deb ataymiz.

Osonlik bilan ko'rish mumkinki, uch o'lchovli $m(h_1, h_2, h_3, q)$ lar bir-biri bilan kesishmaydi va $[\tau, 1 + \tau]^3$ sohada yotadi (M.C.Liu va K.M.Tsang [3] da $n = 2$ holi qaralgan).

Ixtiyoriy $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in W_{3,6}(X)$ va $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ uchun $\bar{x}_b = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$,

$\bar{x}_j = a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + a_{3j} x_3, \quad (j = 1, 6)$ va

$$I(\vec{b}) := \sum_{\substack{L < n_1, \dots, n_6 \leq N, \\ \sum_{j=1}^6 a_{ij} n_j = b_i, (i=1,2,3)}} \Lambda(n_1) \dots \Lambda(n_6)$$

(2.7)

deb olamiz, bu yerda $n_1, \dots, n_6$ natural sonlar. U holda (2.4) va (2.6) larga asosan

$$I(\vec{b}) = \int_{\tau}^{\tau+1} \int_{\tau}^{\tau+1} \int_{\tau}^{\tau+1} e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^6 S(\bar{x}_j) dx_1 dx_2 dx_3 = I_1(\vec{b}) + I_2(\vec{b}). \quad (2.8)$$

Bu yerda

$$I_1(\vec{b}) = \iiint_{M_1} e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^6 S(\bar{x}_j) dx_1 dx_2 dx_3 \quad \text{va} \quad I_2(\vec{b}) = \iiint_{M_2} e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^6 S(\bar{x}_j) dx_1 dx_2 dx_3.$$

(2.8) ga asosan $I(\vec{b}) > I_1(\vec{b}) - |I_2(\vec{b})|$ tengsizlik o'rinli. (2.7) ga ko'ra $I(\vec{b}) > 0$ yoki

$I_1(\vec{b}) > |I_2(\vec{b})|$ ekanligi ko'rsatsak (1.4) sistemani tub sonlarda yechimga ega deya olamiz. Bu yerda $I_1(\vec{b})$ ni

quyidan va $|I_2(\vec{b})|$ ni yuqoridan baholashimiz zarur.

Ushbu ishda kichik yoylar bo'yicha olingan integral uchun quyidan baho olingan ya'ni quyidagi teorema o'rinli ekanligi isbotlangan.

Teorema. $(b_1, b_2, b_3), 1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$ larning ko'pi bilan $X^3 Q^{-1/13}$ ta uchliklaridan tashqari barcha uchliklari uchun

$$|I_2(\vec{b})| < N^3 Q^{-1/3}$$

baho o'rinli.

Teoremani isboti uchun quyidagi lemma zarur bo'ladi.

Lemma. Agar $(x_1, x_2, x_3) \in M_2$ bo'lsa, u holda

$$\min \{|S(\bar{x}_1)|, |S(\bar{x}_2)|, |S(\bar{x}_3)|\} \ll NB^{1/2} Q^{-1/8} \ln^4 N$$

o'rinli.

Isboti. $R = 4B^3 Q^{1/2} \tau^{-1}$ bo'lsin. Dirixlening approksimatsiya to'g'risidagi teoremasiga asosan

$$1 \leq q_j \leq R, (l_j, q) = 1 \text{ va } \left| \bar{x}_j - \frac{l_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j R}, (j = 1, 2, 3) \text{ shartlarni qanoatlantiruvchi } l_j, q_j \text{ butun}$$

sonlari mavjud. U holda quyidagi baho o'rinli [10]:

$$S(\bar{x}_j) \ll (Nq_j^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2} q_j^{1/2}) \ln^4 N, (j = 1, 2, 3). \quad (2.9)$$

Avval

$$\min \{q_1, q_2, q_3\} \geq Q^{1/4} (3B)^{-1} \quad (2.10)$$

ni bajarilishini ko'rsatamiz. Bu (2.9) bilan birgalikda

$$\min \{|S(\bar{x}_1)|, |S(\bar{x}_2)|, |S(\bar{x}_3)|\} \ll (NQ^{-1/8} B^{1/2} + N^{4/5} + N^{1/2} R^{1/2}) \ln^4 N$$

ni beradi. (2.2) va (2.3) larga asosan bu bizga 4.1-lemmani beradi.

Endi (2.10) bajarilishini ko'rsatamiz. $\Delta_{123} \neq 0$ ekanligi uchun

$a_{1j}r_1 + a_{2j}r_2 + a_{3j}r_3 = l_j / q_j, (j = 1, 2, 3)$ tenglamaning r_1, r_2, r_3 yechimlari $r_j = k_j / q$ ($j = 1, 2, 3$) bo'lib, bu yerda k_1, k_2, k_3 butun sonlar $(k_1, k_2, k_3, q) = 1$ shartni qanoatlantiradi va q soni $q_1 q_2 q_3 \Delta_{123}$ ning musbat bo'luvchisi. Shunday qilib

$$1 \leq q \leq q_1 q_2 q_3 |\Delta_{123}| \leq 6q_1 q_2 q_3 B^3. \quad (2.11)$$

$t_j = \bar{x}_j - l_j / q_j, (j = 1, 2, 3)$ bo'lsin. U holda $|t_j| < \frac{1}{q_j R}$ va

$$t_j = a_{1j} \left(x_1 - \frac{k_1}{q} \right) + a_{2j} \left(x_2 - \frac{k_2}{q} \right) + a_{3j} \left(x_3 - \frac{k_3}{q} \right), (j = 1, 2, 3).$$

Bu uchta tenglamadan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$x_j - \frac{k_j}{q} = (A_{1j}t_1 + A_{2j}t_2 + A_{3j}t_3) \Delta_{123}^{-1}, (j = 1, 2, 3),$$

bu yerda A_{ij} bilan a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisi belgilangan. Bundan

$$\left| x_j - \frac{k_j}{q} \right| \leq 2B^2 R^{-1} (q_1^{-1} + q_2^{-1} + q_3^{-1}), (j = 1, 2, 3), \text{ bajarilishini ko'rishimiz mumkin.}$$

Endi teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $\max\{q_1, q_2, q_3\} < Q^{1/4} (3B)^{-1}$ bo'lsin, u holda (2.11) ga asosan

$$2B^2 R^{-1} (q_1^{-1} + q_2^{-1} + q_3^{-1}) = 2B^2 (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) (R q_1 q_2 q_3)^{-1} <$$

$$< 2B^2 \left(3 \left(Q^{1/4} (3B)^{-1} \right)^2 \right) (R q_1 q_2 q_3)^{-1} \leq \frac{2}{3} Q^{1/2} \left(R \cdot \frac{q}{6B^3} \right)^{-1} = 4 Q^{1/2} B^3 (Rq)^{-1} = \frac{\tau}{q},$$

hosil bo'ladi. Demak $\left| x_j - \frac{k_j}{q} \right| < \frac{\tau}{q}$, ($j = 1, 2, 3$) va yana (2.11) dan foydalansak

$$q \leq 6 q_1 q_2 q_3 B^3 \leq 6 B^3 \left(Q^{1/4} (3B)^{-1} \right)^3 = \frac{2}{9} Q^{3/4} < Q$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu tengsizlik $\tau \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1 + \tau$ munosabat bilan birga $\tau \leq k_1, k_2, k_3 \leq 1 + \tau$ ekanligini bildiradi.

Shuning uchun ham $(x_1, x_2, x_3) \in M_1$ degan xulosaga kelamiz. Bu lemma shartiga zid. Shunday qilib (2.10) va demak lemma isbot bo'ladi.

Endi biz teoremani isbotlashimiz mumkin. Avvalo (2.4) dagi $S(y)$ ning aniqlanishi va istalgan $\Delta_{ijk} \neq 0$ bo'lganligi uchun

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |S(\bar{x}_i)|^2 |S(\bar{x}_j)|^2 |S(\bar{x}_k)|^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \sum_{\substack{L < n_1, \dots, n_6 \leq N \\ n_1 = n_2, \dots, n_5 = n_6}} \Lambda(n_1) \dots \Lambda(n_6) =$$

$$= \left(\sum_{L < n \leq N} \Lambda^2(n) \right)^3 \ll (N \log N)^3 \quad (2.12)$$

ega bo'lamiz.

Endi Parseval ayniyati, lemma va (2.12) bahodan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty} \sum_{b_2=-\infty}^{\infty} \sum_{b_3=-\infty}^{\infty} \left| I_2(\vec{b}) \right|^2 = \iiint \prod_{j=1}^6 |S(\bar{x}_j)|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \ll$$

$$\ll \left(\min \left\{ |S(\bar{x}_1)|^2, |S(\bar{x}_2)|^2, |S(\bar{x}_3)|^2 \right\} \right)^3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} |S(\bar{x}_i)|^2 |S(\bar{x}_j)|^2 |S(\bar{x}_k)|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \ll$$

$$\ll \left(N B^{1/2} Q^{-1/8} \ln^4 N \right)^6 (N \ln N)^3 = N^9 B^3 Q^{-3/4} \ln^{27} N$$

Shunday qilib $\left| I_2(\vec{b}) \right| \geq N^3 Q^{-1/3}$ o'rinli bo'ladigan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ lar soni

$$(N^9 B^3 Q^{-3/4} \ln^{27} N) N^{-6} Q^{2/3} < X^3 Q^{-1/13}$$

dan ko'p emas. Ya'ni qaralayotgan oraliqdagi barcha $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ larning ko'pi bilan $X^3 Q^{-1/13}$ ta uch-

liklaridan tashqari barcha uchliklari uchun $|I_2(\vec{b})| < N^3 Q^{-1/3}$ o'rinli.

Adabiyotlar

1. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел, Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1947, том 22, с. 3-179.
2. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables // Acta Math.Sinica.-1957.-V.7.-P.102-121.
3. Liu M. C., Tsang K. M. On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach's problem, J. reine angew. Math. 399 (1989), 109-136.
4. Аллаков И., Исраилов М. И. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз. –Ташкент, 1992. - №10-11. с. 12-15.
5. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел (монография). – Термез: Surxon nashr. 2021. с. 160.
6. Abayev B.Kh., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Uzbek Mathematical Journal. Tashkent. 2020. № 3 p. 16-24.
7. Аллаков И., Абраев Б.Х. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами. Чебышевский сборник т. 24 № 2. 2023. с. 15-37.
8. Эрдонов Б.Х. Об условиях разрешимости системы линейных уравнений состоящей из трёх уравнений с пятью неизвестными в простых числах. Научный вестник НамГУ. 2024. № 4. с. 116-121.
9. Аллаков И., Эрдонов Б.Х. Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел. Чебышевский сборник т.25 №3. 2024. с.11-36.
10. Davenport H. Multiplicative number theory. // Third edition. Springer.-2000. 177 p.